L'INVARIANCE ADIABATIQUE ET LA THERMODYNAMIQUE CACHEE DES PARTICULES

par M. Louis de BROGLIE

(manuscrit reçu le 28 Avril 1975)

RESUME. L'auteur rappelle comment la notion d'invariance adiabatique introduite par Boltzmann pour un ensemble de molécules en agitation thermique avait à l'origine une signification physique claire.

Par contre, quelle que soit la clarté des raisonnements d'Ehrenfest et de Brillouin lorsqu'ils étendent cette notion à l'atome de Bohr ou à des systèmes physiques simples, un mystère demeure quant à la signification du mot "chaleur" dans ce cas;

L'auteur montre alors que la thermodynamique cachée des particules permet dans tous les cas de donner une signification physique simple à la notion d'invariance adiabatique.

1 - INTRODUCTION DE L'INVARIANCE ADIABATIQUE PAR BOLTZMANN.

L'idée d'invariance adiabatique a été introduite par Boltzmann en 1897 dans son livre "Prinzipien der Mechanik" ([1]). Il s'était inspiré des travaux antérieurs de Clausius et de Szily et d'idées d'Helmholtz résumés par Henri Poincaré dans le dernier chapitre de son livre de Thermodynamique. J'ai exposé l'essentiel de leurs idées dans mon livre "la Thermodynamique de la particule isolée" ([1]). Dans ce livre, on trouvera développé le calcul de Boltzmann aux pages 63 à 68.

Boltzmann considérait un nombre énorme de particules animées d'une agitation thermique comme un gaz dans la théorie cinétique des gaz et contenues dans un récipient à parois très lentement mobiles. Cela l'amenait à distinguer dans un tel système, comme l'avait fait Helmholtz, de très nombreuses variables q_i à variations très rapides qui sont les coordonnées des molécules et des variables beaucoup moins nombreuses et à variations beaucoup plus lentes définissant les conditions aux limites de l'ensemble des molécules, c'est-à-dire la forme du récipient qui les contient.

Il envisageait alors une variation très lente de la durée de variation τ de ces dernières variables et, à l'aide des raisonnements reproduits à l'endroit indiqué plus haut de mon livre, il étudiait la variation très lente qu'éprouve alors le système considéré. Il aboutissait ainsi à l'équation suivante :

$$\delta Q = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \sum_i p_i dq_i \tag{1}$$

où δQ représente la variation, pendant la durée τ de cette variation extrêmement lente des conditions aux limites, de la chaleur contenue dans le système et où p_i est la composante de la quantité de mouvement correspondant à la coordonnée q_i très rapidement variable.

En Mécanique classique non relativiste, on a pour l'énergie cinétique totale de l'ensemble des molécules :

$$2E_{cin} = \sum_i p_i \frac{dq_i}{dt} = \sum_i p_i \dot{q}_i$$

avec $p_i = \frac{dq_i}{dt}$ et la formule (1) devient :

$$\delta Q = \frac{2}{\tau}\,\delta(\bar{E}_{cin}\,\tau) \tag{2}$$

où $\bar{E}_{cin}$ est la valeur moyenne de l'énergie cinétique de l'ensemble des molécules pendant le temps τ de la variation envisagée. Puisque δQ est nul quand $\int_0^\tau p_i dq_i = 0$, il est naturel de nommer cette intégrale un "invariant adiabatique".

Nous ferons ici la remarque essentielle que le raisonnement de Boltzmann ne soulève aucune difficulté d'interprétation. En effet, puisque Boltzmann considérait un ensemble de molécules en agitation thermique, l'introduction de l'idée de chaleur était tout à fait naturelle et l'emploi de l'adjectif "adiabatique" qui, par définition, signifie "sans échange de chaleur" était tout à fait compréhensible et justifié. Mais nous allons voir qu'il n'en est pas de même pour les extensions qui ont été faites ensuite de la formule de Boltzmann.

2 - INTRODUCTION PAR EHRENFEST DE LA NOTION D'INVARIANCE ADIABATIQUE DANS L'ANCIENNE THEORIE DES QUANTA.

Dès 1911, Ehrenfest avait appliqué la théorie de Boltzmann au rayonnement noir quand on s'en tient à l'approximation de Wien et cela ne soulevait encore aucune difficulté puisqu'à cette approximation, on peut considérer le rayonnement noir comme un gaz de photons. Mais en 1916, Ehrenfest ([3]) a montré le rôle important que joue la notion d'invariance adiabatique quand on l'introduit dans la théorie quantique de l'atome telle que Bohr l'avait développée en 1913. Or cette extension du rôle des invariants adiabatiques présentait un aspect paradoxal sur lequel je veux insister.

A l'époque où Ehrenfest introduisait les invariants adiabatiques dans la théorie de l'atome, celle-ci avait encore la forme primitive que lui avait donnée Bohr, c'est-à-dire qu'on se représentait les électrons tournant dans l'atome autour d'un noyau central chargé positivement. Ils décrivaient donc des trajectoires dont la forme pouvait être assez compliquée quand il y avait plusieurs électrons et quand on devait tenir compte des corrections de relativité. Mais dans le cas simple de l'atome d'hydrogène où il n'y a qu'un seul électron tournant autour d'un proton et où l'on négligeait les petites corrections de relativité, les trajectoires étaient des courbes fermées circulaires ou elliptiques et l'on constatait que les conditions de quantification déterminant les trajectoires stables au sens de Bohr se réduisaient à écrire que l'intégrale :

$$\oint \vec{p}\, d\vec{q} = \oint \sum_i p_i\, dq_i$$

prise le long de la trajectoire fermée était égale à un multiple entier de la constante $\underline{h}$ de Planck. L'importance des invariants adiabatiques dans la détermination des états quantifiés de l'atome de Bohr apparaissait ainsi nettement.

Il est vrai qu'en dehors du cas très particulier de l'atome d'hydrogène quand on néglige les petites corrections de relativité les trajectoires électroniques dans la théorie primitive de l'atome de Bohr étaient plus compliquées et que l'introduction des invariants adiabatiques exigeait alors des développements supplémentaires que Léon Brillouin avait étudiées dans ses livres ([4]). Mais comme ces questions ne présentent plus aujourd'hui d'intérêt, je n'y insisterai pas.

L'introduction des invariants adiabatiques pour désigner les intégrales du Type $\oint \sum_i p_i\, dq_i$ dans l'atome de Bohr que l'on dérivait de la formule de Boltzmann présentent un caractère assez surprenant car il s'agit ici d'un système mécanique simple contenant un petit nombre de particules décrivant des trajectoires régulières. On ne voit donc pas du tout comment peut s'introduire l'idée de chaleur essentiellement liée à celle d'une agitation aléatoire d'origine thermique.

Ehrenfest et Brillouin avaient bien aperçu cette difficulté. Ils ont essayé de la lever en disant que, quand un atome émet un rayonnement, celui-ci peut être considéré comme de la chaleur et que, par suite, quand l'atome n'émet pas, il n'y a pas de variation de chaleur. C'est ainsi que s'introduirait la notion d'adiabatisme dans la spécification des états stationnaires où l'atome n'émet pas. Il me paraît certain que cette manière de voir n'est pas exacte car, lorsque l'atome émet, il projette au dehors un seul photon et cette émission d'énergie n'a aucunement le caractère d'une perte de chaleur. L'emploi du terme "adiabatique" dans la théorie de l'atome paraît donc injustifié. Cette constatation crée un certain malaise qui se confirme quand on définit des invariants adiabatiques pour des systèmes mécaniques extrêmement simples où il semble évident qu'aucun phénomène thermique n'intervient. C'est la question que nous allons maintenant étudier.

3 - APPLICATION PARADOXALE DE LA NOTION D'INVARIANCE ADIABATIQUE A DES SYSTEMES MECANIQUES TRES SIMPLES.

On a été amené à appliquer la notion d'invariance adiabatique à des systèmes très simples ou très généraux. C'est ainsi, par exemple, que dans leur beau traité de Mécanique, Landau et Lifchitz ([5]) définissent les invariants adiabatiques, en considérant un système mécanique quelconque, de la façon suivante : "considérons un système mécanique animé d'un mouvement linéaire fini et caractérisé par un paramètre λ définissant les propriétés du système lui-même ou du champ extérieur dans lequel il se trouve. Supposons que sous l'influence de certaines causes extérieures le paramètre λ varie lentement, c'est-à-dire adiabatiquement, avec le temps. Nous appelons "lente" une transformation dans laquelle λ varie très peu au cours d'une période T du mouvement du système de sorte que :

$$T \frac{d\lambda}{dt} << \lambda".$$

On peut à juste titre s'étonner de voir apparaître le mot "adiabatique" dans la définition d'une évolution purement mécanique où n'intervient aucun élément thermodynamique.

Cet étonnement ne peut qu'augmenter si l'on étudie les exemples de systèmes extrêmement simples que Léon Brillouin a donnés dans ses libres cités plus haut, exemples dont je n'exposerai qu'un seul.

Considérons un pendule constitué par une corde traversant un anneau fixe O à laquelle est suspendue une masse <u>m</u>.

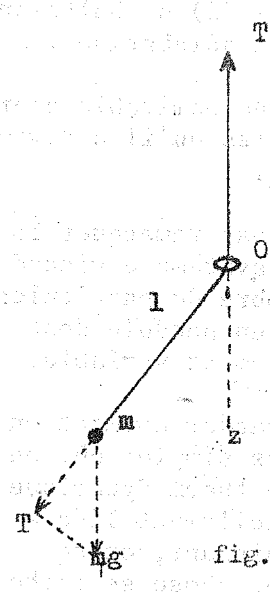

fig.1

La position de l'anneau, dit Brillouin, constitue une liaison. Nous la ferons varier en déplaçant très lentement cet anneau, ce qui modifiera la longueur du pendule. La période du pendule est :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

La force agissent sur l'anneau peut se calculer aisément. En effet, la tension de la corde est $T = mg \cos\theta$. En composant les deux tensions égales, mais de directions opposées qui agissent sur l'anneau, on voit qu'il reste une composante verticale :

$$Z = T(1 - \cos\theta)$$

et une composante latérale :

$$X = T \sin\theta$$

Nous supposons l'anneau maintenu par une glissière verticale dont les composantes équilibrent la force X. Cette dernière est d'ailleurs nulle en moyenne pour de petits angles θ. Au contraire, la force verticale a pour valeur moyenne :

$$\overline{Z} = \overline{T(1 - \cos\theta)} = T\cdot\frac{\overline{\theta^2}}{2} = mg \cos\theta\cdot\frac{\overline{\theta^2}}{2}$$

Nos oscillations étant supposées de petite amplitude, nous prendrons donc pour $\cos\theta$ la valeur 1, et pour $\frac{\overline{\theta^2}}{2}$ la valeur $\frac{\alpha^2}{4}$, α représentant l'angle maximum du pendule avec la verticale.

Mais on a, d'autre part, pour l'énergie de vibration l'expression $E = mg\ell \frac{\alpha^2}{4}$, ce qui nous permet d'écrire :

$$\overline{Z} = \frac{1}{2}\frac{E}{\ell}.$$

Quand nous déplaçons très lentement l'anneau de bas en haut, nous recueillons un travail $d\tau = \overline{Z}d\ell = \frac{1}{2}\frac{E}{\ell}d\ell$. Ce travail sera emprunté à l'énergie du pendule et l'on aura $-\frac{dE}{E} = \frac{d\tau}{E} = \frac{t}{2}\frac{d\ell}{\ell}$. La variation simultanée de la période d'oscillation est et comme on vérifie aisément la relation $\frac{dE}{E} + \frac{d\tau}{\tau} = 0$, on obtient finalement :

$$(3) \qquad E\tau = C^{te}$$

d'où l'on conclut en se reportant à la formule (2) de Boltzmann que l'évolution lente de ce système simple est adiabatique.

J'ai tenu à reproduire le raisonnement d'une admirable clarté donné par Léon Brillouin. Les autres exemples qu'il a développés sont tout aussi clairs et remarquables.

Mais, ici encore, il est impossible de ne pas remarquer la différence si importante qui existe entre le système envisagé par Boltzmann qui contenait un très grand nombre de particules en agitation thermique et le cas si simple d'un pendule dont le fil de suspension a une longueur très lentement variable.

En résumé, on est forcément amené à se demander comment on peut appliquer à des problèmes mécaniques très simples où, en apparence du moins, aucun processus de nature thermodynamique n'intervient, la notion d'adiabatisme essentiellement liée à l'absence d'échanges de chaleur. En y réfléchissant, on ne peut pas ne pas avoir l'impression que quelque chose se cache derrière cet étrange problème.

4 - INTRODUCTION DE LA DYNAMIQUE DU GUIDAGE ET DE LA THERMODYNAMIQUE RELATIVISTE.

La difficulté que nous venons de signaler nous parait imposer l'idée que derrière le mouvement de tout système mécanique se dissimule une Thermodynamique cachée. Or, c'est là précisément une des idées fondamentales que mes réflexions de ces dernières années sur la réinterprétation nécessaire de la Mécanique ondulatoire dans le sens de mes conceptions primitives de 1924-1928 m'ont amené à introduire (6).

Mon hypothèse fondamentale sur la liaison du mouvement de la particule et la propagation de l'onde est que la particule est le siège d'une vibration périodique interne et qu'elle se déplace dans son onde, à laquelle elle est en quelque sorte incorporée, de façon à rester constamment en phase avec elle. C'est le théorie du guidage de la particule par son onde. Si alors on écrit l'expression de l'onde qui transporte la particule sous la forme complexe $ae^{\frac{i}{\hbar}\varphi}$ ou $\hbar = \frac{h}{2\pi}$. La variation de la phase ϕ au point M où se trouve la particule est $d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial t}dt - \frac{\partial\phi}{\partial \ell}d\ell$. $d\ell$ étant l'élément de longueur de la trajectoire de la particule qui, d'après la théorie du guidage, est dirigé suivant la normale à la surface d'égale phase au point M. Si la particule est animée de la vitesse

$v = \frac{d\ell}{dt}$, on a donc :

$$d\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{\partial\phi}{\partial\ell}\, v\right) dt \tag{4}$$

mais l'énergie de la particule est $W = h\nu = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ et sa quantité de mouvement est $p = \frac{\partial\phi}{\partial\ell} = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}}$ avec $v = \beta c$. Dans ces formules, m_0 est la masse propre de la particule en mouvement qui, dans ma théorie, est la somme de sa masse propre normale et des contributions qu'apportent à la masse propre l'intervention du potentiel quantique et éventuellement des potentiels extérieurs ([7]). L'équation (4) devient alors $d\phi = \left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) dt$. Si, dans le système de référence où l'onde est stationnaire et la particule immobile, la fréquence interne de la particule est dans le système où elle est en mouvement avec la vitesse v, sa fréquence sera $\nu_0\sqrt{1-\beta^2}$ d'après la formule de transformation relativiste de la fréquence d'une horloge et l'on a pour la phase interne de la particule $d\phi_i = m_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2}\, dt$. Le principe de l'accord des phases qui conduit à poser $d\phi = d\phi_i$ nous donne :

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = m_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2} + \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{5}$$

Cette formule n'est pas autre chose que la formule fondamentale de la Thermodynamique relativiste d'après laquelle l'énergie totale de la particule en mouvement $\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ est égale à la somme de la chaleur qu'elle contient $m_0 c^2\sqrt{1-\beta^2}$ et de l'énergie de mouvement $\frac{m_0 v^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Cette dernière grandeur me paraît être la véritable énergie cinétique de la particule : elle diffère de l'énergie $m_0 c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$ qui est "récupérable" quand on arrête la particule et qu'en théorie usuelle de la Relativité, on nomme, à tort pensons-nous, l'énergie cinétique ([8]).

Les considérations qui précèdent ont l'avantage de montrer clairement le lien étroit qui existe entre la formule (4) exprimant le guidage de la particule par son onde et la formule fondamentale (5) de la thermodynamique relativiste.

Avant d'introduire la Thermodynamique cachée des particules, il me paraît utile de rappeler encore quelques points de l'histoire des théories quantiques de l'atome. Nous avons déjà rappelé que Bohr, dans sa théorie primitive de l'atome d'hydrogène, admettait que l'électron décrivait des trajectoires circulaires ou elliptiques autour du moyau. Cela conduisait à admettre que seules étaient stables les trajectoires électroniques pour lesquelles l'intégrale $\oint \vec{p}\, d\vec{q}$ prise le long de la trajectoire était égale à nh avec n = 1,2, 5 ... L'intervention dans cette formule des nombres entiers avait dès mes premiers travaux sur ce sujet en 1923-1924 attiré mon attention. J'avais, en effet, remarqué que les nombres entiers interviennent fréquemment en théorie des ondes, notamment dans les phénomènes d'interférences, et ceci m'avait amené à penser qu'il fallait associer au mouvement de la particule la propagation d'une onde. Mais, en 1926, Schrödinger avait développé sa belle théorie de l'onde ψ en excluant toute localisation de la particule dans l'onde et il avait exprimé la quantification des états atomiques stationnaires sans aucune intervention des invariants adiabatiques qui, d'ailleurs, dans sa théorie n'avaient plus de sens.

Or, ma théorie de guidage de la particule par l'onde, esquissée dans mes premiers travaux de 1923 à 1927 et reprise par moi depuis une vingtaine d'années, me permet de faire à nouveau intervenir les invariants adiabatiques. En effet, elle montre que dans le cas de l'atome d'hydrogène, l'électron atomique peut soit rester immobile, soit se déplacer sur une trajectoire circulaire centrée sur un axe passant par le noyau. Nous retrouvons ainsi la condition $\oint \vec{p}\, d\vec{q} = nh$ parce qu'elle exprime l'uniformité de la phase le long de la trajectoire fermée, mais maintenant le nombre <u>n</u> peut prendre non seulement les valeurs entières 1, 2, ..., mais aussi la valeur n = 0 dans le cas où la trajectoire se réduit à un point. Ainsi les états se trouvent, dans cette interprétation, de nouveau caractérisés par des valeurs égales à nh d'invariants adiabatiques du Type $\oint \vec{p}\, d\vec{q}$ comme l'ancienne théorie des quanta.

5 - <u>RESUME DE LA THERMODYNAMIQUE CACHEE DES PARTICULES.</u>

La théorie du guidage de la particule par son ondes implique qu'en dehors du cas limite et jamais strictement réalisé de l'onde monochromatique plane, la trajectoire de la particule est une ligne courbe le long de laquelle le potentiel quantique et par suite la masse propre varient de sorte que l'on a affaire à une <u>Dynamique à masse propre variable.</u>

Mais une telle image est encore certainement trop simple et il est nécessaire de la compléter en admettant que ce mouvement régulier est constamment perturbé par de brusques variations de la masse propre m_0, ce qui impose à la particule une sorte d'agitation brownienne superposée au mouvement régulier. En effet, s'il n'en était pas ainsi, on pourrait comprendre comment la probabilité de la présence de la particule dans un élément de volume $d\tau$ est donnée à chaque instant par la quantité $|\Psi|^2 d\tau$, c'est-à-dire par le carré de l'amplitude de l'onde, conformément au principe de Born qui est certainement exact. De plus, nous avons vu plus haut que, dans le cas de l'atome d'hydrogène, la théorie du guidage prévoit des états stationnaires où l'électron est immobile et là encore on ne voit pas comment la probabilité en a^2 pourrait se réaliser.

Puisque l'énergie m_0c^2 peut être assimilée à une chaleur interne contenue dans la particule, les variations continues ou aléatoires de la masse propre doivent correspondre à des variations de la chaleur interne. Ceci amène à l'idée que la particule, même quand elle nous apparaît comme isolée, doit être en contact permanent avec un grand réservoir de chaleur constituant un thermostat caché.

En appliquant aux échanges continuels d'énergie calorifique entre la particule et le thermostat caché les conceptions de la Thermodynamique statistique, on peut attribuer à l'état de la particule une certaine entropie correspondant par la formule de Boltzmann $S = k \log P$ à la probabilité de cet état. L'on est ainsi amené à établir entre l'entropie et la grandeur mécanique action qui figure dans le principe de moindre action une relation du plus grand intérêt et à démontrer que le principe de moindre action de la Mécanique n'est qu'un aspect du principe thermodynamique général de l'augmentation de l'entropie.

Je me contente de donner ce résumé succint de la Thermodynamique cachée des particules que j'ai développée depuis une dizaine d'années en renvoyant pour une étude plus complète à l'endroit indiqué de la bibliographie (6).

6 - INTERPRETATION DE L'INVARIANCE ADIABATIQUE PAR LA THERMODYNAMIQUE CACHEE DES PARTICULES.

Je veux maintenant montrer comment l'introduction de la Thermodynamique cachée des particules permet de comprendre pourquoi la notion thermodynamique d'adiabatisme peut s'introduire dans l'étude de systèmes mécaniques très simples.

Considérons un système mécanique animé d'un mouvement périodique de période τ et d'énergie W, τ et W étant très lentement variables à l'échelle du temps τ de façon que le produit $W.\tau$ reste constant. Ce sont là les conditions imposées aux systèmes auxquels la notion d'invariance adiabatique est applicable.

Si δ désigne la variation très lente de l'évolution du système, la formule (5) nous permet d'écrire :

$$\delta\int_0^\tau W dt = \delta\int_0^\tau Q dt + \delta\int_0^\tau \vec{p}.\vec{v}\, dt = \delta\int_0^\tau Q dt + \delta\int_0^\tau \sum_i p_i dq_i$$

Comme par hypothèse $\overline{W}\tau$ est constant, on a $\delta\int_0^\tau W\, dt = \delta(\overline{W}\tau) =$

Si, de plus, Q est constant, $\delta\int_0^\tau Q\, dt = \delta\overline{Q}\tau = 0$ et nous aurons alors :

$$\delta\oint \sum_i p_i\, dq_i = 0$$

Mais quand Q est constant, l'évolution du système est, par définition, adiabatique et, la grandeur :

$$\oint \sum_i p_i\, dq_i$$

ne variant pas, elle peut être qualifiée d'invariant adiabatique. L'explication cherchée est ainsi obtenue.

Nous pouvons en tirer la conclusion suivante. Puisque le mouvement adiabatique peut être considéré à la fois comme un mouvement pendant lequel l'Action ne varie pas comme un mouvement pendant lequel l'Entropie reste constante, nous pouvons énoncer la conclusion suivante : "Puisque les deux définitions du mouvement, l'une dynamique et l'autre thermodynamique, peuvent coïncider, il est nécessaire que l'Entropie et l'Action soient intimement reliées l'une à l'autre". Et nous retrouvons ainsi l'une des idées les plus importantes de la Thermodynamique cachée des particules résumées dans le précédent paragraphe

Nous préciserons cette dernière idée de la façon suivante. Conformément à ce qui est exposé dans mon livre récent [6], on doit écrire la relation entre l'entropie S et l'Action A de la façon suivante :

$$\frac{\delta S}{k} = \frac{\delta A}{h}$$

avec :

$$A = \int_0^\tau - m_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2}\, dt = \int_0^\tau \sum_i p_i\, dq_i + \int_0^\tau W\, dt$$

d'après la relation (5), d'où pour la variation pendant un cycl de durée :

$$\frac{\delta S}{k} = \frac{1}{h}\left(\delta\int_0^T \sum_i p_i\, dq_i - \delta(W_T)\right) = \frac{1}{h}\,\delta\int_0 \sum_i p_i\, dq_i$$

puisque $\delta(\overline{W}_T) = 0$. Donc, si $\delta\int_0^T \sum_i p_i\, dq_i = 0$, on a $\delta S = 0$.

La variation très lente du mouvement s'opère donc à entropie constante, c'est-à-dire sans échange de chaleur. Elle est donc adiabatique.

Plusieurs points de l'exposé fait dans le présent travail demanderaient sans doute à être approfondis, mais les conclusions que j'en tire me semblent bien établies.

94, rue Perronet
92200 - NEUILLY

-:-:-:-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

(1) L. BOLTZMANN : Prinzipien der Mechanik. J.A. Barth, Leipzig, 1897.

(2) Louis de BROGLIE : La Thermodynamique de la particule isolée, Gauthier-Villars, Paris, 1964.

(3) G. EHRENFEST : Annalen der Physik, t. 51, 1916, p. 34

(4) Léon BRILLOUIN : La théorie des quanta et l'atome de Bohr, 1922.
L'atome de Bohr, 1931.
Conférences-rapports édités par les Presses universitaires de France.

(5) L. LANDAU et E. LIFCHITZ : Mécanique - Editions en langues étrangères, Moscou, 1960.

(6) Louis de BROGLIE : La réinterprétation de la Mécanique ondulatoire, Paris, Gauthier-Villars, 1971. Chapitre VI.

(7) Louis de BROGLIE : Comptes Rendus Académie des Sciences, tome 275, Série B, p. 899.

(8) Louis de BROGLIE : Annales de l'Institut Henri Poincaré, volume IX, n° 2, 1968, p. 89-108.

-:-:-:-:-:-:-