Sur le groupe des rotations
et ses représentations linéaires

Georges Lochak

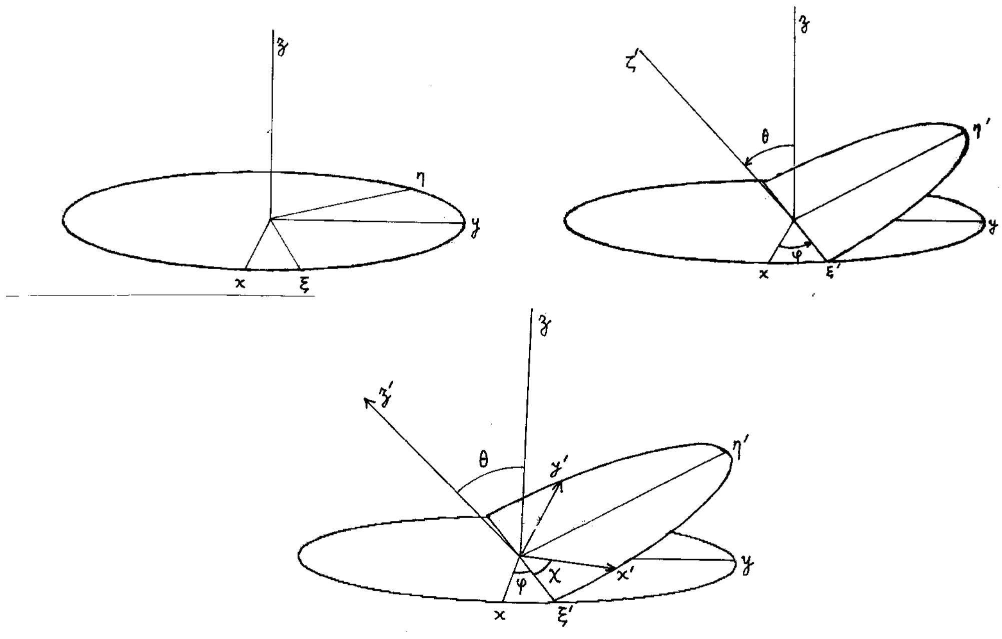
Fondation Louis de Broglie
23 rue Marsoulan
F- 75012 Paris

Résumé : On donne un exposé de la théorie du groupe des rotations en certains points original (notamment sur les représentations linéaires), et l'on corrige quelques erreurs classiques, en espérant n'en avoir pas ajouté d'autres !

ABSTRACT. An exposition of the theory of the rotation group is given with some original points (notably on the linear representations) and with the correction of some errors, hoping that we didn't add any others !

1- Angles d'Euler

Les angles d'Euler sont notés φ, θ, χ : φ : précession, θ : azimut, χ : rotation propre, tous trois avec le même intervalle de variation : $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \chi \leqslant 2\pi$. Les intervalles habituels : $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \chi \leqslant 4\pi$ ont pour but de rendre les angles d'Euler univoques, alors qu'ils ne le sont pas : ils ne sont univoques que dans $\mathbb{R}^4$, (ou $SU(2)$) et non dans $SO(3)$.Le pôle nord dans $\mathbb{R}^4$ est en $\theta = 0$, le pôle sud en $\theta = 2\pi$.



Soient $G(\varphi,\ \theta,\ \chi)$ la rotation totale, $G(\varphi)$ la rotation autour de z, dans (x, y, z) donnant (ξ, η, z) ; $G(\theta)$ la rotation autour de ξ dans $(\xi, \eta, \zeta = z)$ donnant (ξ', η', ζ') ; $G(\chi)$ la rotation autour de ζ' dans $(\xi', \eta', \zeta' = z')$ donnant (x', y', z'). On aura :

$$G(\varphi, \theta, \chi) = G(\chi)G(\theta)G(\varphi) \tag{1}$$

$G(\chi)$, $G(\theta)$ et $G(\varphi)$ ont les représentations matricielles :

$$g_\chi = g_\chi(\xi', \eta', \zeta') = \begin{pmatrix} \cos\chi & -\sin\chi & 0 \\ \sin\chi & \cos\chi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ (\text{dans}(\xi', \eta', \zeta')). \tag{2}$$

$$g_\theta = g_\theta(\xi,\eta,\zeta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (\text{dans}(\xi,\eta,\zeta)). \tag{3}$$

$$g_\varphi = g_\varphi(x,y,z) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{dans}(x,y,z)). \tag{4}$$

Notons que **si** les g_φ, g_θ, g_χ, **étaient** les matrices de changement de coordonnées d'un vecteur fixe dans le système fixe x, y, z, on aurait

$$\vec{V} = x'\vec{e}_1{}' + y'\vec{e}_2{}' = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \vec{e}_1{}' &= \vec{e}_1\cos\varphi + \vec{e}_2\sin\varphi \\ \vec{e}_2{}' &= -\vec{e}_1\sin\varphi + \vec{e}_2\cos\varphi \\ x'(\vec{e}_1\cos\varphi &+ \vec{e}_2\sin\varphi) + y'(-\vec{e}_1\sin\varphi + \vec{e}_2\cos\varphi) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 \end{aligned} \tag{6}$$

Donc on obtiendrait

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ y &= x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ y' &= -x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{aligned} \tag{8}$$

Mais ce n'est pas le cas : nous décrivons en réalité une rotation d'un solide auquel $\vec{V}$ est lié. Donc $\vec{V}$ **tourne** et conserve dans le repère $(\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}')$ les **mêmes coordonnées** (x,y). Donc on aura, dans le système fixe des (x,y), un vecteur $\vec{V}{}' = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2$. Alors :

$$x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 = x(\vec{e}_1\cos\varphi + \vec{e}_2\sin\varphi) + y(-\vec{e}_1\sin\varphi + \vec{e}_2\cos\varphi) \tag{9}$$

d'où :

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' &= x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{aligned} \tag{10}$$

autrement dit, on a la **matrice inverse** de la précédente, comme chez Guelfand [1] qui ne le dit pas (p. 10), et contrairement à Goldstein [2] qui se trompe (p. 146) Nous devons donc calculer le produit des g_φ, g_θ, g_χ, mais en les exprimant toutes dans le même système xyz (le système fixe). :

$$g_\theta(xyz) = g_\varphi(xyz)g_\theta(\xi\eta\zeta)g_\varphi^{-1}(xyz) = g_\varphi g_\theta g_\varphi^{-1} \tag{11}$$

d'où :

$$g_\theta(xyz)g_\varphi(xyz) = g_\varphi g_\theta \tag{12}$$

puis

$$\begin{aligned} g_\chi(xyz) &= [g_\theta(xyz)g_\varphi(xyz)]g_\chi(\xi'\eta'\zeta')[g_\theta(xyz)g_\varphi(xyz)]^{-1} \\ &= (g_\varphi g_\theta)g_\chi(g_\varphi g_\theta)^{-1} = g_\varphi g_\theta g_\chi g_\theta^{-1}g_\varphi^{-1} \end{aligned} \tag{13}$$

$$g_\chi(xyz)g_\theta(xyz)g_\varphi(xyz) = (g_\varphi g_\theta g_\chi g_\theta^{-1}g_\varphi^{-1})g_\varphi g_\theta = g_\varphi g_\theta g_\chi \tag{14}$$

On retrouve bien l'ordre inverse comme chez Gelfand [1] p. 12. On obtient dans xyz :

$$g(\varphi\theta\chi) = g_\varphi g_\theta g_\chi = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\chi - \cos\theta\sin\varphi\sin\chi & -\cos\varphi\sin\chi - \cos\theta\sin\varphi\cos\chi & \sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\chi + \cos\theta\cos\varphi\sin\chi & -\sin\varphi\sin\chi + \cos\theta\cos\varphi\cos\chi & -\cos\varphi\sin\theta \\ \sin\chi\sin\theta & \cos\chi\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{15}$$

2 - Déplacements sur la sphère S^4

Maintenant reprenons tout par un autre bout :

Rapportons l'espace euclidien réel à trois dimensions à un système de coordonnées orthogonales x_1, x_2, x_3. Les vecteurs unitaires sur les axes seront $\vec{i}_1$, $\vec{i}_2$, $\vec{i}_3$.

Introduisons un système de coordonnées sphériques α, β $(0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \beta \leqslant \pi)$ telles que l'axe x_3 soit défini par $\beta = 0$ et l'axe x_1 par $\beta = \frac{\pi}{2},\ \alpha = 0$. Au lieu de représenter une rotation Ω par trois rotations d'angles φ, θ, χ, définissons-la par un axe α, β et un angle 2γ. Et associons à chaque rotation un vecteur $\vec{\xi}$ de coordonnées :

$$\xi_1 = \sin\gamma \sin\beta \cos\alpha \ ; \ \xi_2 = \sin\gamma \sin\beta \sin\alpha \ ; \ \xi_3 = \sin\gamma \cos\beta \tag{16}$$

L'axe de la rotation porte le vecteur $\vec{\xi}$ et est défini par les angles α et β. L'angle de la rotation sera égal à 2γ et nous aurons toutes les rotations possibles avec les intervalles de variation donnés à α et β et en imposant à γ d'être tel que $0 \leqslant \gamma \leqslant \pi$.

Les vecteurs $\vec{\xi}$ de l'ensemble des rotations de même angle 2γ auront leurs extrémités sur la sphère $S(\gamma)$ de rayon $\sin(\gamma)$ centrée sur l'origine. La rotation d'angle nul sera représentée par la sphère de rayon nul : son axe est indéterminé. Les extrémités des vecteurs $\vec{\xi}$ correspondant à *toutes* les rotations rempliront la sphère unité centrée sur l'origine.

Effectuons sur le système d'axes x_1, x_2, x_3 une rotation ω. Dans le nouveau système ainsi obtenu, considérons la rotation Ω. Dans le système initial x_1, x_2, x_3, elle aura l'expression $\omega\Omega\omega^{-1}$. L'ensemble des rotations de cette forme constitue la *classe* associée à Ω. Mais ω laisse évidemment invariante dans son ensemble chaque sphère $S(\gamma)$. Donc les vecteurs $\vec{\xi}$ associés à deux rotations conjuguées Ω et $\omega\Omega\omega^{-1}$ auront leurs extrémités sur une même sphère $S(\gamma)$. Deux rotations conjuguées ont donc même angle de rotation.

Par conséquent, si $f(\Omega)$ est une fonction de classe, c'est-à-dire telle que

$$f(\omega\Omega\omega^{-1}) = f(\Omega) \tag{17}$$

on en conclut que $f(\Omega) = f(\gamma)$ et que $f(\Omega)$ est constante sur chaque sphère $S(\gamma)$.

Cependant nous devons remarquer qu'une sphère $S(\gamma)$ représente *deux classes* de rotations : celles d'angle 2γ et celles d'angle $2\pi - 2\gamma$. Chaque point de $S(\gamma)$ représentera deux rotations autour d'un même axe et d'angles respectifs 2γ et $2\pi - 2\gamma$, mais on voit aussi qu'il en représentera *deux seulement*.

Donc, une fonction $f(\Omega)$ continue sur le groupe des rotations, qui sera une fonction continue des angles α, β, γ, pourra avoir, en un point, au plus deux valeurs correspondant aux deux rotations que représente ce point. *Le groupe des rotations est donc doublement connexe.* Il est important pour les calculs qui vont suivre de n'opérer que sur des fonctions uniformes. C'est pourquoi nous ferons la construction géométrique suivante.

Plongeons l'espace à trois dimensions $\mathbb{R}^3$, où s'effectuent les rotations, dans un espace euclidien $\mathbb{R}^4$ à quatre dimensions. Considérons dans $\mathbb{R}^4$ l'axe x_4, passant par l'origine et orthogonal à $\mathbb{R}^3$. A chaque classe de rotations nous ne ferons plus correspondre la sphère $S(\gamma)$ centrée sur l'origine, mais celle que l'on en déduit par une translation $\cos\gamma$ le long de x_4. Elle sera donc centrée sur x_4 et située dans un hyperplan parallèle à $\mathbb{R}^3$. Aux classes de rotation 2γ et $2\pi - 2\gamma$ correspondront maintenant *deux* sphères symétriques par rapport à l'hyperplan $\mathbb{R}^3$. Toutes ces sphères engendreront l'hypersphère S^4 de rayon unité, centrée sur l'origine dans $\mathbb{R}^4$. A chaque rotation de $\mathbb{R}^3$ est associé le point unique de cette hypersphère de coordonnées :

$$\xi_1 = \sin\gamma \sin\beta \cos\alpha \ ; \ \xi_2 = \sin\gamma \sin\beta \sin\alpha \ ; \ \xi_3 = \sin\gamma \cos\beta \ ; \ \xi_4 = \cos\gamma \tag{18}$$

Au pôle nord $(\gamma = 0)$ de S^4 correspondra la rotation nulle. Si nous effectuons, à partir de ce pôle, un déplacement d'un point $M(\xi_k)$ par un chemin quelconque sur l'hypersphère, il lui correspondra *une rotation et une seule* d'angle 2γ autour d'un axe $(\alpha,\ \beta)$.

On voit que cet angle est le double de la distance géodésique du pôle au point $M(\xi_k)$. Soit alors un second point $M'(\xi'_k)$ et effectuons un déplacement de M' à M. Nous pouvons pour cela aller d'abord de M' au pôle nord, ce qui représente la rotation ${\Omega'}^{-1}(\alpha',\ \beta',\ \gamma')$, puis du pôle nord à M, ce qui représente la rotation $\Omega(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$. Le déplacement de M' à M représentera donc la rotation $\Omega{\Omega'}^{-1}$ et l'angle de cette rotation sera le double de la distance géodésique $M'M$ qui est définie par

$$\cos(\gamma_{M'M}) = \xi_1\xi'_1 + \xi_2\xi'_2 + \xi_3\xi'_3 + \xi_4\xi'_4 \tag{19}$$

La correspondance entre la composition des déplacements sur S^4 et des rotations dans $\mathbb{R}^3$ montre que le groupe des rotations est l'image du groupe des déplacements sur S^4 par un homomorphisme de groupe. Mais c'est un homomorphisme seulement, pas un isomorphisme, car aux points $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ et $(\alpha+\pi,\ \pi-\beta,\ \pi-\gamma)$ diamétralement opposés sur S^4 correspondent deux rotations d'axes et d'angles opposés, qui sont donc identiques. Donc à une rotation correspondent deux déplacements sur S^4.

3 - Quaternions.

Associons maintenant aux ξ_k le quaternion :

$$R = \xi_4 + \xi_1 J_1 + \xi_2 J_2 + \xi_3 J_3 \tag{20}$$

Comme nous sommes sur l'hypersphère unité, on a :

$$R^{-1} = \overline{R} = \xi_4 - \xi_1 J_1 - \xi_2 J_2 - \xi_3 J_3 \tag{21}$$

avec $J_k^2 = -1$, $J_1J_2 = -J_2J_1 = J_3$, $J_2J_3 = -J_3J_2 = J_1$, $J_3J_1 = -J_1J_3 = J_2$. Prenons pour cela la représentation matricielle $J_k = -is_k$ où les s_k sont les matrices de Pauli. On a alors :

$$R = \xi_4 - i\xi_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - i\xi_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - i\xi_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{22}$$

$$R = \begin{pmatrix} \xi_4 - i\xi_3 & -\xi_2 - i\xi_1 \\ \xi_2 - i\xi_1 & \xi_4 + i\xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \ ; \quad \begin{matrix} a = \xi_4 - i\xi_3 \\ b = -\xi_2 - i\xi_1 \end{matrix} \tag{23}$$

a et b sont les paramètres de Cayley-Klein. $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ sont les paramètres d'Euler - Olinde - Rodrigues (voir Cartan [3]). Comme $\Sigma\xi_k^2 = 1$, on a

$$aa^* + bb^* = 1 \tag{24}$$

(R est unimodulaire). Comme $R^{-1} = \overline{R}$ on a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a^* & -b \\ b^* & a \end{pmatrix} \tag{25}$$

(R est unitaire)

Soit maintenant :

$$r = xJ_1 + yJ_2 + zJ_3 \ ; \quad r' = RrR^{-1} \tag{26}$$

On a $r^2 = -(x^2+y^2+z^2)$, donc on obtient :

$$r'^2 = (RrR^{-1})(RrR^{-1}) = Rr^2R^{-1} = r^2RR^{-1} = r^2 = -(x^2+y^2+z^2) \tag{27}$$

Cela signifie, avec $r' = x'J_1 + y'J_2 + z'J_3$, que la transformation $r \mapsto r'$ conserve les distances, c'est donc une isométrie (C'est en fait une rotation car l'orientation de l'espace est conservée). Or on a :

$$r' = (\xi_4 + \xi_1 J_1 + \xi_2 J_2 + \xi_3 J_3)(xJ_1 + yJ_2 + zJ_3)(\xi_4 - \xi_1 J_1 - \xi_2 J_2 - \xi_3 J_3) \tag{28}$$

$$\begin{aligned} r' = (\xi_4 + \xi_1 J_1 + \xi_2 J_2 + \xi_3 J_3)[&\xi_4(xJ_1 + yJ_2 + zJ_3) \\ &+ \xi_1(x + yJ_3 - zJ_2) \\ &+ \xi_2(-xJ_3 + y + zJ_1) \\ &+ \xi_3(xJ_2 - yJ_1 + z)] \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} r' = (\xi_4 + \xi_1 J_1 + \xi_2 J_2 + \xi_3 J_3)[(\xi_1 x + \xi_2 y + \xi_3 z) \\ + (\xi_4 x + \xi_2 z - \xi_3 y) J_1 \\ + (\xi_4 y + \xi_3 x - \xi_1 z) J_2 \\ + (\xi_4 z + \xi_1 y - \xi_2 x) J_3] \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} r' = &+ (\xi_1 x + \xi_2 y + \xi_3 z)(\xi_4 + \xi_1 J_1 + \xi_2 J_2 + \xi_3 J_3) \\ &+ \xi_4(\xi_4 x + \xi_2 z - \xi_3 y) J_1 - \xi_1(\xi_4 x + \xi_2 z - \xi_3 y) \\ &+ \xi_4(\xi_4 y + \xi_3 x - \xi_1 z) J_2 + \xi_1(\xi_4 y + \xi_3 x - \xi_1 z) \\ &+ \xi_4(\xi_4 z + \xi_1 y - \xi_2 x) J_3 - \xi_1(\xi_4 z + \xi_1 y - \xi_2 x) \\ &- \xi_2(\xi_4 x + \xi_2 z - \xi_3 y) J_3 + \xi_3(\xi_4 x + \xi_2 z - \xi_3 y) J_2 \\ &- \xi_2(\xi_4 y + \xi_3 x - \xi_1 z) - \xi_3(\xi_4 y + \xi_3 x - \xi_1 z) J_1 \\ &+ \xi_2(\xi_4 z + \xi_1 y - \xi_2 x) J_1 - \xi_3(\xi_4 z + \xi_1 y - \xi_2 x) \end{aligned} \tag{31}$$

Les termes scalaires s'éliminent et l'on obtient :

$$\begin{aligned} r' = &[(\xi_1^2 + \xi_4^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2)x + (\xi_1\xi_2 - \xi_3\xi_4 + \xi_1\xi_2 - \xi_3\xi_4)y + (\xi_3\xi_1 + \xi_2\xi_4 + \xi_2\xi_4 + \xi_3\xi_1)z] J_1 \\ &+ [(\xi_1\xi_2 + \xi_3\xi_4 + \xi_1\xi_2 + \xi_3\xi_4)x + (\xi_2^2 + \xi_4^2 - \xi_1^2 - \xi_3^2)y + (\xi_3\xi_2 - \xi_1\xi_4 - \xi_1\xi_4 + \xi_3\xi_2)z] J_2 \\ &+ (\xi_1\xi_3 - \xi_2\xi_4 - \xi_2\xi_4 + \xi_1\xi_3)x + (\xi_2\xi_3 + \xi_1\xi_4 + \xi_2\xi_3 + \xi_1\xi_4)y + (\xi_3^2 + \xi_4^2 - \xi_2^2 - \xi_1^2)z] J_3 \end{aligned} \tag{32}$$

ce qui exprime la rotation $r' = x' J_1 + y' J_2 + z' J_3$ par :

$$\begin{aligned} x' &= (\xi_1^2 + \xi_4^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2)x + 2(\xi_1\xi_2 - \xi_3\xi_4)y + 2(\xi_3\xi_1 + \xi_2\xi_4)z \\ y' &= 2(\xi_1\xi_2 + \xi_3\xi_4)x + (\xi_2^2 + \xi_4^2 - \xi_1^2 - \xi_3^2)y + 2(\xi_2\xi_3 - \xi_1\xi_4)z \\ z' &= 2(\xi_1\xi_3 - \xi_2\xi_4)x + 2(\xi_2\xi_3 + \xi_1\xi_4)y + (\xi_3^2 + \xi_4^2 - \xi_2^2 - \xi_1^2)z \end{aligned} \tag{33}$$

En termes de a et b on a

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{2}(a^2 + a^{*2} - b^2 - b^{*2})x + \frac{i}{2}(-a^2 + a^{*2} - b^2 + b^{*2})y - (ab + a^* b^*)z \\ y' &= \frac{i}{2}(a^2 - a^{*2} - b^2 + b^{*2})x + \frac{1}{2}(a^2 + a^{*2} + b^2 + b^{*2})y - i(ab - a^* b^*)z \\ z' &= (ab^* + a^* b)x + i(a^* b - ab^*)y + (aa^* - bb^*)z \end{aligned} \tag{34}$$

Avec $a = \xi_4 - i\xi_3$, $b = -\xi_2 - i\xi_1$, $aa^* = \xi_3^2 + \xi_4^2$, $bb^* = \xi_1^2 + \xi_2^2$, $a^2 = \xi_4^2 - \xi_3^2 - 2i\xi_3\xi_4$, $b^2 = \xi_2^2 - \xi_1^2 + 2i\xi_1\xi_2$, $ab = -(\xi_3\xi_1 + \xi_2\xi_4) + i(\xi_2\xi_3 - \xi_1\xi_4)$, $ab^* = -(\xi_3\xi_1 - \xi_2\xi_4) + i(\xi_2\xi_3 + \xi_1\xi_4)$, on obtient : $a^2 + a^{*2} = 2(\xi_4^2 - \xi_3^2)$, $b^2 + b^{*2} = 2(\xi_2^2 - \xi_1^2)$, $a^2 - a^{*2} = -4i\xi_3\xi_4$, $b^2 - b^{*2} = +4i\xi_1\xi_2$, $ab + a^* b^* = -2(\xi_3\xi_1 + \xi_2\xi_4)$, $ab - a^* b^* = 2i(\xi_2\xi_3 - \xi_1\xi_4)$, $ab^* + a^* b == 2(\xi_3\xi_1 - \xi_2\xi_4)$, $ab^* - a^* b == 2i(\xi_2\xi_3 + \xi_1\xi_4)$, Donc les formules (33) et (34) se raccordent bien.

Il faut maintenant exprimer les ξ_k en fonction des angles d'Euler. On considère $R(\alpha, \beta, \gamma)$, avec successivement :

1 - $G(\varphi)$, qui correspond à $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = \frac{\varphi}{2}$, ce qui, compte-tenu de (18), donne : $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = \sin \frac{\varphi}{2}$, $\xi_4 = \cos \frac{\varphi}{2}$ et donc

$$R(0, 0, \frac{\varphi}{2}) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} = e^{-is_3 \frac{\varphi}{2}} \tag{35}$$

2 - $G(\theta)$, qui correspond à $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, $\gamma = \frac{\theta}{2}$ ce qui, compte-tenu de (18), donne : $\xi_1 = \sin \frac{\theta}{2}$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$, $\xi_4 = \cos \frac{\theta}{2}$ et donc

$$R(0, \frac{\pi}{2}, \frac{\theta}{2}) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -i \sin \frac{\theta}{2} \\ -i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = e^{-is_1 \frac{\theta}{2}} \tag{36}$$

3 - $G(\chi)$, qui correspond à $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = \frac{\chi}{2}$ ce qui, compte-tenu du 1 - donne

$$R(0,0,\frac{\chi}{2}) = e^{-is_3\frac{\chi}{2}} \tag{37}$$

Et on doit faire le produit :

$$R = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -i\sin\frac{\theta}{2} \\ -i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\chi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\chi}{2}} \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\varphi+\chi}{2}} & -i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\varphi-\chi}{2}} \\ -i\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\varphi-\chi}{2}} & \cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\varphi+\chi}{2}} \end{pmatrix} \tag{38}$$

On obtient donc finalement :

$$a = \cos\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\varphi+\chi}{2}} \;\; ; \;\; b = -i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\varphi-\chi}{2}} \tag{39}$$

$$\xi_1 = \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi-\chi}{2} \tag{40}$$

$$\xi_2 = \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi-\chi}{2} \tag{41}$$

$$\xi_3 = \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi+\chi}{2} \tag{42}$$

$$\xi_4 = \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi+\chi}{2} \tag{43}$$

4 - L'intégration invariante sous le groupe des rotations.

Nous appellerons intégrale invariante d'une fonction $f(\omega)$ continue sous le groupe des rotations et nous désignerons par $\int f(\omega)d\omega$ une intégrale telle, qu'en plus des propriétés habituelles de l'intégrale, elle possède les propriétés suivantes :

1° elle est invariante par translation de $f(\omega)$ à l'intérieur du groupe ; on aura, quelle que soit la rotation Ω,

$$\int f(\Omega\omega)d\omega = \int f(\omega\Omega)d\omega = \int f(\omega^{-1})d\omega = \int f(\omega)d\omega; \tag{44}$$

2° elle est normée, c'est-à-dire qu'on prend pour unité de volume le "volume" du groupe ; on aura, pour $f(\omega) \equiv 1$,

$$\int d\omega = 1. \tag{45}$$

On démontre [4] que l'intégration invariante est univoquement définie par ces axiomes. Dans le cas du groupe des rotations, on aura simplement :

$$\int f(\omega)d\omega = \frac{1}{16\pi^2}\int_0^{2\pi} d\chi \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} f(\theta,\varphi,\chi)\sin\theta d\theta \tag{46}$$

5 - Les représentations unitaires du groupe des rotations.

Les transformations linéaires

$$\begin{pmatrix} z_1{}' \\ z_2{}' \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \;\; ; \; R = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \tag{47}$$

forment un groupe. La correspondance entre les points ξ_k de S^4 et les matrices R avec la définition (23) est biunivoque et on a la même correspondance entre les déplacements sur S^4 et les transformations (47). Pour avoir les autres représentations du groupe des rotations, considérons les 2j+1 monômes de degré 2j

$$\zeta^j_m = \frac{z_1^{j-m}z_2^{j+m}}{\sqrt{(j-m)!(j+m)!}} \quad (m = -j,\; -j+1, ...,\; j-1,\; j); \tag{48}$$

j prendra les valeurs 0, $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, ... de sorte que $2j+1 = 1,\ 2,\ 3, ...$

On écrira de même

$$\zeta'^{j}_{m'} = \frac{z'^{j-m'}_{1}\, z'^{j+m'}_{2}}{\sqrt{(j-m')!(j+m')!}} \quad (m' = -j,\ -j+1, ...,\ j-1,\ j). \tag{49}$$

Si on passe de (z_1, z_2) à (z'_1, z'_2) par la transformation (47), on aura

$$\zeta'^{j}_{m'} = \frac{(az_1 + bz_2)^{j-m'}(-b^* z_1 + a^* z_2)^{j+m'}}{\sqrt{(j-m')!(j+m')!}} \tag{50}$$

On voit facilement que cette transformation est de la forme

$$\zeta'^{j}_{m'} = \sum_{m=-j}^{m=j} D_j^{m',m} \zeta^j_m \tag{51}$$

où les $D_j^{m',m}$ sont les éléments d'une matrice $\mathbf{D}_j$ d'ordre $2j+1$. Ce sont des fonctions des paramètres de Cayley-Klein. On voit donc qu'on a obtenu une suite de représentations linéaires du groupe des rotations. Elles sont *unitaires* car on vérifie qu'en vertu de (23) et (24)

$$\sum_{m'=-j}^{m'=j} \zeta'^{j}_{m'} \zeta'^{j*}_{m'} = \sum_{m=-j}^{m=j} \zeta^j_m \zeta^{j*}_m. \tag{52}$$

Ce sont les fonctions $D_j^{m',m}$ qui portent le nom de *fonctions sphériques généralisées*. Elles s'identifient aux paramètres de Cayley-Klein pour $j = \frac{1}{2}$ et on montre qu'elles sont multiformes sur le groupe des rotations pour $j = \frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{2},\ ...$ et uniformes pour $j = 0,\ 1,\ 2, ...$ Elles sont évidemment toutes uniformes sur S^4.

On démontre de plus ce résultat essentiel : *les représentations unitaires* $\mathbf{D}_j$ *sont irréductibles et il n'y a pas d'autres représentations unitaires possibles* [3].

6 - Une représentation intégrale des fonctions $D_j^{m',m}$.

Après ces rappels, nous allons établir une représentation intégrale des fonctions $D_j^{m',m}$ qui nous fournira leur forme explicite et quelques autres résultats.

D'après (48) et (51) on peut écrire

$$D_j^{m',m}\sqrt{(j-m)!(j+m)!} = \left[\frac{\partial^{2j}\zeta'^{j}_{m'}}{\partial z_1^{j+m}\partial z_2^{j-m}}\right]_{z_1=z_2=0} \tag{53}$$

A l'aide de (50), cette expression deviendra

$$D_j^{m',m}\sqrt{(j-m)!(j+m)!(j-m')!(j+m')!} = \left\{\frac{\partial^{2j}}{\partial z_1^{j-m}\partial z_2^{j+m}}\left[(az_1+bz_2)^{j-m'}(-b^*z_1+a^*z_2)^{j+m'}\right]\right\}_{z_1=z_2=0} \tag{54}$$

Mais si $f(z_1, z_2)$ est une fonction holomorphe dans les deux plans z_1 et z_2, on a la formule de Cauchy

$$f(z_1, z_2) = \frac{-1}{4\pi^2}\int_{l_1} dz'_1 \int_{l_2} dz'_2 \frac{f(z'_1, z'_2)}{(z'_1 - z_1)(z'_2 - z_2)} \tag{55}$$

où les contours l_1 et l_2 tracés dans les plans z'_1 et z'_2 contiennent respectivement z_1 et z_2. On déduit de cette formule

$$\frac{\partial^{n+m} f(z_1, z_2)}{\partial z_1^n \partial z_2^m} = -\frac{n!m!}{4\pi^2}\int_{l_1} dz'_1 \int_{l_2} dz'_2 \frac{f(z'_1, z'_2)}{(z'_1 - z_1)^{n+1}(z'_2 - z_2)^{m+1}} \tag{56}$$

La formule (54) s'écrira alors

$$D_j^{m',m} = \frac{-1}{4\pi^2}\sqrt{\frac{(j-m)!(j+m)!}{(j-m')!(j+m')!}}\int_{l_1} dz_1 \int_{l_2} dz_2 \frac{(az_1+bz_2)^{j-m'}(-b^*z_1+a^*z_2)^{j+m'}}{z_1^{j-m+1}z_2^{j+m+1}} \tag{57}$$

Posons $z = \frac{z_2}{z_1}$ et nous obtiendrons

$$D_j^{m',m} = \frac{-1}{4\pi^2}\sqrt{\frac{(j-m)!(j+m)!}{(j-m')!(j+m')!}}\int_{l_1} \frac{dz_1}{z_1} \int_{l}(a+bz)^{j-m'}(-b^*+a^*z)^{j+m'}z^{-j-m-1}dz \tag{58}$$

La première intégrale est égale à $2i\pi$ d'où

$$D_j^{m',m} = \sqrt{\frac{(j-m)!(j+m)!}{(j-m')!(j+m')!}}\frac{1}{2i\pi}\int_{l}(a+bz)^{j-m'}(-b^*+a^*z)^{j+m'}z^{-j-m-1}dz \tag{59}$$

C'est l'expression intégrale cherchée.

Exprimons a et b à l'aide de (39) et changeons z en $z = i\sin\theta\exp(i\varphi)\frac{z'}{2}$. Mais nous garderons la notation z pour z'

$$D_j^{m',m} = e^{i(m\varphi+m'\chi)}d_j^{m',m}(\theta), \tag{60}$$

$$\begin{aligned} d_j^{m',m}(\theta) &= i^{m-m'}\sqrt{\frac{(j+m)!(j-m)!}{(j+m')!(j-m')!}}\sin^{-(m-m')}\frac{\theta}{2}\cos^{-(m+m')}\frac{\theta}{2} \\ &\times \frac{1}{2i\pi}\int_l\Big(1+\frac{\cos\theta-1}{2}z\Big)^{j-m'}\Big(1+\frac{\cos\theta+1}{2}z\Big)^{j+m'}z^{m-j-1}dz \end{aligned} \tag{61}$$

Mais si $\mathbf{P}_n^{p,q}(x)$ représente un polynôme de Jacobi on a l'expression intégrale [5]

$$\mathbf{P}_n^{p,q}(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_l\Big(1+\frac{x-1}{2}z\Big)^{n+q}\Big(1+\frac{x+1}{2}z\Big)^{n+p}z^{-n-1}dz \tag{62}$$

Les polynômes $\mathbf{P}_n^{p,q}(x)$ (p et q étant fixés) sont orthogonaux sur l'intervalle [-1, 1] avec la fonction de poids $(1-x)^p(1+x)^q$ et on a [5]

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^p(1+x)^q\mathbf{P}_n^{p,q}(x)\mathbf{P}_{n'}^{p,q}(x)dx = \delta_{n,n'}\frac{2^{p+q+1}}{2n+p+q+1}\frac{\Gamma(n+p+1)\Gamma(n+q+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+p+q+1)} \tag{63}$$

En vertu de (62), on pourra écrire

$$d_j^{m',m}(\theta) = i^{m-m'}\sqrt{\frac{(j+m)!(j-m)!}{(j+m')!(j-m')!}}\sin^{-(m-m')}\frac{\theta}{2}\cos^{-(m+m')}\frac{\theta}{2}\mathbf{P}_{j-m}^{-(m-m'),-(m+m')}(\cos\theta) \tag{64}$$

A l'aide des formules (62) et (46) on trouve alors facilement

$$\int D_j^{m',m}(\omega)\Big[D_{j_1}^{m'_1,m_1}\Big]^*d\omega = \frac{1}{2j+1}\delta_{jj_1}\delta_{m',m'_1}\delta_{m,m_1} \tag{65}$$

Les fonctions sphériques généralisées sont orthogonales et ont la norme $\frac{1}{2j+1}$. Elles sont, en particulier, linéairement indépendantes, ce qui entraîne que les représentations $\mathbf{D}_j$ sont irréductibles

Revenons à l'intégrale (59). Remplaçons a et b par leurs expressions (23) et posons

$$U_j^{m',m} = r^{2j}D_j^{m',m} \tag{66}$$

On aura l'expression

$$U_j^{m',m} = \sqrt{\frac{(j+m)!(j-m)!}{(j+m')!(j-m')!}}\frac{1}{2i\pi}\int_l [x_4+ix_3+z(x_2+ix_1)]^{j+m'}[-(x_2-ix_1)+z(x_4-ix_3)]^{j-m'}z^{m-j-1}dz, \tag{67}$$

où $x_k = r\xi_k$, r étant le rayon vecteur d'un point de l'espace $\mathbb{R}^4$. On déduit aisément de là

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_4^2}\right)U_j^{m',m} = 0 \tag{68}$$

Mais on voit que $U_j^{m',m}$ est un polynôme homogène de degré $2j$. Ces polynômes sont indépendants d'après (65). Pour j donné, il y en a $(2j+1)^2$, c'est-à-dire précisément le nombre des polynômes de degré $2j$ linéairement indépendants et solutions de l'équation de Laplace (68) dans $\mathbb{R}^4$. Les $U_j^{m',m}$ sont donc les polynômes harmoniques de $\mathbb{R}^4$ et, d'après (66), *les fonctions sphériques généralisées sont les fonctions sphériques de* $\mathbb{R}^4$.

Remerciements. Je remercie vivement Claude Daviau à qui est largement due la mise au point de ces notes. G. L.

Références

[1] I.M. Gelfand, P.A. Minlos et Z. J. Shapiro, *Représentations du groupe des rotations et du groupe de Lorentz*, Moscou 1958.
[2] H. Goldstein, *Classical Mechanics* (2^{nd} ed.), Addison-Wesley, Philippines, 1980.
[3] Cartan *Leçons sur la théorie des spineurs*, Hermann, Paris 1938.
[4] L. Pontriaguine, *Les groupes continus*, Moscou 1954. 939
[5] G. Szegö *Orthogonal polynomials*, éd. Amer. Math. Soc., New-York