

# IRRÉVERSIBILITÉ ET MÉCANIQUE HÉRÉDITAIRE

## EN PHYSIQUE QUANTIQUE

par MM. Daniel FARGUE et Francis FER

(manuscrit reçu le 8 Décembre 1975)

*RESUME.* Analyser en profondeur les phénomènes transitoires et essayer de comprendre leur caractère fondamentalement irréversible est, nous semble-t-il, un des problèmes qui méritent le plus actuellement l'attention des physiciens. C'est cette idée qui guide l'étude de l'évolution d'un milieu matériel étendu et chargé, présentée ci-dessous. La forme précise adoptée correspond à un corpuscule obéissant à une équation généralisant celle de Schrödinger. Débordant le cadre des mouvements stationnaires, elle permet d'aborder le problème des transitions quantiques; le phénomène physique essentiel est alors l'action retardée du champ électromagnétique qui entraîne leur irréversibilité et confère au mouvement un caractère héréditaire.

Il nous a semblé préférable, par souci de clarté, de déroger au mode traditionnel de rédaction et de commencer cet article par l'exposé de l'armature mathématique de la théorie; c'est la meilleure façon, pensons-nous, de circonscrire le sujet et d'en cerner l'axiomatique et l'essentiel des enchaînements. Il sera alors plus facile au lecteur de suivre, dans la deuxième partie, la discussion des idées physiques qui ont inspiré cette axiomatique et celles qui se relient à ses développements. Dans une troisième partie enfin nous examinerons quelques conséquences que l'on peut tirer de ce formalisme.

### I - EQUATIONS FONDAMENTALES.

1. Hypothèses. Considérons un milieu continu et déformable, que pour abrégé nous appellerons fluide, supposé chargé de manière à pouvoir décrire la structure interne d'une particule chargée, non relativiste et sans spin, par exemple un électron dont on néglige le spin. Diverses extensions possibles seront signalées au § 5.

En variables de Lagrange,  $a^j$ , d'élément de volume  $d^3a$ , le fluide est caractérisé par sa densité de masse  $v(a^j)$ , donnée une fois pour toutes, et telle que  $dm = v d^3a$ ; son mouvement est déterminé par les fonctions  $x^i(a^j, t)$  définissant la position de chacun de ses points au cours du temps. Nous aurons également besoin des variations de ce mouvement, qui sont  $\delta x^i(a^j, t)$  et, plus généralement,  $\delta\phi$  pour toute fonction  $\phi$  définie sur le fluide. Ces variations sont effectuées à élément de matière fixe, c'est-à-dire à  $a^j$  constants.

Bien qu'utile sur le plan des définitions, la représentation en variables de Lagrange est moins commode que celle en variables d'Euler que nous utiliserons le plus souvent. Dans ce cas, le fluide est défini par sa densité de masse  $\mu(x^j, t)$  telle que  $dm = \mu d\bar{\omega}$ ,  $\vec{x}$  point de l'espace physique,  $d\bar{\omega}$  élément de volume, et par le champ des vitesses  $\vec{v}(\vec{x}, t)$ . Posant  $m = \int \mu d\bar{\omega}$ , nous supposons que la densité de charge est  $\rho(\vec{x}, t) = \frac{e}{m} \mu(\vec{x}, t)$ . Nous noterons  $\partial$  la variation à  $x^j$  constants d'une grandeur quelconque (on a  $\delta = \partial + \delta x^i \partial/\partial x^j$ ), et  $d/dt$  la dérivée fluide  $\partial/\partial t + v^j \partial/\partial x^j$ .

Le champ électromagnétique interne, créé par le fluide chargé, est défini par ses potentiels  $V(\vec{x}, t)$  et  $\vec{A}(\vec{x}, t)$  tels que :

$$\vec{D} = \vec{E} = - \text{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} = \text{rot} \vec{A}$$

Nous considèrerons en outre un champ externe donné, de potentiels  $\phi$  et  $\vec{\alpha}$ , et de champs  $\vec{\epsilon}$ ,  $\vec{\beta}$ .

Outre les forces électromagnétiques internes et externes, le fluide est soumis à deux types de forces particulières, s'exerçant entre ses différentes parties :

- une densité de force  $\mu \overrightarrow{\text{grad}} Q$  contenant la constante de Planck  $h$ ,  $Q$  étant le potentiel quantique de M.L. de BROGLIE (1) :

$$(1) \quad Q = \frac{\hbar^2}{2m^2} \frac{\Delta\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}}$$

(on peut remarquer que cette densité de force se déduit éga-

lement d'un tenseur des contraintes  $T_{ij} = \frac{\hbar^2}{2m^2} \mu \partial_i \partial_j \log \sqrt{\mu}$

- une densité de force  $-\mu \overrightarrow{\text{grad}} G$ , attractive et indispensable pour empêcher l'éclatement du corpuscule sous l'action des forces électro-statiques (<sup>2</sup>); en première hypothèse, nous la prenons centrale et dérivant une loi de distance  $g(r)$  par la formule :

$$(2) \quad G(\vec{x}, t) = \int \mu(\vec{\xi}, t) g(|\vec{x} - \vec{\xi}|) d^3\xi$$

2. Evolution. Les équations d'évolution sont composées de l'équation de conservation de la masse (3), de l'équation (4) de la dynamique écrite pour le fluide dans les champs de force précédents, et des équations de Maxwell-Ampère pour le champ électromagnétique interne (5) :

$$(3) \quad \frac{d\mu}{dt} + \mu \text{div } \vec{v} = 0$$

$$(4) \quad \mu \frac{d\vec{v}}{dt} = \mu \overrightarrow{\text{grad}} Q - \mu \overrightarrow{\text{grad}} G + \mu(\vec{E} + \vec{\epsilon}) + \rho \vec{v} \wedge (\vec{B} + \vec{\beta})$$

$$(5) \quad \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\rho \vec{v} + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{H}, \quad \text{div } \vec{D} = \rho$$

(les équations de Maxwell-Faraday étant automatiquement satisfaites puisque les champs internes sont définis à partir de leurs potentiels).

3. Mouvements irrotationnels et équation d'onde. Supposons que le mouvement dérive d'un potentiel des vitesses  $S$  par l'expression :

$$(6) \quad \vec{v} + \frac{e}{m} (\vec{A} + \vec{\alpha}) = \overrightarrow{\text{grad}} S$$

On peut montrer que si cette propriété est vraie à un moment donné, elle le reste à tout instant. Nous appellerons de tels mouvements "irrotationnels", généralisant la notion correspondante de l'hydrodynamique. L'équation de continuité (3) et l'équation de la dynamique (4) peuvent alors se déduire des deux équations suivantes :

$$(7) \quad \frac{\partial \mu}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} \mu \cdot (\overrightarrow{\text{grad}} S - \frac{e}{m} (\vec{A} + \vec{\alpha})) + \mu (\Delta S - \frac{e}{m} \text{div} (\vec{A} + \vec{\alpha})) = 0$$

$$(8) \quad \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} (\overrightarrow{\text{grad}} S - \frac{e}{m} (\vec{A} + \vec{\alpha}))^2 + \frac{e}{m} (V + \phi) + G - Q = 0$$

La dernière est dite équation de Jacobi (cf. (1)) parce que, si l'on omet les termes  $\vec{A}$ ,  $V$ ,  $G$ , elle se réduit à l'équation d'Hamilton-Jacobi d'un point matériel à l'approximation de l'optique géométrique.

Posons alors, par définition de la fonction d'onde :

$$(9) \quad u = \sqrt{\mu} e^{\frac{im}{\hbar} S}$$

on a, inversement :

$$(10) \quad \mu = uu^*, \quad \mu \overrightarrow{\text{grad}} S = \frac{i\hbar}{2m} (u \overrightarrow{\text{grad}} u^* - u^* \overrightarrow{\text{grad}} u)$$

formules que l'on interprète habituellement comme définissant la "densité de probabilité de présence" et le "courant de probabilité". Par le procédé de Madelung (3), on peut regrouper (7) et (8) en une seule équation d'onde, soit :

$$(11) \quad i\hbar \partial_t u = L(u) \cdot u, \text{ avec}$$

$$(12) \quad L(u) = \frac{1}{2m} \left( i\hbar \overrightarrow{\text{grad}} + e(\vec{A} + \vec{\alpha}) \right)^2 + e\phi + (eV + mG)$$

$L$  est bien fonction de  $u$  car  $y$  figurent les potentiels électromagnétiques internes  $\vec{A}$ ,  $V$  et le potentiel de cohésion  $G$  définis respectivement par :

$$(13) \quad \begin{aligned} \square V &= -\frac{e}{\epsilon_0 m} uu^* \\ \square \vec{A} - \mu_0 \frac{e^2}{m^2} \vec{A} uu^* &= -\mu_0 \frac{ie\hbar}{2m^2} (u \overrightarrow{\text{grad}} u^* - u^* \overrightarrow{\text{grad}} u) \\ &\quad + \mu_0 \frac{e^2}{m^2} \vec{\alpha} u u^* \end{aligned}$$

et par (2) en tenant compte de (10).

Le nouvel ensemble d'équations d'évolution, (11) et (12), représente la forme "ondulatoire" de la mécanique de l'électron proposée ici. Il est immédiat de voir que, malgré ses ressemblances avec l'équation de Schrödinger, à laquelle elle se réduit dans certains cas, (voir § 9), (11) n'est pas linéaire à cause des actions internes données par (13) et (2). On sait (voir (1) et (4)) que cette non-linéarité est indispensable à toute description de la microphysique qui ne se borne pas à constater l'existence d'états stationnaires quantifiés.

4. Hamiltoniens et mécanique héréditaire. Revenons pour un instant aux variables de Lagrange. Pour décrire le fluide, on doit prendre comme variables de configuration la position  $\vec{x}^i(\vec{a}^j, t)$  de chacun de ses points, son mouvement étant donné par les variables conjuguées (moments)  $\vec{p}_i(\vec{a}, t) = \mu \vec{v}_i + \frac{e}{m} \nabla(A_i + \alpha)$  ou en variables d'Euler  $\vec{p}(\vec{x}, t) = \mu \vec{v} + \rho(\vec{A} + \vec{\alpha})$ . En ce qui concerne le champ électromagnétique interne, il faut prendre  $V(\vec{x}, t)$ ,  $\vec{A}(\vec{x}, t)$  pour la configuration, et  $-\vec{D}(\vec{x}, t)$  comme moment conjugué de  $\vec{A}$ ,  $V$  n'en ayant pas. Les variations correspondantes seront  $\delta\vec{x}(\vec{a}, t)$ ,  $\delta\vec{p}(\vec{a}, t)$ , que l'on peut aussi écrire en variables d'Euler, ce que nous ferons désormais,  $\delta\vec{x}(\vec{x}, t)$ ,  $\delta\vec{p}(\vec{x}, t)$  pour le fluide et  $\delta V(\vec{x}, t)$ ,  $\delta\vec{A}(\vec{x}, t)$ ,  $-\delta\vec{D}(\vec{x}, t)$  pour le champ.

Les équations (4) et (5) se mettent alors sous forme hamiltonienne car on peut les déduire du principe variationnel (voir (5)) :

$$(14) \quad \delta H = \int \left( \partial(p_i d\vec{\omega}) v^i - \frac{d(p_i d\vec{\omega})}{dt} \partial x^i \right) + \int \left( -\partial D_i \frac{\partial A^i}{\partial t} + \frac{\partial D^i}{\partial t} \partial A^i \right) d\vec{\omega}$$

où  $d\vec{\omega}$  est un élément de volume du fluide; l'hamiltonien est :

$$(15) \quad H = \int \left( \mu \frac{v^2}{2} - \mu Q + \frac{1}{2} \mu G \right) d\vec{\omega} + \int \rho (V + \phi) d\vec{\omega} + \int \left( \frac{\vec{D}^2}{2\epsilon_0} + \frac{(\text{rot } \vec{A})^2}{2\mu_0} + \vec{D} \cdot \text{grad } V \right) d\vec{\omega},$$

dont la valeur est l'énergie  $W$  du système fluide et champ :

$$(16) \quad W = \int \left( \mu \frac{v^2}{2} - \mu Q + \frac{1}{2} \mu G \right) d\vec{\omega} + \int \rho \phi d\vec{\omega} + \int \frac{\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2}{2} d\vec{\omega}$$

Mais ce formalisme variationnel n'est possible que si l'on considère  $V$  et  $\vec{A}$  comme les variables indépendantes de configuration du champ interne, au même titre que  $\vec{x}(\vec{a})$  pour le fluide. Si on restreint le système étudié à la matière seule, l'hamiltonien (15) n'étant pas décomposable, l'évolution des variables  $\vec{x}(\vec{a}, t)$  et  $\vec{p}(\vec{a}, t)$  seules n'est pas hamiltonienne. Elle n'est même plus purement différentielle mais héréditaire : en effet, l'équation (11) devient intégro-différentielle si on l'écrit

en n'introduisant comme inconnue que la seule fonction d'onde car il faut alors résoudre les équations (13) par les formules des potentiels retardés.

Une autre manière d'étudier ce problème est d'introduire la forme différentiel extérieure de degré 2 :

$$(17) \quad \omega = \int \delta (p_i d\bar{\omega}) \wedge \delta x^i - \int \partial D_i \wedge \partial A^i d\bar{\omega}$$

dont on montre (voir <sup>(5)</sup>) qu'elle est invariante par les équations d'évolution (4) et (5). Là encore, le couplage entre la matière et le champ entraîne que chacun des termes de (17) n'est pas invariant séparément, ce qui interdit à chacun des composants du système d'avoir séparément une évolution hamiltonienne (car on sait que, localement au moins, l'existence d'une 2-forme invariante est équivalente à celle d'un hamiltonien, cf <sup>(6)</sup>).

Cette conclusion n'est cependant vraie que si l'on s'intéresse à la totalité des mouvements du système. La classe des mouvements permanents dans un champ externe statique, où l'on a  $\partial_t \vec{v} = \partial_t \mu = 0$  et  $\partial_t \vec{A} = \partial_t V = \partial_t \vec{D} = 0$ , a des propriétés différentes : le deuxième terme de (17) est dans ce cas invariant, donc le premier aussi. Le mouvement de la matière est hamiltonien et l'on montre que l'on peut prendre (cf <sup>(2)</sup>) :

$$(18) \quad H_0 = \int \left[ \mu \left( \frac{v^2}{2} + \frac{G}{2} - Q \right) + \rho \phi + \frac{1}{2} \rho (V + \vec{v} \cdot \vec{A}) \right] d\bar{\omega}$$

5. Généralisations. Le cas étudié jusqu'ici est celui d'une particule sans spin, à l'approximation newtonienne. On peut s'affranchir de l'hypothèse que le mouvement est non relativiste, c'est-à-dire généraliser l'équation de Klein-Gordon comme nous avons généralisé celle de Schrödinger <sup>(7)</sup>. Les conclusions sont similaires, à la seule différence que l'équation de Klein-Gordon étant relativiste, le phénomène de retard des potentiels (dû à l'existence d'un d'Alembertien dans les équations) qui se manifestait ci-dessus par l'intermédiaire des champs électromagnétiques, joue alors même pour une particule neutre. Ceci fait que son mouvement est héréditaire si l'on n'introduit pas comme nouvelle grandeur indépendante un "champ quantique" généralisant le potentiel quantique Q.

En restant en mécanique newtonienne, une extension aux particules à spin est possible. En partant de l'équation de Bopp et Haag <sup>(8)</sup> on peut trouver <sup>(9)</sup> un fluide, assez particulier, qui obéit à cette équation, et généraliser l'action du champ électromagnétique interne à ce cas. Pour l'essentiel, les conclusions physiques générales que l'on peut en tirer sont les mêmes que dans le cas de l'équation de Schrödinger à laquelle nous nous limiterons désormais pour simplifier l'exposé.

## II - INTERPRETATION PHYSIQUE.

6. Retard des potentiels, hérédité et irréversibilité. On aura remarqué que nous avons inclus dans les forces s'exerçant sur la particule celles dues à son propre champ électromagnétique interne. Savoir s'il faut en tenir compte ou non est une question qui a été très controversée et remonte aux origines mêmes de la théorie quantique. En effet, l'un des motifs de Bohr pour superposer le principe des quantas à la dynamique que l'on connaissait déjà, était l'incompatibilité d'orbites stationnaires avec la force de freinage de Lorentz qui tend à faire spiraler l'électron jusqu'à écrasement sur l'atome. Mais le calcul de Lorentz (voir <sup>(10)</sup>) ainsi que la discussion de l'équation de Lorentz dans <sup>(11)</sup>) repose essentiellement sur l'hypothèse d'un électron solide, hypothèse absente ici, ce qui permet de généraliser le point de vue de Lorentz à la mécanique ondulatoire.

La même question apparaît, dès 1927, dans les écrits de Schrödinger <sup>(12)</sup>, à propos du calcul du rayonnement. Sa réponse est négative : pour lui, le champ électromagnétique interne ne devait servir qu'à calculer le rayonnement émis par l'électron, à partir d'un mouvement déjà déterminé par la seule équation d'onde sans champs internes. Ceci pour la raison que dans le cas contraire, le calcul des niveaux d'énergie donne des résultats inexacts. Nous verrons plus bas, (§ 9) comment on peut éviter cette difficulté.

Pour rendre compte de l'émission spontanée il a néanmoins fallu réintroduire l'autoaction dans la théorie quantique du rayonnement. Les équations qui y sont utilisées sont assez proches de celles du § 3, du moins tant que l'on n'introduit pas la seconde quantification, dont l'utilité ne paraît d'ailleurs pas absolument certaine (voir par exemple <sup>(13)</sup>). Cependant le problème qui avait arrêté Schrödinger subsiste, et même s'aggrave après la seconde quantification, puisque l'énergie supplémentaire venant de l'action du champ créé par l'électron sur lui-même devient non seulement source de désaccord avec l'expérience mais même infinie ! On use alors d'un expédient en supposant que l'électron "ne voit pas son propre champ coulombien" (longitudinal dit-on souvent), sans autre explication.

Nous voyons la solution de ce problème dans l'action, à l'intérieur du fluide constituant un électron, des forces de cohésion de Poincaré <sup>(14)</sup>, compensant l'action des forces électrostatiques qui tendent à faire éclater l'électron. On sait d'ailleurs que l'on a été amené depuis longtemps à ajouter d'autres forces à celles de l'électromagnétisme et de la gravitation afin d'expliquer les propriétés de la matière, par exemple la cohésion

du noyau. L'énergie  $\int \frac{1}{2} \mu G d\omega$  compenserait ainsi l'énergie coulombienne d'autoaction, ce qui lève l'objection de Schrödinger et supprime les problèmes de renormalisation de la théorie quantique des champs.

Mais le principal intérêt des équations d'évolution (4) et (5) (ou (11) et (13)) n'est pas dans l'explication du rayonnement : il réside dans le fait qu'elles permettent d'aborder l'étude des transitions quantiques, indispensables d'ailleurs à la compréhension de la genèse des "états stationnaires" de l'atome et de leur stabilité.

Or ces mouvements transitoires possèdent le caractère essentiel d'être irréversibles, ce qui exige de la théorie prétendant les décrire de contenir en germe l'explication de l'irréversibilité. Nous avons vu que tel est bien le cas ici, puisque l'évolution de la matière (c'est-à-dire de la fonction d'onde) est donnée par des équations héréditaires si on n'utilise que des données relatives à cette matière. C'est particulièrement clair en ce qui concerne les conditions initiales : au lieu de n'avoir besoin, pour prédire l'avenir du système, que des seules données à l'instant initial, le calcul du champ interne, à cet instant, exige la connaissance de la fonction d'onde à tous les instants antérieurs. On voit que pour nous l'irréversibilité découle du retard des potentiels, dû à la propagation du champ électromagnétique. Cependant les solutions retardées ne sont pas les seules et l'on doit se demander la raison de ce choix. Elle réside dans l'expression de la solution des équations (13) (voir par exemple (1<sup>0</sup>)) : pour calculer les champs dans l'avenir, à partir de données initiales, seuls les potentiels retardés entrent en jeu. Autrement dit, et sans chercher à remonter jusqu'aux causes premières, nous postulons que nous sommes à même de discerner le sens du temps, et alors l'explication de l'irréversibilité en découle.

Encore un point sur lequel il faut attirer l'attention. La dynamique de la matière seule est héréditaire, mais les équations (11) et (13) sont, elles, purement différentielles et "réversibles". Comment concilier ce fait avec l'irréversibilité ? La réponse ne peut venir que de la réduction du nombre de variables indépendantes, réduction imposée par le fait que nous n'observons que la matière et n'agissons que sur elle, le champ électromagnétique nous restant parfaitement inaccessible par voie directe. Or, si le mouvement dans l'espace des phases total, relatif à la fois aux variables décrivant le fluide et à celles décrivant le champ, est hamiltonien, ce n'est pas le cas de la projection de ce mouvement sur le sous-espace correspondant aux variables de matière seules, dont l'évolution est héréditaire.



7. Rapports avec la théorie de la double solution. Considérons une particule dans un champ de forces externes nul ou suffisamment faible. Il ne paraît pas déraisonnable d'admettre que le potentiel attractif  $G$ , dont la forme précise nous est pour l'instant inconnue, puisse être responsable des propriétés suivantes. Sous l'effet des forces attractives dérivant de  $G$ , compensées seulement par les forces électrostatiques, le fluide se condense fortement et prend l'aspect corpusculaire. L'onde  $u$  qui le décrit est alors une "onde à bosse" c'est-à-dire dont l'amplitude est très grande dans le petit volume qui contient pratiquement tout le fluide.

La formule (6) n'étant autre que la formule du guidage, cette bosse suit bien les lignes de guidage de M. L. de Broglie (voir (1)). En outre, le caractère héréditaire du mouvement fait que les conditions initiales sont insuffisantes pour déterminer l'évolution de  $u$  ce qui fait qu'en général nous ne pouvons connaître qu'une image statistique des phénomènes. On a ainsi une explication du caractère aléatoire de la théorie quantique, les probabilités n'intervenant que par suite de notre impuissance à commander le passé du système, et non en raison d'un indéterminisme fondamental. On voit que la tentative exposée ici s'insère bien dans le cadre de la théorie de la double solution de M.L. de Broglie.

Dans un champ externe important, par exemple celui créé par le noyau d'un atome, les forces centrifuges et de Laplace s'ajoutent à la répulsion électrostatique, ce qui, malgré  $G$ , dilate l'électron dont l'aspect ondulatoire et étendu prédomine. Ceci jette un jour nouveau sur le concept de "complémentarité", le dualisme, on pourrait même dire l'antagonisme onde-corpuscule étant dû non à quelque cause insaisissable, mais à l'intensité du champ de forces dans la région où se trouve le fluide.

### III - RESULTATS.

8. Electron de Lorentz et mécanique statistique. Dans un certain nombre de cas, par exemple lors de l'étude des systèmes de la thermodynamique classique, on peut se contenter du mouvement du centre de gravité d'une particule. En sommant (4) sur tout l'espace, on obtient :

$$(19) \quad m\ddot{X} = \int (\rho(\vec{E} + \dot{\vec{c}}) + \rho\vec{v} \wedge (\vec{B} + \dot{\vec{\beta}})) d\omega$$

où  $X^i$  sont les coordonnées du centre de gravité. Moyennant quelques approximations supplémentaires, valables quand l'électron est fortement condensé et se meut sensiblement en bloc,

cette équation se met sous une forme héréditaire (toujours à cause des champs internes  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ ) que l'on peut résumer ainsi :

$$(20) \ddot{\vec{X}} = e \vec{E}(\vec{X}, t) + e \dot{\vec{X}} \wedge \vec{B}(\vec{X}, t) + \int_{-\infty}^t \vec{Y}(\vec{X}_t, \dot{\vec{X}}_t, \ddot{\vec{X}}_t, \vec{X}_\tau, \dot{\vec{X}}_\tau, \ddot{\vec{X}}_\tau, t-\tau) d\tau$$

Cette équation généralise l'équation de Lorentz, ou plutôt en constitue la forme complète puisqu'elle résulte du calcul même de Lorentz, mais dans lequel on ne fait pas le développement en  $1/C$  arrêté aux deux premiers termes (voir <sup>(10)</sup> ou <sup>(11)</sup>). Ce type de mécanique héréditaire permet alors de calculer la variation de volume dans l'espace des phases du centre de gravité d'un ou plusieurs corpuscules et de montrer, <sup>(5)</sup>, que, contrairement au résultat du théorème de Liouville qui n'est plus applicable ici, cette variation n'est pas nulle. Nous pensons que ceci est une voie d'explication de l'irréversibilité en mécanique statistique (voir également les travaux de J. Fronteau <sup>(15)</sup>), explication qui paraît extrêmement difficile si l'on garde une mécanique microscopique hamiltonienne <sup>(16)</sup>. En effet, le théorème de Liouville est alors vrai et entraîne par exemple le théorème de récurrence de Poincaré, dont toute la valeur nous semble demeurer, quoiqu'on en ait dit.

9. Mouvements permanents et états stationnaires. Supposons le champ externe  $\phi$ ,  $\vec{A}$  statique, ce qui est par exemple le cas de celui créé par un noyau dans un atome. Les mouvements permanents du fluide électronique sont tels que  $\partial_t \mu = \partial_t \vec{v} = 0$ . Il en est de même des champs internes :  $\partial_t V = \partial_t \vec{A} = 0$ .

Par (6),  $\partial S / \partial t$  est alors une fonction de  $t$  seul. En multipliant (8) par  $\mu$  et en intégrant sur l'espace, il vient :

$$(21) m \frac{\partial S}{\partial t} = - \int \left( \mu \frac{v^2}{2} + \rho(V + \phi) + \mu G - \mu Q \right) d\tau = - F$$

où  $F$  est une constante puisque l'intégrale ne dépend pas de  $t$ . Les mouvements permanents s'obtiennent donc en cherchant les fonctions :

$$u = u_0(\vec{x}) e^{-iFt/\hbar}$$

obéissant à l'équation (11), c'est-à-dire en résolvant l'équation aux valeurs propres :

$$(22) (L - F)u_0 = 0$$

où  $L$  est l'opérateur indépendant du temps donné par (12) et (13).

Ces mouvements permanents, s'ils existent, et on peut montrer que tel est bien le cas, ont une propriété indispensable aux mouvements stationnaires en mécanique quantique : ils ne rayonnent pas puisque les champs internes sont statiques (ce qui était impossible à l'électron de Lorentz à cause de sa rigidité). Leur énergie est d'ailleurs constante d'après (18), mais il faut remarquer qu'elle ne coïncide pas exactement avec  $F$  qui en diffère, mais d'assez peu par la suppression du terme d'énergie magnétique et l'addition de  $\int (\mu G + \rho V)/2 d\omega$ .  $F$  joue donc surtout le rôle d'un paramètre de quantification.

Dans le cas des mouvements stationnaires d'un électron autour du noyau, certaines approximations paraissent possibles, qui permettent de retrouver les résultats habituels. Tout d'abord, le terme d'énergie magnétique est faible à cause des vitesses modérées de circulation du fluide. Ensuite, les deux termes d'énergie de cohésion et électrique,  $1/2 \mu G$  et  $1/2 \rho V$  sont de signes opposés; si on suppose qu'ils se compensent sensiblement, on peut les négliger en première approximation. On s'aperçoit alors que (22) se ramène à l'équation de Schrödinger.

A l'ordre suivant, toujours en considérant les trois termes supplémentaires comme des perturbations de l'équation de Schrödinger, le calcul montre, (17), que les valeurs propres de  $F$  existent et sont bien quantifiées (donc l'énergie aussi). Dans le cas général l'étude paraît difficile car (22) est non linéaire et intégrodifférentielle, type d'équation très peu étudié: Une voie d'étude en serait peut-être la méthode d'itération amorcée ci-dessus.

10. Transitions quantiques. Considérons un électron dans un mouvement permanent correspondant à la valeur propre  $F_i$ . Le système y resterait indéfiniment si une perturbation externe, qui peut être très courte et d'effet énergétique négligeable, ne l'en dérangeait. Un mouvement transitoire s'amorce alors, que l'on peut imaginer, à titre d'hypothèse de travail, comme suit.

Le fluide entame d'abord un mouvement vibratoire autour du mouvement par un mécanisme semblable à celui d'un oscillateur harmonique. Mais, dans ce mouvement transitoire, le retard des potentiels entre en jeu et son effet est d'amplifier la vibration. Au bout d'un certain temps, l'amplitude est devenue suffisante pour que le fluide soit rappelé vers un mouvement permanent différent du premier, le mouvement  $j$ . La vibration continue donc, avec une fréquence que nous admettons être en continuité avec la première; mais cette fois le re-

tard des potentiels a pour effet d'amortir le mouvement qui tend ainsi vers l'état  $j$ . La vibration matérielle a créé un rayonnement électromagnétique de même fréquence qu'elle, et l'on a ainsi une explication dynamique de l'émission et de la transition quantique.

L'idée que le retard de propagation puisse créer d'abord une amplification, ensuite un amortissement, peut paraître choquante à première vue. Elle est pourtant vérifiée par le calcul (17) qu'on peut faire du début et de la fin du processus, c'est-à-dire par l'étude des petits mouvements autour d'un mouvement permanent.

En effet, en posant  $\delta u = \chi e^{-iF_i t}$ , puis en faisant des approximations permettant de développer les potentiels retardés, on trouve une équation en  $\partial\chi/\partial t$  qui est linéaire. Cherchons alors une solution de la forme :

$$(23) \quad \chi = e^{\sigma t} (\xi(\vec{x}) \cos \omega t + \zeta(\vec{x}) \sin \omega t)$$

par une méthode de perturbations.

On montre que les solutions sont en nombre correspondant aux valeurs propres  $F_j$  de l'équation des ondes (22) et on a :

$$\omega = \frac{F_i - F_k}{\hbar} + \delta\omega \text{ si } F_i > F_k$$

$$\omega = \frac{F_j - F_i}{\hbar} + \delta\omega \text{ si } F_i < F_j$$

où  $\delta\omega$  est un petit glissement de fréquence. Quant à  $\sigma$ , dont la valeur dépend de la seule partie de l'équation fonction du retard des potentiels (celle qui disparaît si on fait  $1/c \rightarrow 0$ ), il est  $> 0$  si  $F_k < F_i$  et  $< 0$  si  $F_j > F_i$ .

Ceci explique que les seules vibrations susceptibles de s'amplifier à partir d'un mouvement permanent soient celles qui correspondent à une diminution de l'énergie, et en particulier que l'état fondamental soit stable. En outre, l'arrivée sur un nouvel état stationnaire est amortie, d'où la semi-stabilité de cet état. Enfin,  $\sigma$  est calculable théoriquement et on peut espérer atteindre par là la durée des transitions quantiques, autrement que par les relations d'incertitude.

On voit ainsi que la théorie fournit, au moins à l'approximation de la méthode des perturbations, un moyen d'étude de ces transitions quantiques dont l'irréversibilité fait qu'elles échappent à la mécanique quantique traditionnelle.

## BIBLIOGRAPHIE

- (<sup>1</sup>) L. de Broglie : Une tentative d'interprétation causale et non linéaire de la Mécanique Ondulatoire, Gauthier-Villars, Paris, 1956,  
La réinterprétation de la Mécanique Ondulatoire, tome 1, Gauthier-Villars, Paris, 1971.
- (<sup>2</sup>) F. Fer : C.R. Acad. Sc., 258, 1964, p. 2983, 3215 et 3435.
- (<sup>3</sup>) E. Madelung : Zs. f. Phys., 40, 1926, p. 322.
- (<sup>4</sup>) J. Andrade e Silva, F. Fer, P. Leruste, G. Lochak : Cah. Phys., 15, 1961, p. 210 et 16, 1962, p. 1.
- (<sup>5</sup>) D. Fargue : Sur la connexion des propriétés héréditaires et hamiltoniennes des systèmes chargés, thèse, Marseille, 1974.
- (<sup>6</sup>) J.E. Marsden : Arch. Rat. Mech. Anal., 28, 1968, p. 362.
- (<sup>7</sup>) D. Fargue : C.R. Acad. Sc., 273, 1971, p. 873.
- (<sup>8</sup>) F. Bopp et R. Haag : Zs. f. Naturforschung, 5a, 1950, p. 644.
- (<sup>9</sup>) D. Fargue : C.R. Acad. Sc., 276, 1973, p. 789.
- (<sup>10</sup>) H.A. Lorentz : The theory of electrons, réimpression de la 2ème édition, Dover, New-York, 1952.
- (<sup>11</sup>) H. Arzeliès : Rayonnement et Dynamique du corpuscule chargé fortement accéléré, Gauthier-Villars, Paris, 1966.
- (<sup>12</sup>) E. Schrödinger : La mécanique des ondes, dans Electrons et photons, rapports de congrès Solvay, Gauthier-Villars, Paris, 1928.
- (<sup>13</sup>) C.R. Stroud, E.T. Jaynes : Phys. Rev., A 1, 1970, p. 106.
- (<sup>14</sup>) H. Poincaré : Rend. Circ. Mat. Pal., 21, 1906, p. 129, repris dans : Oeuvres t. IX, p. 537, Gauthier-Villars, Paris, 1954.

- (<sup>15</sup>) J. Fronteau : Le théorème de Liouville et le problème général de la stabilité, CERN, Genève, 1965, et, l'Entropie et la Physique moderne, CERN, Genève, 1966.
- (<sup>16</sup>) F. Fer : C.R. Acad. Sc., 260, 1965, p. 3873 et 4159.
- (<sup>17</sup>) F. Fer : C.R. Acad. Sc., 263, 1966, p. 103.

Ecole des Mines

60, Bld Saint-Michel

75272 - PARIS Cédex 06