

# LE MOUVEMENT BROWNIEN RELATIVISTE

ET

## LES ÉQUATIONS DE BASE DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE

par M. Jean-Pierre CAUBET

(manuscrit reçu le 1er Décembre 1975)

*RESUME.* On donne une théorie relativiste du mouvement Brownien sur laquelle on fonde une classification des équations d'ondes fondamentales de la mécanique ondulatoire et une nouvelle expression du principe de correspondance.

Le mouvement brownien a été décrit pour la première fois par le botaniste R. Brown en 1828, qui l'avait observé d'abord sur des substances organiques (en particulier le pollen de différentes plantes) puis sur des substances non organiques ce qui l'amena à la conclusion que la matière était construite de molécules primitives.

La description mathématique de ce mouvement commença en 1900. L. Bachelier donna d'abord la répartition à un instant donné d'un grain exécutant un mouvement brownien à une dimension, et A. Einstein en 1905-1906 publia trois papiers respectivement sur le mouvement des petites particules suspendues dans un liquide stationnaire, sur la théorie du mouvement brownien, et sur une nouvelle détermination des dimensions moléculaires, fondés sur la théorie de la chaleur considérée comme la théorie cinétique des molécules, conjecture confirmée depuis par les expériences de J. Perrin et de R.A. Millikan. Mais une théorie mathématique satisfaisante demandait la construction d'une mesure sur un espace de trajectoires, et c'est N. Wiener qui en 1923, à la suite des travaux de E. Borel et de H. Lebesgue, parvient à construire cette mesure qui porte maintenant son nom.

Cependant, ce mouvement brownien mathématique que pour préciser nous appellerons processus de Wiener, apparaît assez différent de ce qu'avait un siècle plus tôt observé Brown. Si les trajectoires de ce processus sont bien continues, par contre elles ne sont en aucun point dérivables et surtout sont

de variation totale infinie et peuvent avoir des quotients  $\Delta x/\Delta t$  (i.e. déplacement/temps) non bornés, ce qui correspond mal à l'idée que l'on peut a priori se faire de la trajectoire d'un corpuscule même soumis à un très grand nombre de chocs, et mal aussi aux conceptions relativistes.

L'objet de cet article est de montrer simplement comment néanmoins ce même processus de Wiener, adapté d'une manière naturelle à la structure de l'espace de Minkowski, est régi par des lois dont la Mécanique quantique est une approximation. Au fil des lignes, le lecteur verra apparaître le formalisme de la Mécanique classique, ainsi que des idées développées par L. de Broglie depuis sa thèse jusqu'à aujourd'hui.

## 1 - LE PROCESSUS DE WIENER.

Imaginons un mobile se déplaçant sur la droite réelle en partant de l'origine à l'instant  $t = 0$  et en effectuant à chaque instant  $t = k\Delta t$  ( $k \geq 1$ ) un saut de longueur  $\pm \Delta x$  avec la même probabilité pour chaque direction (à droite ou à gauche). A l'instant  $t > 0$  sa position est donc :

$$W_t = X_1 + \dots + X_{(t/\Delta t)}$$

où  $(t/\Delta t)$  désigne la partie entière de  $t/\Delta t$ , et où  $(X_n)_{n \geq 1}$  désigne une suite de variables aléatoires (sauts élémentaires) indépendantes, et ayant la même répartition telle que  $\text{Prob.}(X_n = +\Delta x) = \text{Prob.}(X_n = -\Delta x) = 1/2$ , donc d'espérance nulle et de variance  $(\Delta x)^2$ .

D'après le théorème de Laplace, on aura donc lorsque l'instant  $t$  reste fixé mais que  $\Delta t \downarrow 0$  de sorte que l'entier  $(t/\Delta t)$  augmente indéfiniment, et en supposant que  $\Delta x^2/\Delta t$  tende vers une limite  $2D$  fixe :

$$\text{Prob.}\{a \leq W_t \leq b\} = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_a^b \exp\left\{-\frac{x^2}{4Dt}\right\} dx$$

Nous poserons dans tout ce qui suit  $2D = 1$ . On peut observer en passant qu'ainsi l'accroissement (infinitésimal)  $dW_t$  du processus de Wiener à partir de sa position d'origine est lié à l'accroissement temporel  $dt$  par la relation  $\text{Var.}(dW_t) = dt$ , formule fondamentale du calcul différentiel stochastique dû à K. Ito, et que l'on écrit heuristiquement " $dW_t^2 = dt$ ".

Ce qui précède est insuffisant pour définir le processus de

Wiener. Il faut de plus supposer que le processus évolue à partir de sa position  $W_t$ , atteinte à l'instant  $t$ , en probabilité exactement comme il a évolué à partir de l'origine où il se trouvait à l'instant  $t = 0$ . Ainsi en particulier la règle " $dW_t^2 = dt$ " est-elle générale, et non plus seulement valable au départ. Et cette nouvelle hypothèse, donnant au processus de Wiener la propriété qu'en anglais on appelle "starting afresh", détermine la probabilité que la position  $W_t$  soit dans les intervalles  $(a_k, b_k)$  respectivement aux instants  $t_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ), à savoir :

$$\text{Prob. } \bigcap_{1 \leq k \leq n} \{a_k \leq W_{t_k} \leq b_k\} = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_n}^{b_n} \frac{\exp\left[-\frac{x_1^2}{2t_1}\right]}{\sqrt{2\pi t_1}} \frac{\exp\left[-\frac{(x_2 - x_1)^2}{2(t_2 - t_1)}\right]}{\sqrt{2\pi(t_2 - t_1)}} \dots \frac{\exp\left[-\frac{(x_n - x_{n-1})^2}{2(t_n - t_{n-1})}\right]}{\sqrt{2\pi(t_n - t_{n-1})}} dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

On peut alors démontrer que les deux hypothèses que l'on vient de faire, ou ce qui revient au même la formule précédente, déterminent entièrement la mesure de Wiener, c'est-à-dire la probabilité de répartition des trajectoires éventuelles qui apparaissent d'ailleurs (presque sûrement) nécessairement continues.

Naturellement, ce qui précède s'étend immédiatement au cas d'un mobile se déplaçant par exemple dans l'espace euclidien à trois dimensions, rapporté pour fixer les idées à un repère orthonormé  $(e_1, e_2, e_3)$ , la position de ce mobile à l'instant  $t \geq 0$  étant alors :

$$W_t = W_t^1 e_1 + W_t^2 e_2 + W_t^3 e_3.$$

On fait seulement l'hypothèse que les trois projections  $W_t^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sont des processus de Wiener sur l'axe correspondant, et que les probabilités de répartition de ces trois processus sont indépendantes les unes des autres.

Il en résulte en particulier que l'on a alors :

$$\text{Prob.}\{a \leq W_t \leq b\} = \frac{1}{(2\pi t)^{3/2}} \int_a^b \exp\left[-\frac{|x|^2}{2t}\right] dx,$$

où évidemment  $a = (a_i)$ ,  $b = (b_i)$  avec  $i = 1, 2, 3$ , où de plus l'intégrale est triple avec  $dx = dx_1 dx_2 dx_3$ , et où  $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ . En effet, cette relation n'est autre que

la relation suivante :

$$\text{Prob. } \{a \leq W_t \leq b\} = \prod_{i=1}^3 \text{Prob. } \{a_i \leq W_t^i \leq b_i\}$$

exprimant en particulier l'indépendance mutuelle des probabilités de répartition des trois composantes.

## 2. IMAGE D'UN PROCESSUS DE WIENER, EQUATION DIFFERENTIELLE STOCHASTIQUE.

Soit une fonction (indéfiniment) différentiable  $f : N \rightarrow N$  (i.e. définie sur l'espace euclidien  $N$ , et à valeurs dans ce même espace  $N$ ). Lorsque le processus de Wiener  $W_t$  parcourt  $N$ , son image  $f(W_t)$  par la fonction  $f$  parcourt elle aussi l'espace  $N$ , et on a d'après la formule de Taylor :

$$(1) \quad f(W_t) - f(W_s) = \sum_i f'_i(W_s) (W_t^i - W_s^i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} f''_{ij}(W_s) (W_t^i - W_s^i) (W_t^j - W_s^j) + \text{etc...}$$

Si la fonction  $t \rightarrow W_t$  était une fonction ordinaire (i.e. définie sur le demi-intervalle  $(0, \infty)$ , à valeurs dans  $N$ , et indéfiniment différentiable) on aurait aussi :

$$(2) \quad f(W_t) - f(W_s) = \int_s^t f'(W_u) dW_u,$$

mais une telle relation n'est plus valable ici. En fait, la différentielle  $df(W_t)$  de l'accroissement  $f(W_t) - f(W_s)$  est ici, avec la convention de l'indice muet :

$$(3) \quad df(W_t) = f'_i(W_t) dW_t^i + \frac{1}{2} f''_{ii}(W_t) dt,$$

le terme inattendu au second membre venant de l'application dans la relation (1) de la règle " $dW_t^2 = dt$ " contractant les termes du second ordre  $\frac{1}{2} f''_{ii}(W_s) (W_t^i - W_s^i)^2$  en de nouveaux termes du premier ordre. Et on peut alors démontrer qu'au lieu de la relation (2), on a ici effectivement :

$$(4) \quad f(W_t) - f(W_s) = \int_s^t (f'_i(W_u) dW_u^i + \frac{1}{2} f''_{ii}(W_u) du),$$

l'intégrale au second membre étant une intégrale stochastique au sens de Ito.

On peut d'ailleurs prendre des images encore plus "déformées" du processus de Wiener en intégrant, au lieu de l'équation différentielle stochastique (3), l'équation plus générale :

$$dX_t = a(X_t) dW_t + b(X_t) dt,$$

où  $a : N \times (0, \infty) \rightarrow N \otimes N$  est une matrice symétrique et positive (i.e.  $a_{ij} \geq 0$ ) et où  $b : N \times (0, \infty) \rightarrow N$  est une fonction a priori quelconque,  $a$  jouant le rôle d'un coefficient de diffusion variable et  $b$  celui d'une vitesse de dérive.

Dans le cas où  $a$  et  $b$  sont lipschitziennes (d'ordre 1) on effectue l'intégration de cette équation différentielle par approximations successives à partir de la condition initiale  $X_0$  en posant inductivement ( $k \geq 0$ ) :

$$X_t^{k+1} = X_0 + \int_0^t (a(X_u^k) dW_u + b(X_u^k) du)$$

avec  $X_u^0 = X_0$ , et on établit d'une part l'existence et l'unicité de la limite  $(X_t)_{t \geq 0}$  solution de l'équation intégrale stochastique :

$$X_t = X_0 + \int_0^t (a(X_u) dW_u + b(X_u) du),$$

et d'autre part que le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  ainsi construit est une diffusion telle que :

- (i) les limites suivantes, où  $E(\cdot | X_t = x)$  désigne l'espérance (de la quantité désignée d'un point) sous la condition que  $X_t = x$ , existent et sont finies :

$$\lim_{h \downarrow 0} E \left( \frac{X_{t+h}^i - X_t^i}{h} \mid X_t = x \right) = b_i(t, x)$$

$$\lim_{h \downarrow 0} E \left( \frac{(X_{t+h}^i - X_t^i)(X_{t+h}^j - X_t^j)}{h} \mid X_t = x \right) = a_{ij}^2(t, x)$$

- (ii) il existe  $\varepsilon > 0$  (en l'occurrence  $\varepsilon = 2$ ) tel que :

$$\lim_{h \downarrow 0} E \left( \frac{|X_{t+h} - X_t|^{2+\varepsilon}}{h} \mid X_t = x \right) = 0$$

En se reportant au développement taylorien (1), on se rend alors compte que pour toute fonction  $f : N \times (0, \infty) \rightarrow N$  (indéfiniment) différentiable et bornée on a :

$$\lim_{h \downarrow 0} E \left( \frac{f(X_{t+h}) - f(X_t)}{h} \mid X_t = x \right) = (\partial_t f + b_i f'_i + \frac{1}{2} a_{ij}^2 f''_{ij})(x).$$

En bref, les coefficients  $a$  et  $b$  ci-dessus jouent vis-à-vis du processus de diffusion  $(X_t)_{t \geq 0}$  le même rôle que la dérivée d'une fonction ordinaire. Leur donnée ajoutée à la donnée d'une condition initiale  $X_0$  permet la détermination de  $X_t (t \geq 0)$ , de même que la valeur  $f(t)$  de la fonction  $f$  est donnée par la relation :

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(u) du$$

Pour cette raison, on appellera le couple  $(a, b)$  la dérivée (à droite) de la diffusion  $(X_t)_{t \geq 0}$ .

### 3 - LES FORMES DIFFERENTIELLES FONDAMENTALES.

Si les fonctions  $v_+ = b$  et  $v = \frac{1}{2} a^2$  ci-dessus sont suffisamment régulières, par exemple (indéfiniment) différentiables, on peut montrer que le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  solution de l'équation différentielle stochastique :

$$dX_t = \sqrt{2v} dW_t + v_+ dt,$$

avec  $v : N \times (0, \infty) \rightarrow N \otimes N$  et  $v_+ : N \times (0, \infty) \rightarrow N$ , est encore solution de l'équation différentielle :

$$dX_t = \sqrt{2v} dW_t + v_- dt$$

à la condition d'effectuer l'intégration stochastique vers les temps décroissants et non plus ci-dessus vers les temps croissants. En d'autres termes, le couple  $(v, v_+)$  jouait le rôle de la dérivée à droite, et le couple  $(v, v_-)$  va jouer le rôle de la dérivée à gauche. On a ainsi en particulier :

$$\lim_{h \downarrow 0} E \left( \frac{X_t^i - X_{t-h}^i}{h} \middle| X_t = x \right) = v_-^i(t, x)$$

$$\lim_{h \downarrow 0} E \left( \frac{(X_t^i - X_{t-h}^i)(X_t^j - X_{t-h}^j)}{h} \middle| X_t = x \right) = a_{ij}^2(t, x)$$

les fonctions  $a_{ij}$  étant les mêmes dans les deux cas. Par contre en général  $v_- \neq v_+$ , ces vitesses à gauche et à droite étant liées par la relation :

$$\frac{v_+ - v_-}{2} = \frac{\text{grad}(v\rho)}{\rho}$$

où  $\rho : N \times (0, \infty) \rightarrow R$  est la densité de la probabilité de répartition de la variable aléatoire  $X_t$ , en d'autres termes où  $\rho$  est telle que :

$$\text{Prob. } \{X_t \in dx\} = \rho(t, x) dx.$$

Pour illustrer ce qui précède, prenons par exemple le cas du processus de Wiener, pour lequel ( $v =$ )  $D = 1/2$  et  $v_+ = 0$ . On a alors :

$$\rho(t, x) = \frac{1}{(2\pi t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right)$$

et donc (en introduisant en particulier la notation  $\delta v$ ) :

$$(\delta v) = \frac{v_+ - v_-}{2} = -\frac{x}{2t},$$

c'est-à-dire en fait  $v_- = x/t$ , ce qui est naturel : depuis l'instant initial le processus de Wiener a parcouru un chemin jusqu'en  $x$  et cela dans le temps  $t$ . Mais on constate de plus que la forme différentielle :

$$\omega_1 = \delta v^1 dx_1 + \delta v^2 dx_2 + \delta v^3 dx_3 - E_{\text{osm}} dt,$$

avec (l'énergie osmotique)  $E_{\text{osm}} = \frac{|x|^2 - 3t}{4t^2}$ , est exacte puis-

qu'on a en fait  $\omega_1 = D d(\log \rho)$ . Il en résulte que si on pose encore :

$$v = \frac{v_+ + v_-}{2} (= \frac{x}{2t}),$$

la forme différentielle :

$$\omega_2 (= -\omega_1) = v^1 dx_1 + v^2 dx_2 + v^3 dx_3 - E dt,$$

avec ici  $E = -E_{\text{osm}}$ , est elle aussi exacte. On a donc aussi bien la "formule de guidage"  $v = -v \text{ grad}(\log v\rho)$  qu'en posant maintenant  $v = \frac{\hbar}{2M}$  nous pouvons écrire :

$$Mv = -\text{grad}\left(\frac{\hbar}{2} \log v\rho\right)$$

En conclusion, la continuité du processus de Wiener entraîne l'existence d'une forme différentielle exacte  $\omega_1$  et c'est là un fait général pour tous les processus de diffusion. Par contre, à la particularité que le processus de Wiener soit tel que

$v_+ = 0$  est dû le fait que la forme différentielle  $\omega_2$  est elle aussi exacte, et donc le fait que le processus de Wiener se propage d'une manière compatible avec l'existence de fronts d'onde.

Revenons alors au cas général d'un processus de diffusion, la forme différentielle :

$$\omega_1 = M\delta v^1 dx_1 + M\delta v^2 dx_2 + M\delta v^3 dx_3 - E_{osm} dt$$

avec  $v = \hbar/2M$  et  $E_{osm} = v \operatorname{div} Mv + \langle v, M\delta v \rangle$  est exacte puisqu'en fait  $\omega_1 = \frac{\hbar}{2} d(\log \rho)$ . Si donc nous posons  $\omega_1 = d(hR)$ , on aura encore :

$$\rho = \frac{1}{v} e^{2R}.$$

Par contre, l'existence de fronts d'onde et plus encore la fermeture (et l'exactitude) de la forme différentielle :

$$\omega_2 = Mv^1 dx_1 + Mv^2 dx_2 + Mv^3 dx_3 - E dt$$

où (l'énergie)  $E$  resterait d'ailleurs à déterminer, n'est pas générale. Mais si elle est réalisée, alors en posant  $\omega_2 = d(\hbar S)$  et :

$$\Psi = e^{R+iS},$$

la donnée de la fonction d'onde  $\Psi$  implique la connaissance des fonctions  $R$  et  $S$  qui elle-même implique la connaissance de  $Mv$ ,  $M\delta v$  et  $v$ , et donc en particulier de la dérivée à droite  $(v, v_+)$  de la diffusion ainsi que sa probabilité de répartition initiale (attention, la connaissance de la probabilité de répartition à chaque instant ne suffit pas à déterminer la diffusion, penser à l'hypothèse du "starting afresh") : en d'autres termes, la donnée de la fonction d'onde  $\Psi$  détermine entièrement la diffusion.

C'est le cas en particulier lorsque  $\Psi$  est solution de l'équation de Schrödinger. Le coefficient de diffusion  $v = \hbar/2M$  est alors constant (i.e., la masse est constante) et l'énergie est alors :

$$E = \frac{M}{2} (\langle v, v \rangle - \langle \delta v, \delta v \rangle) - \frac{\hbar}{2M} \operatorname{div}(M\delta v).$$

On peut vérifier sur des exemples que dans ce cas on n'a plus  $v_+ = 0$ , en d'autres termes la propriété du "starting afresh" est ici très modifiée et réduite seulement à la "propriété de Markov", ici la diffusion définie par la fonction d'onde  $\Psi$  est assemblée en un tout cohérent, exactement comme



dans l'expérience des frangés d'Young.

#### 4 - LE MOUVEMENT BROWIEN RELATIVISTE.

Pour définir le mouvement brownien relativiste, nous abandonnons du processus de Wiener ses propriétés quantitatives mais nous en transposons ses propriétés géométriques. Dans ces conditions le mouvement brownien relativiste se propagera dans l'espace de Minkowski de sorte que :

(i) localement il soit un processus de Wiener, plus précisément sera solution de  $dX_t = ad W_t + v_+ dt$  avec  $X_t = (ic T_t, X_t^j)$  où  $j = 1, 2, 3$ , mais son coefficient de diffusion  $v = \hbar/2M$  sera non plus constant, mais variable, croissant avec le temps dans un mouvement libre, et d'expression la plus simple possible.

(ii) globalement il présente des fronts d'onde.

L'existence des fronts d'onde est vraisemblablement due au fait qu'elle est assurée localement comme dans le processus de Wiener, mais que par usure d'une sorte de turbulence elle s'établit peu à peu globalement. Le fait également que l'expression de la masse soit la plus simple possible traduit l'usure de ce processus. Enfin la croissance (ou plutôt la non-décroissance) du coefficient de diffusion dans un mouvement libre traduit la croissance de l'entropie, le coefficient de diffusion exprimant l'ordre de grandeur du volume occupé localement par le processus.

Il reste encore deux hypothèses à faire. Soit  $X_t = (ic T_t, X_t^j)$  avec  $j = 1, 2, 3$  la position spatio-temporelle aléatoire du mouvement brownien relativiste. Désignant par  $(q_0 = ict, q_j)$  avec  $j = 1, 2, 3$  les coordonnées d'un point dans l'espace de Minkowski, nous sommes a priori confrontés à deux temps, le paramètre temporel du processus dans  $X_t$  et le temps de l'espace de Minkowski dans  $ict$ . La diffusion s'effectuant dans l'espace-temps, nous imposons d'abord par cohérence avec nos horloges "macroscopiques" que la vitesse temporelle de  $X_t$  (c'est-à-dire la vitesse de  $ic T_t$ ) soit telle que :

$$v^0 = \frac{v_+^0 + v_-^0}{2} = ic,$$

de sorte que la vitesse moyenne de  $T_t$  soit égale à 1. Et de plus nous supposons que toutes les observables (masse  $M$ , moment  $Mv$ , etc...) "factorisent" à travers les coordonnées de l'espace de Minkowski, en d'autres termes soient uniquement fonctions de

( $q_0 = ict, q_j$ ) mais non du paramètre temporel.

L'hypothèse  $v^0 = ic$  et celle de cette factorisation rendent alors inutile l'introduction du paramètre temporel et cette distinction entre les deux temps. Donnons-en un exemple simple, supposons que l'on veuille dériver la masse  $M$  par rapport au paramètre temporel noté ici  $t'$ . On a donc seulement :

$$(5) \quad \frac{dM}{dt'} = \langle \text{grad } M, v \rangle_M$$

où  $\langle, \rangle_M$  désigne le produit scalaire dans l'espace de Minkowski, avec d'ailleurs  $v^0 = ic$  de sorte que si le paramètre temporel  $t'$  figure dans le membre de gauche de la relation (5), par contre il est totalement absent dans le membre de droite.

On peut alors démontrer que la fonction d'onde, "factorisée" à travers les coordonnées ( $q_0 = ict, q_j$ ),  $\Psi (= e^{R+iS}) : M \rightarrow C$  (i.e. définie sur l'espace de Minkowski, à valeurs dans le corps des complexes) déterminant le mouvement brownien relativiste défini ci-dessus est nécessairement solution de l'équation de Klein-Gordon. On a :

$$\omega_1 = d\hbar R = \langle M \delta v^j, dq_j \rangle_N + M \delta v^0 \cdot icdt$$

$$\omega_2 = d\hbar S = \langle M v^j, dq_j \rangle_N + M v^0 \cdot icdt,$$

ces deux formes différentielles étant exactes l'une par continuité du processus et l'autre par l'existence des fronts d'onde. Les équations du mouvement sont alors nécessairement :

$$\frac{d Mv}{dt} = \frac{1}{2M} \text{grad} \langle Mv, Mv \rangle_M$$

et l'expression de la masse satisfaisant aux conditions (i) est alors :

$$M = M_0 / \sqrt{1 - \beta^2} \quad \text{avec } \beta^j = \frac{v^j}{c} \quad \text{et}$$

$$M_0 c = \sqrt{m_0^2 c^2 - \hbar^2 \frac{\square e^R}{e^R}}$$

où  $m_0 > 0$  est une constante et  $\square$  désigne le d'alambertien.

Naturellement, cette factorisation de  $\Psi$  à travers les coordonnées de l'espace de Minkowski et la condition  $v^0 = ic$  qui la complète entraînent que la signification probabiliste du carré  $|\Psi|^2$  du module de la fonction d'onde est ici un peu différente du cas où l'on aurait gardé le paramètre temporel en procédant alors comme pour les équations d'ondes non-relativistes. On a en fait

encore  $\rho = \frac{1}{v} |\Psi|^2$  mais avec ici :

$$\rho(ict, q^j) dq^j = \text{Prob.}\{X_t^j \in dq^j | T_t = t\} = \text{Prob.}\{X_s^j \in dq^j | T_s = t\}$$

où l'on pose encore  $X_t = (icT_t, X^j)$ . En d'autres termes, la probabilité de répartition spatio-temporelle n'est pas directement donnée, mais seulement la probabilité de répartition spatiale de  $X_s^j$  sous la condition que la composante temporelle  $T_s$  soit égale à  $t$ , ce qui est naturel et traduit une situation ergodique dans laquelle la masse propre  $m_0$  apparaît effectivement constante.

Evidemment, on peut perturber la masse propre constante  $m_0$ , soit explicitement pour exprimer une "variation d'indice" du milieu de propagation, ou même implicitement par un terme fonction de la fonction d'onde pour exprimer une réaction du processus sur lui-même (équations d'onde non linéaires). On peut introduire ainsi des hamiltoniens non quadratiques, les hamiltoniens quadratiques apparaissant ainsi les plus naturels, mais surtout on peut mettre en défaut la relation classique de commutation  $(p, q) = i\hbar$ . Plus précisément, à l'observable moment  $Mv$  on peut faire toujours correspondre l'opérateur  $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q}$ , mais éventuellement d'autres selon le rôle joué par cette observable, de sorte que l'axiomatique classique de la Mécanique quantique n'est ici qu'une approximation simplificatrice. En effet, perturbons la masse  $m_0$  par le terme  $U : M \rightarrow R$  de sorte que maintenant on ait :

$$M_0^2 c^2 = m_0^2 c^2 - U - \frac{\square e^R}{e^R}$$

Si les équations du mouvement sont maintenant (en introduisant en plus le potentiel  $A = (ic^{-1} V, A^j)$ ) :

$$\frac{d}{dt} (Mv + A) = \frac{1}{2M} \text{grad} \langle Mv, Mv \rangle_M + \langle v, \text{grad} A \rangle_M$$

alors l'équation d'onde correspondante est :

$$(i\hbar\partial + A)(i\hbar\partial + A)\Psi + (m_0^2 c^2 - U)\Psi = 0$$

et la relation énergétique classique associée à cette équation d'onde est :

$$\langle p - A, p - A \rangle_M + m_0^2 c^2 - U = 0,$$

elle n'est donc plus effectivement nécessairement quadratique. Le terme de perturbation U peut être explicite, mais on peut aussi bien prendre par exemple  $U = \pm |\Psi|^2$ , ou plus généralement toute expression réelle pour conserver l'équation de continuité (éventuellement complexe si on se contente d'une approximation afin de simplifier l'équation d'onde), par exemple faisant intervenir des opérateurs différentiels d'ordre quelconque, la relation de commutation  $(q, p) = i\hbar$ , toujours valable si on considère p au niveau de la forme quadratique  $\langle p - A, p - A \rangle_M$ , pouvant cesser d'être vraie au niveau du terme de perturbation.

## 5 - CLASSIFICATION DES EQUATIONS D'ONDE.

Nous venons de dire que les hamiltoniens quadratiques étaient les plus naturels parce qu'ils correspondent aux diffusions les moins perturbées. Voici une classification des principaux hamiltoniens quadratiques, ils impliquent des produits scalaires sur des groupes de Lie : N, M, SU (2), SL (2, C), etc ... où N est le groupe des translations dans l'espace euclidien (i.e. l'espace euclidien lui-même) à trois dimensions, M l'espace de Minkowski, SU (2) le (revêtement universel du) groupe des rotations dans l'espace euclidien N, et SL (2, C) le (revêtement universel du) groupe des rotations dans l'espace de Minkowski M. La correspondance entre groupes et équations d'onde est alors la suivante :

N	Schrödinger
N x SU (2)	Pauli
M	Klein-Gordon
M x SL (2,C)	Dirac
M x SL (2,C) x SL (2,C)	Maxwell (avec masse)

Chacun de ces produits scalaires peut être "translaté" par un champ extérieur. Par exemple le hamiltonien  $H = \frac{1}{2m} \langle p, p \rangle_N$  correspondant à l'équation de Schrödinger peut être translaté en  $H - V = \frac{1}{2m} \langle p - A, p - A \rangle_N$  avec d'ailleurs eV au lieu de V et  $\frac{e}{c} A$  au lieu de A dans le cas de l'électron. Par exemple encore, la relation énergétique  $\langle p, p \rangle_M + m_0^2 c^2 = 0$  avec  $p = Mv$  associée à l'équation de Klein-Gordon se translate en  $\langle p - A, p - A \rangle_M + m_0^2 c^2 = 0$  avec ici  $p = Mv + A$ . L'équation d'onde correspondante sera dite elle-même translatée. Voici alors comment on doit préciser le tableau précédent :

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2m} \langle p, p \rangle_N && \text{Schrödinger} \\
H-V &= \frac{1}{2m} \langle p-A, p-A \rangle_N && \text{Schröd. transl.} \\
H-eV &= \frac{1}{2m} \langle p - \frac{e}{c} A \rangle_N^2 + \frac{1}{2I} \langle s - \frac{I}{C} H \rangle_{SU}^2 && \text{Pauli} \\
\langle p, p \rangle_M + m_0^2 c^2 &= 0 && \text{Klein-Gordon} \\
\langle p-A, p-A \rangle_M + m_0^2 c^2 &= 0 && \text{K.G. transl.} \\
\langle p, p \rangle_M + \langle s, s \rangle_{SL} + m_0^2 c^2 &= 0 && \text{Dirac} \\
\langle p - \frac{e}{c} A \rangle_M^2 + \langle s - \frac{e}{c} F \rangle_{SL}^2 - \frac{e^2}{c^2} \langle F \rangle_{SL}^2 + m_0^2 c^2 &= 0 && \text{Dirac transl.}
\end{aligned}$$

où  $\langle \rangle^2$  est écrit abrégativement pour  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Il reste à préciser un point en ce qui concerne les équations spinorielles (Pauli et Dirac). La fonction d'onde  $\Psi$  déterminant une diffusion sur  $N \times SU(2)$  avec rotation stationnaire se met sous la forme :

$$\Psi = \Psi_+ \otimes e_+ + \Psi_- \otimes e_-$$

où  $\Psi_+, \Psi_- : N \rightarrow \mathbb{C}$  et  $e_+, e_- : SU(2) \rightarrow \mathbb{C}$  (séparation des variables). C'est le spineur  $\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_+ \\ \Psi_- \end{pmatrix}$  qui est alors solution de l'équation spinorielle de Pauli. Semblablement, la fonction d'onde déterminant une diffusion sur  $M \times SL(2, \mathbb{C})$  avec rotation stationnaire se met sous la forme :

$$\Psi = \Psi_{++} \otimes e_{++} + \Psi_{+-} \otimes e_{+-} + \Psi_{-+} \otimes e_{-+} + \Psi_{--} \otimes e_{--}$$

où  $\Psi_{++} : M \rightarrow \mathbb{C}$  et  $e_{++} : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$  (séparation des variables) et c'est le spineur :

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_{++} \\ \Psi_{+-} \\ \Psi_{-+} \\ \Psi_{--} \end{pmatrix}$$

qui est solution de l'équation de Dirac.

6 - PRINCIPE DE CORRESPONDANCE.

Lorsqu'on fait tendre la constante  $\hbar$  vers 0, on peut démontrer que l'équation d'onde tend vers l'équation de Hamilton-Jacobi correspondante. Par exemple l'équation de Schrödinger :

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + V,$$

qui en posant  $\Psi = \sqrt{\rho} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S\right)$  devient en séparant la partie réelle de la partie imaginaire :

$$(6) \quad \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \sqrt{\rho} + \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} (\text{grad } S)^2 + V = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \left( \rho \cdot \frac{1}{m} \text{grad } S \right) = 0$$

se réduit lorsque  $\hbar \downarrow 0$  aux deux équations :

$$(7) \quad \frac{\partial S}{\partial t} + H(x, \text{grad } S) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \left( \rho \cdot \frac{1}{m} \text{grad } S \right) = 0$$

avec  $H(x, p) = \frac{|p|^2}{2m} + V(x)$ . Supposons que de plus le système

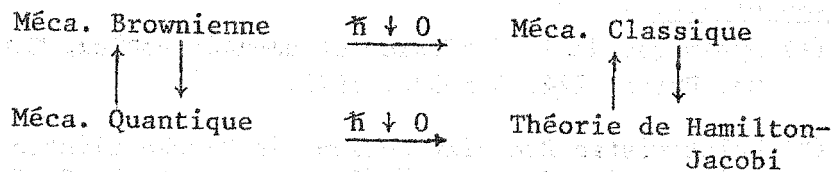
(7) ait une solution unique. Alors il résulte d'un théorème maintenant classique (dû à Y. Prohorov) sur la convergence des mesures sur l'espace des trajectoires continues que la diffusion (i.e. le mouvement brownien) associée à l'équation de Schrödinger converge vers le processus régi par le système (7). C'est là un fait général, sauf dans des cas pathologiques (croisement de trajectoires au même instant, choc) on trouve lorsque  $\hbar \downarrow 0$  un processus régi par une équation de Hamilton-Jacobi.

En théorie de Hamilton-Jacobi, toutes les observables factorisent à travers les coordonnées du groupe de Lie (N, M, etc...) dans lequel s'effectue le mouvement. Si on "défactorise" les équations du mouvement (qui deviennent ainsi implicites au lieu d'être explicites) on trouve alors les équations de Hamilton et, perdant les fronts d'onde, on identifie la limite de la forme différentielle  $\omega_2$  à la forme de Poincaré-Cartan qui n'est plus exacte mais seulement invariante en ce sens que :

$$\int \omega_2 = \int \omega_2$$

où  $\partial S_1$  et  $\partial S_2$  sont les courbes frontières de deux sections quelconques  $S_1$  et  $S_2$  d'un tube dans l'espace temps dont les génératrices sont des trajectoires du mouvement.

On peut de même défactoriser les équations du mouvement brownien relativiste, la forme  $\omega_2$  n'est alors plus exacte mais seulement invariante au sens ci-dessus (les trajectoires étant définies par le champ des vitesses  $v = \frac{v_+ + v_-}{2}$ ) et on définit ainsi une Mécanique Brownienne, le principe de correspondance étant maintenant :



### 7 - CONCLUSION.

Le formalisme précédent, exposé techniquement dans (2) après avoir été présenté dans des Notes aux Comptes Rendus, retrouve les relations fondamentales de la thermodynamique cachée des particules et s'adapte d'ailleurs immédiatement à des ondes pour lesquelles la masse de probabilité est infinie (ondes monochromatiques, et à singularité). Pour comprendre ce dernier point, il suffit de réaliser qu'on peut construire un processus sur la droite réelle dont la probabilité de répartition initiale est la mesure de Lebesgue (répartition initiale uniforme) et qui évolue à partir de sa position initiale comme un processus de Wiener. Le mouvement brownien relativiste décrit la propagation des ébranlements (comparer avec la théorie des séismes) mais si cette propagation est très perturbée, la relation de commutation  $(q, p) = i\hbar$  peut être mise en défaut. Comme il y a fort à parier que la Nature assujettisse son comportement davantage à une loi des grands nombres (le théorème de Laplace) qu'à une relation de commutation, à savoir  $(q, p) = i\hbar$ , celle-ci si importante qu'elle soit n'est pas nécessairement fondamentale. L'état quantifié n'est d'ailleurs lui-même qu'un état de haute probabilité, ne pouvant pas faire oublier l'existence très vraisemblable d'états transitoires sans fronts d'onde.

## BIBLIOGRAPHIE

BROGLIE L. de :

- (<sup>1</sup>) "Recherches sur la Théorie des Quanta". Thèse, Paris, 1924; Ann. Phys. 3, 22-128, 1925.
- (<sup>2</sup>) "Thermodynamique de la Particule Isolée ou Thermodynamique Cachée des Particules". Gauthier-Villars, Paris, 1966.

CAUBET J.P. :

- (<sup>1</sup>) Dynamique de la diffusion et quantification, C.R. Acad. Sc. Paris, 274, 335-338; 1972.
- (<sup>2</sup>) Relativistic Brownian Motion, in "Probabilistic Methods in Differential Equations" (Proceedings of the Conference Held at the Univ. of Victoria), lecture Notes in Mathematics, 451, 113-142, Springer, Berlin, 1974.
- (<sup>3</sup>) Mouvement brownien spatio-temporel non isotrope, C.R. Acad. Sc. Paris, 280, 303-306, 1975. Sur l'équation de Dirac avec termes de potentiel, C.R. Acad. Sc. Paris, 280, 479-482, 1975. Construction des diffusions markoviennes spatio-temporelles, 280, 817-820, 1975.

EINSTEIN A. :

- (<sup>1</sup>) "Investigations on the theory brownian movement", Dover Publications, 1926.

FENYES I. :

- (<sup>1</sup>) Eine Wahrscheinlichkeitstheoretische Begründung und Interpretation der Quantenmechanik, Zeitschrift für Physik, 132, 81-106, 1952.

ITO K. :

- (<sup>1</sup>) Stochastic Integral, Proc. Imperial Acad. Tokyo 20, 519-524, 1944.
- (<sup>2</sup>) On Stochastic Differential Equations, Mem. Amer. Math. Soc., 4, 1961.

NELSON E. :

- (<sup>1</sup>) Derivation of the Schrödinger equation from Newtonian mechanics, Physical Review, 150, 1966.



(<sup>2</sup>) Dynamical Theories of Brownian Motion, Princeton University Press, Princeton, 1967.

PALEY R., WIENER N., and ZYGMUND A. :

(<sup>1</sup>) Note on Random Functions, Math Z., 37, 647-668, 1933.

WIENER N. :

(<sup>1</sup>) Differential Space, J. Math. and Phys. 2, 132-174, 1923.

Université de Poitiers,  
40, Avenue du Recteur Pineau,  
86022 - POITIERS (France)