

# THÉORIES STOCHASTIQUES

## POUR LA MICROPHYSIQUE

par MM. Pierre CLAVERIE et Simon DINER

Laboratoire de Chimie Quantique  
Institut de Biologie Physico Chimique  
13, rue Pierre et Marie Curie - PARIS V

(manuscrit reçu le 23 Avril 1976)

*RESUME. Présentation générale des théories stochastiques du comportement des particules microphysiques. Critique du processus markovien de position dans la théorie de Fenyès-Nelson. Présentation du modèle de l'Electrodynamique Stochastique qui utilise explicitement le champ électromagnétique fluctuant du vide. Etude de l'état stationnaire et de la réponse au champ électromagnétique de l'oscillateur harmonique et du rotateur rigide. Dans le cadre de ce modèle formulation du passage possible à la Mécanique Quantique, qui apparaît comme une résolution approchée simplifiée d'un problème probabiliste complexe.*

### I - POSITION HISTORIQUE ET CONCEPTUELLE DU PROBLEME.

#### I.1. Projet de cet article.

Il règne vis-à-vis des théories stochastiques de la microphysique un mélange d'ignorance et de confusion. Situation entretenue par l'absence quasi-totale de mention de ces théories dans les différents panoramas des problèmes d'interprétation de la mécanique quantique parus depuis cinq ans pour manifester l'ampleur des discussions ravivées depuis 1966. Ainsi ne trouve-t-on aucune trace des théories stochastiques à l'école d'été de Varenne (1970)<sup>(1)</sup>, à la Conférence "Un demi-siècle de mécanique quantique" (Strasbourg 1974), ou dans des ouvrages récents comme ceux de Scheibe<sup>(2)</sup>, Belinfante<sup>(3,4)</sup> d'Espagnat<sup>(5)</sup> ou Bub<sup>(6)</sup>. Seul Jammer dans "The Philosophy of quantum Mechanics" (1974)<sup>(7)</sup> consacre un chapitre aux interprétations stochastiques en ne mentionnant cependant pas des travaux importants; il massacre "l'Electrodynamique Stochastique" en ignorant totalement l'oeuvre de Boyer<sup>(8)</sup>. Par ailleurs les apprê-

ciations portées sur les théories stochastiques ne sont souvent pas judicieuses par suite de la difficulté technique du sujet. Ainsi en est-il de la critique de Gilson (9) reprise par Jammer.

Nous avons récemment effectué une revue des théories stochastiques, destinée à des chimistes quanticiens, et n'entrant pas dans trop de détails techniques (10). Nous voudrions ici compléter cette revue en fournissant à la fois une vue plus large et plus précise de la question, et en montrant en particulier les espoirs que peut faire naître "l'Electrodynamique Stochastique". Nous ferons sur ce dernier sujet largement appel à nos propres travaux.

## I.2. Problématique des théories stochastiques.

L'ambition de toute théorie stochastique de la microphysique est, une fois reconnue le bien fondé d'une description probabiliste de la réalité, de construire un modèle de comportement stochastique des particules microphysiques, à l'instar des modèles du mouvement brownien. Le problème fondamental posé par une telle théorie, tant au niveau de sa construction qu'à celui de son interprétation, sera de définir les rapports qu'elle entretiendra avec la Mécanique Quantique et avec l'Expérience. De nombreuses situations peuvent en effet se présenter soit que l'on cherche à compléter la Mécanique Quantique (en particulier dans son Interprétation Statistique (7) Chap. 10; (11) en la plongeant dans une théorie stochastique, soit que l'on bâtit une théorie stochastique non totalement équivalente à la Mécanique Quantique mais qui en préserve les résultats vérifiés par l'Expérience. La première voie semble sérieusement compromise en vertu de la multitude des incompatibilités de structure mathématique entre la Mécanique Quantique et la Théorie des Probabilités dans l'axiomatique de Kolmogorov (cf. par exemple (7). Chap. 7, (3), (6)). A moins que l'on n'ait recours à une nouvelle axiomatique probabiliste ou à une définition non classique de processus stochastiques, le danger d'une telle démarche étant en général l'absence d'interprétation physique claire des nouveaux formalismes ainsi introduits (Cf. par exemple le travail d'Accardi (12)). La seconde voie est sans doute la plus raisonnable et le fait qu'elle mène à des théories qui ne recollent que partiellement à la Mécanique Quantique, se traduira toujours par la particularité suivante : dans une théorie stochastique, lorsqu'un opérateur  $A$  est associé à une observable  $A$ , l'opérateur associé à  $A^n$  ne sera en général pas  $A^n$  (abandon du postulat des valeurs propres). Dans cette seconde perspective toutes les approches stochastiques ont en commun les trois points de vue suivants :

- a) les phénomènes microphysiques, tout au moins à l'échelle atomique et moléculaire, peuvent être décrits dans le cadre de l'espace temps, à l'aide de paramètres spatiaux variant d'une manière continue avec le temps. Les particules sont en première approximation descriptibles comme des entités ponctuelles à coordonnées et moments bien définis. Le spin correspondra à une rotation des particules sur elles mêmes ou encore à des mouvements particuliers (ex mouvement hélicoïdal généralisé).
- b) le point de vue probabiliste est adopté non pas à cause d'un indéterminisme physique fondamental mais, comme pour le mouvement brownien, par suite de la complexité locale du mouvement. Les trajectoires réelles sont des fonctions déterministes compliquées, du type "fonctions pseudo-aléatoires" (<sup>13</sup>). Cette complexité du mouvement des particules provient de leur interaction avec un "thermostat caché" ou "milieu subquantique". Seule l'Electrodynamique Stochastique tente de donner une caractérisation phénoménologique de ce milieu caché en l'identifiant au champ électromagnétique du vide.
- c) les processus stochastiques rendant ainsi compte du mouvement des particules seront pour des raisons pratiques approximatifs à l'aide de processus markoviens. Ceci est naturel dans la mesure où l'on ne s'intéresse au plus qu'aux propriétés du second ordre des processus, et que ces propriétés déterminent complètement les processus markoviens pour lesquels elles sont obtenues par solution d'équations différentielles simples : équations de Fokker-Planck-Kolmogorov (F.P.K.).

Un point important qui n'a pas été jusqu'ici clairement perçu réside dans une double exigence vis-à-vis du processus stochastique, modèle du comportement microphysique. Il doit rendre compte simultanément de l'état du système : mouvement du système isolé (probabilité de présence des particules) et des réponses du système à des perturbations extérieures (en particulier l'absorption et l'émission d'énergie en présence d'un champ électromagnétique extérieur). La Mécanique Quantique satisfait à cette double exigence. Il n'en est pas de même de certains modèles stochastiques proposés jusqu'alors, sauf, comme nous allons le montrer, pour le modèle de l'Electrodynamique Stochastique.

## II - CRITIQUE DU MODELE DE FENYES-NELSON; PROCESSUS MARKOVIAN DE POSITION.

A l'instar des théories du mouvement brownien (théorie d'Einstein-Schmoluchowski) le modèle stochastique le plus

élémentaire que l'on peut construire est basé sur l'emploi d'un processus markovien de diffusion dans l'espace de configuration. Inaugurée par Fenyés (<sup>14</sup>), une telle démarche a été développée par Nelson (<sup>15</sup>) (<sup>16</sup>) et par L de la Pena-Auerbach (<sup>17</sup>).

Elle peut se résumer ainsi. Soit  $x(t)$  un processus markovien de diffusion. Un processus markovien est un processus où le futur ne dépend que de l'état présent, ce qui s'exprime en réduisant toutes les probabilités conditionnelles à la probabilité à deux temps :  $P_2(B, t | x_0, t_0)$ , probabilité pour que si  $x(t_0) = x_0$ ,  $x(t) \in B$ . On suppose en général que cette probabilité admet une densité :  $p_2(x, t | x_0, t_0)$ , dite densité de probabilité de transition. Cette densité est le noyau d'un opérateur intégral  $T$  qui fait évoluer toutes les probabilités liées aux processus. Les formes différentielles des lois d'évolution intégrale définies par  $T^+$  et  $T$  sont les équations de Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK).

Un processus markovien de diffusion est tel que les quantités suivantes soient définies ( $E\{ \}$  signifie valeur moyenne) :

$$(1) \quad a(t, x_0, t_0) = E\{x(t) | x(t_0) = x_0\} = \int x p_2(x, t | x_0, t_0) dx$$

$$(2) \quad b(t, x_0, t_0) = E\{(x(t) - a(t, x_0, t_0))^2 | x(t_0) = x_0\} \\ = \int (x-a)^2 p_2(x, t | x_0, t_0) dx$$

$$(3) \quad \text{coefficient de courant } c(x_0, t_0) = \frac{\partial a(t, x_0, t_0)}{\partial t}$$

$$(4) \quad \text{coefficient de diffusion } d(x_0, t_0) = \frac{\partial b(t, x_0, t_0)}{\partial t}$$

Ces coefficients déterminent complètement les équations FPK; ainsi par exemple l'équation FPK directe s'écrit :

$$(5) \quad \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \left[ c(x, t) p(x, t) \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ d(x, t) p(x, t) \right]$$

Considérant un processus de diffusion  $x(t) \in R^3$  (ou  $R^n$ ) Nelson définit le processus inversé dans le temps. Les coefficients de courant et de diffusion des deux processus sont :

$\vec{c}$ ,  $\vec{d}$ ,  $\vec{\tilde{c}}$ ,  $\vec{\tilde{d}}$ . Nelson définit les vitesses  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  :

$$(6) \quad \vec{u} = \frac{\vec{c} + \vec{\tilde{c}}}{2}$$

$$(7) \quad \vec{v} = \frac{\vec{c} - \vec{\tilde{c}}}{2}$$

Supposant que  $\vec{d} = \vec{\tilde{d}} = D$ , quantité constante, il démontre que les vitesses  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont liées à la probabilité invariante du processus  $p_{inv.}$  par les relations :

$$(8) \quad \vec{u} = \frac{D}{2} \text{ grad. Log } p_{inv.} \quad \frac{\partial p_{inv.}}{\partial t} = \text{div.}(p_{inv.} \vec{v})$$

La notion de mesure invariante ou probabilité invariante d'un processus est une notion capitale. C'est une probabilité particulière qui tire son nom du fait que pour un processus homogène (c et d ne dépendent pas du temps) c'est la probabilité invariante ou stationnaire (solution stationnaire de l'équation FPK).

Si l'on pose par définition :

$$(9) \quad \vec{u} = 2D \text{ grad } R$$

$$(10) \quad \vec{v} = 2D \text{ grad } S$$

$$(11) \quad \psi = e^R + iS$$

on a :

$$(12) \quad \psi \psi^* = p_{inv.}$$

L'hypothèse fondamentale de la théorie de Nelson est de considérer  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  comme des vraies vitesses (cinématique du processus de markov) et de leur associer des équations dynamiques newtoniennes (dynamique du processus). Si l'on prend  $D = \frac{\hbar}{2m}$ , on trouve alors que la fonction  $\psi$  vérifie l'équation de Schrödinger.

Ainsi dans la théorie de Nelson, l'équation de Schrödinger n'exprime pas l'évolution temporelle de n'importe quelle probabilité (comme c'est le cas pour l'équation FPK), mais seulement l'évolution de la probabilité invariante. Gilson (9) tire argument de cette incompatibilité entre les deux équations pour affirmer que théorie stochastique et mécanique quantique n'ont aucun rapport. En fait les points techniques soulevés par Gilson (d'une manière peu claire d'ailleurs par l'emploi inutile de l'intégrale de Feynmann) sont liés constitutivement à la démarche qui tente de relier la mécanique quantique à un processus markovien de position. C'est cette restriction au cadre du markovien de position qui est à l'origine des particularités relevées par Gilson. Ceci en soi ne constituerait pas un vice rédhibitoire de la théorie de Nelson comparée à l'expérience, étant entendu qu'aucune théorie stochastique ne peut s'identifier exactement à la mécanique quantique.

Mais nous allons montrer que le processus markovien de position de Nelson n'est effectivement pas compatible avec l'évolution temporelle réelle dans la mesure où celle-ci est révélée par les propriétés de réponse au champ électromagnétique.

Envisageons en effet la théorie de la réponse d'un oscillateur harmonique stochastique à une perturbation sinusoïdale. Pour étudier la réponse de manière physique il faut se placer dans l'espace de phase et l'approximation markovienne de position apparaît alors comme le cas limite où la force stochastique et l'amortissement deviennent infiniment grand par rapport à la force déterministe ((<sup>16</sup>) § 10). On ne pourrait donc pas appliquer la théorie de Kubo (<sup>18</sup>) sous sa forme habituelle où c'est précisément l'hypothèse contraire qui est faite. Heureusement, dans le cas particulier de l'oscillateur harmonique, l'équation stochastique étant linéaire, on peut faire un traitement parfaitement général tel qu'on le trouve par exemple dans l'article de Martin ((<sup>19</sup>) p. 39 à 44). Le coefficient d'absorption de l'énergie :  $a(\omega)$  est donné par les formules 15 et 12 dans (<sup>19</sup>) :

$$(13) \quad a(\omega) = \omega \chi''(\omega)$$

avec :

$$(14) \quad \chi''(\omega) = \frac{\beta\omega}{\pi[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\beta\omega)^2]}$$

où nous notons  $\beta$  le coefficient d'amortissement.

L'hypothèse markovienne pour le processus de position suppose essentiellement que  $\beta/\omega_0 \rightarrow \infty$ . La courbe représentative de  $a(\omega)$  a son maximum pour  $\omega = \omega_0$  et diminue de moitié pour  $\omega = \beta$ . Dans ces conditions le maximum devient infiniment plat. La réponse en énergie est infiniment peu sélective en fréquence.

Le même résultat est obtenu en considérant la fonction de corrélation du processus de Nelson (<sup>10</sup>) (<sup>20</sup>) qui ne présente aucun caractère périodique : elle est purement exponentielle, décroissante.

La fonction de corrélation et  $\chi''(\omega)$  sont d'ailleurs directement reliés par le théorème de fluctuation-dissipation. Toute théorie stochastique raisonnable semble donc devoir renoncer à l'hypothèse trop brutale d'un processus de position

markovien. Force stochastique et amortissement trop élevés brouillent complètement tout comportement classique du système; on ne comprend plus alors les aspects quasi classiques de la microphysique. L'Electrodynamique Stochastique va au contraire fournir un modèle où la force stochastique et l'amortissement sont faibles. De ce fait la théorie de Nelson ne constitue certainement pas une approximation de l'Electrodynamique Stochastique comme semble le suggérer Boyer ((<sup>8</sup>) p. 802).

### III - LE MODELE DE L'ELECTRODYNAMIQUE STOCHASTIQUE.

#### III.1. Origine et caractéristiques du modèle.

La quantification du champ de rayonnement pratiquée par l'Electrodynamique Quantique fait apparaître un champ électromagnétique fluctuant dans le vide. Ce champ fluctuant est à l'origine de l'effet Lamb (déplacement du niveau 2 S de l'hydrogène), dont l'explication est considérée comme un des plus remarquable succès de la physique dans l'après-guerre. Welton (<sup>21</sup>) dès 1948 suggèrait de considérer les effets de ces fluctuations sur les systèmes mécaniques, tout en se défendant de donner à cette interaction une réalité physique. De toute manière en Théorie Quantique ces fluctuations du vide n'interviennent que pour expliquer des effets faibles, traités comme le résultat de perturbations faibles.

En 1954, Braffort et Tzara (<sup>22</sup>) ont montré qu'un oscillateur harmonique classique soumis à l'action du champ électromagnétique fluctuant du vide possédait une des propriétés caractéristiques de l'oscillateur harmonique quantique : le niveau fondamental. Ce résultats a été retrouvé par Marshall (<sup>23</sup>). La propriété fondamentale du champ électrique du vide mise en jeu dans ces calculs est la forme du spectre énergétique (transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation) :

$$(15) \quad \epsilon_E(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} \frac{E_x(0) E_x(\tau) d\psi}{E_x} = \frac{\hbar}{3\pi c^3} (\omega)^3$$

Cette propriété, que Marshall trouve comme condition nécessaire pour la reproduction du comportement de l'oscillateur harmonique quantique, est déduite par Boyer en 1969 (<sup>24</sup>) sous la simple condition de l'invariance relativiste du champ électrique du vide.

En ajoutant à l'électrodynamique de Maxwell-Lorentz-Dirac, l'existence du champ électromagnétique fluctuant du vide ainsi caractérisé, Boyer fonde et développe l'Electrodynamique Stochastique (<sup>8</sup>). Un des succès les plus éclatant de cette

théorie est de retrouver la loi du rayonnement du corps noir de Planck sans hypothèse de quantification <sup>(24)</sup>.

Pour une particule chargée dans un champ de force, l'Electrodynamique Stochastique écrit l'équation stochastique fondamentale suivante (dans l'approximation non relativiste) :

$$(16) \quad m\ddot{q} = K(q) + \tau\ddot{q}' + e E(t)$$

où,  $K(q)$  est la force extérieure classique,  $\tau\ddot{q}'$  le terme d'amortissement de rayonnement ( $\tau = \frac{1}{137^3}$  u.a pour l'électron)<sup>x</sup> et  $E(t)$  un champ électrique aléatoire, à valeur moyenne nulle et dont la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation est égale à  $\epsilon_E(\omega)$ .

La faiblesse de  $\tau$  permet selon une approximation traditionnelle de remplacer  $\ddot{q}'$  par  $\frac{1}{m} K'(q)\dot{q}$ , ce qui conduit à l'équation différentielle stochastique :

$$(17) \quad m\ddot{q} = K(q) + \frac{\tau}{m} K'(q)\dot{q} + e E(t)$$

c'est une équation du type Langevin, mais avec un coefficient d'amortissement non constant et une force aléatoire qui n'est pas un bruit blanc ( $\epsilon_E(\omega) \neq \text{Constante}$ ).

### III.2. Approximation markovienne dans l'espace de phase.

Alors que pour une équation du type Langevin, la solution est un processus stochastique markovien dans l'espace de phase, il n'en est pas ainsi pour l'équation précédente. Néanmoins, il a été montré par Stratonovich <sup>(25)</sup>, Khasminski <sup>(26)</sup> et Lax <sup>(27)</sup>, que le processus solution de cette équation peut être approché par un processus markovien, si la force aléatoire est faible par rapport aux forces déterministes. Nous sommes effectivement dans ce cas, à cause de la présence du terme  $\frac{1}{C^3}$  dans  $\epsilon_E(\omega)$ .

On peut alors, suivant un procédé proposé par Lax (<sup>(27)</sup> § 5) obtenir les coefficients de l'équation de Fokker-Planck, vérifiée par la densité de probabilité dans l'espace de phase :  $R(p,q)$ , du processus markovien approximant. Sans entrer dans le détail des calculs (exposé par ailleurs <sup>(28)</sup>), écrivons l'équation résultante :

$$(18) \quad \frac{\partial R}{\partial t} = - \frac{p}{m} \frac{\partial R}{\partial q} - K(q) \frac{\partial R}{\partial p} - \frac{\tau}{m} K'(q) \frac{\partial}{\partial p} (pR) + \frac{\partial^2}{\partial p^2} (D_{pp} R)$$

<sup>x</sup>  $\tau = 2/3 c^3$ .

où  $D_{pp}$  est un terme donné par une formule explicite en fonction du spectre de la force aléatoire et de la transformation de l'espace de phase correspondant au mouvement déterministe.

L'équation FPK apparaît comme une équation de Liouville généralisée. En effet les deux premiers termes à droite sont le crochet de Poisson :  $\{R, H\}$  où  $H$  est la fonction de Hamilton classique du système. Quant aux deux derniers termes, ils correspondent à l'amortissement et à la diffusion et sont tous les deux d'ordre de grandeur  $\frac{1}{c^3}$ . Nous écrivons l'équation FPK sous la forme :

$$(19) \quad \frac{\partial R}{\partial t} = \mathcal{L}R + \mathcal{X}R$$

où  $\mathcal{L}$  est l'opérateur de Liouville classique.

Une des méthodes traditionnelles de résolution de l'équation FPK est l'emploi de la transformation de Fourier. L'Electro-dynamique Stochastique est formulée dans l'espace de phase, alors que la Mécanique Quantique est formulée dans l'espace de configuration. Une correspondance entre les formulations dans les deux espaces est connue en Mécanique Quantique comme une transformation de Fourier particulière : la transformation de Weyl. Wigner (x), que l'on peut écrire en deux étapes :

$$(20) \quad \hat{R}(q, \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(q, p) e^{2i\xi p/k} dp$$

où  $k$  est une constante à priori quelconque :

$$(21) \quad \rho(x, x') = \hat{R}\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{x-x'}{2}\right)$$

Appliquant cette transformation on peut déduire de l'équation FPK, l'équation vérifiée par la fonction transformée  $\rho(x, x')$  :

$$(22) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{ik}{2m} \left( \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial x'^2} \right) + \frac{i}{k} (x-x') K\left(\frac{x+x'}{2}\right) \rho$$

$$+ \frac{\tau}{2m} (x-x') K'\left(\frac{x+x'}{2}\right) \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial \rho}{\partial x'} \right)$$

$$- \frac{1}{\pi k^3} (x-x')^2 (\hat{D}_{pp} * \hat{R})_q = \frac{x+x'}{2}, \quad \xi = \frac{x-x'}{2}$$

(x) Nous appelons ici transformation de Weyl. Wigner la transformation inverse de la transformation de Wigner.

où \* désigne le produit de convolution et :

$$(23) \quad {}^c\mathcal{D}_{pp} = \int_{-\infty}^{+\infty} D_{pp} \cos\left(\frac{2\xi}{k} p\right) dp$$

Cette équation peut s'écrire en regroupant à droite les deux premiers termes et les deux derniers :

$$(24) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = i\hat{\mathcal{L}}\rho + \hat{\mathcal{K}}\rho$$

Trois remarques fondamentales peuvent être faites :

1°) Pour une fonction  $\rho$  réelle, la solution stationnaire vérifie simultanément les deux équations :

$$(25) \quad \hat{\mathcal{L}}\rho = 0 \quad \hat{\mathcal{K}}\rho = 0.$$

2°) Réduite à sa "partie Liouville" l'équation ressemble fortement à l'équation de Von Neumann pour le noyau  $\rho(x, x')$  de l'opérateur densité quantique  $\rho$ .

$$(26) \quad i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = [\mathbb{H}, \rho]$$

c'est-à-dire :

$$(27) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \left( \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial x'^2} \right) - \frac{i}{\hbar} (V(x) - V(x'))\rho$$

En effet pour  $k = \hbar$  ces deux équations ne diffèrent que par des termes  $O(x-x')^3$  du développement de Taylor de  $V(x) - V(x')$  ( $K = -\text{grad } V$ ).

La différence fondamentale entre notre équation et l'équation de Von Neumann, réside dans la séparabilité des variables de cette dernière; auquel cas, si  $\rho(x, x') = \psi(x)\psi(x')$ ,  $\psi(x)$  vérifie l'équation de Schrödinger. Notre équation ne vérifiera la séparation des variables que pour des potentiels particuliers (exemples : oscillateur harmonique  $K(x) = -m\omega_0^2 x$ ; rotateur rigide  $K(x) = 0$ ).

3°) Lorsque  $\hat{\mathcal{L}}\rho \neq 0$ ,  $\hat{\mathcal{K}}\rho$  est négligeable devant  $\hat{\mathcal{L}}\rho$ , à cause de la présence dans  $\hat{\mathcal{K}}$  du facteur  $\frac{1}{C^3}$ . Ainsi sur des intervalles de temps courts, l'évolution de la probabilité est essentiellement donnée par la "partie Liouville". Sur un temps plus long, l'ergodicité des processus markoviens mène vers un état stationnaire, et la "partie amortissement diffusion" n'est plus du tout négligeable en ce qui concerne le comportement global.

De même la réponse du système à une perturbation dépendante du temps et variant très rapidement sera régie en-

tièrement par le terme de Liouville. Nous en verrons l'application dans les paragraphes suivants.

Avant de discuter plus avant les rapports entre notre modèle et la théorie quantique, examinons le cas de l'oscillateur harmonique

### III.3. L'oscillateur harmonique.

Ce problème a été traité selon des voies différentes de la notre par Marshall (<sup>23</sup>), Surdin (<sup>30</sup>), Santos (<sup>34</sup>) et La Penabach (<sup>35</sup>).

Dans ce cas :

$$K(q) = - m\omega_0^2 q$$

$$(x-x') K\left(\frac{x+x'}{2}\right) = V(x) - V(x')$$

et par ailleurs : 
$$D_{PP} = \frac{e^2 \hbar}{3c^3} \omega_0^3$$

On a donc successivement :

l'équation FPK :

$$(28) \quad \frac{\partial R}{\partial t} = - \frac{P}{m} \frac{\partial R}{\partial q} + m\omega_0^2 q \frac{\partial R}{\partial p} + \tau\omega_0^2 \frac{\partial}{\partial p} (PR) + \frac{e^2 \hbar}{3c^3} \omega_0^3 \frac{\partial^2 R}{\partial p^2}$$

et l'équation transformée de Weyl-Wigner.

$$(29) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{ik}{2m} \left( \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial x'^2} \right) + \frac{i}{k} (V(x) - V(x')) \rho - \tau\omega_0^2 \frac{x-x'}{2} \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial \rho}{\partial x'} \right) - \frac{D_{PP}}{k^2} (x-x')^2 \rho$$

La solution stationnaire de cette dernière équation doit satisfaire simultanément les deux équations issues de la partie imaginaire et de la partie réelle. De plus on voit que l'on peut chercher une solution de ces équations sous forme séparée :

$$\rho(x, x') = \psi(x) \psi(x')$$

La partie imaginaire conduit exactement à l'équation de Schrödinger indépendante du temps pour  $\psi$  (avec  $k$  au lieu de  $\hbar$ ), d'où :

$$(30) \quad \psi = \left( \frac{m\omega_0}{k\pi} \right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega_0}{2k} x^2}$$

La partie réelle, après séparation donne :

$$(31) \quad \frac{d \operatorname{Log} \psi}{dx} = \frac{2D}{\tau \omega_0^2 k^2} x + C$$

d'où :

$$(32) \quad \psi = e^{-\frac{h\omega_0 m}{k^2} \frac{x^2}{2} + Cx + B}$$

Puisque l'on veut obtenir la même solution que pour la partie imaginaire, ceci impose  $C = 0$ ,  $e^B = \left(\frac{m\omega_0}{k\pi}\right)^{1/4}$  et surtout (comme on s'y attendait) :

$$(33) \quad k = \hbar$$

Mais le fait qui apparaît essentiel est que la séparation des variables a lieu pour  $k = \hbar$ , quelle que soit la fréquence  $\omega_0$  de l'oscillateur (c'est-à-dire quel que soit le potentiel).

On peut en effet remarquer que notre équation FPK est tout à fait analogue à celle de l'oscillateur harmonique brownien (équation 51 (29)). Le coefficient de friction  $\beta$  vaut ici  $\tau \omega_0^2$ , mais le coefficient de diffusion  $D$  dépend chez nous de la fréquence  $\omega_0$  (et ceci d'une manière spécifique à notre bruit en  $|\omega|^3$ ). Pour l'oscillateur brownien la condition de séparabilité de l'équation transformée n'est pas universelle, et s'exprime simplement par :

$$(34) \quad \frac{1}{k} = \frac{\beta m}{2D} \omega_0$$

Remarquons aussi que nous avons là pour l'oscillateur harmonique exactement l'équation trouvée selon une autre voie par Surdin ((30) équation 43). ( $\beta = \tau \omega_0^2$ ,  $\frac{Sm^2}{2} = D_{pp}$ ; dans notre équation le terme  $S$  est limité au terme principal de la formule (28) de Surdin, car nous avons négligé l'amortissement dans le mouvement déterministe lors du calcul de  $D_{pp}$ ).

Il faut cependant souligner que la méthode de résolution approchée de Lax est tout à fait générale, alors que le procédé utilisé par Surdin ne vaut que pour l'oscillateur harmonique.

En conséquence l'équation F P K "générale" (éq. 43) qu'il écrit n'est pas correcte dans le cas général; ce n'est d'ailleurs rien d'autre que l'équation de Kramers (<sup>31</sup>) - équation F P K d'un mouvement brownien (force aléatoire bruit blanc !) avec amortissement constant - dont la solution stationnaire est une

distribution de Gibbs et n'a aucun rapport avec la mécanique quantique. Nous pouvons maintenant discuter brièvement le rapport général entre le modèle de l'Electrodynamique Stochastique et la Mécanique Quantique.

En E.D.S. nous avons deux descriptions des systèmes, l'une dans l'espace de phase et l'autre dans un espace abstrait obtenu à partir de l'espace de phase par la transformation de Weyl. Wigner. Dans cet espace abstrait la "diagonale" est isomorphe à l'espace de configuration ( $x = x' = q$  et  $\rho(x,x) = \int R(\rho,q) dq$ ).

L'équation FPK dans l'espace de phase, voit sa partie Liouville transformée en une partie très analogue à l'équation de Von Neumann, par transformation de Weyl. Wigner.

La distribution de probabilité d'équilibre est déterminée à la fois par la "partie Liouville" et par la "partie amortissement diffusion". Pour l'oscillateur harmonique les deux contraintes peuvent être simultanément remplies par une solution séparable. Le pari simplificateur de la Mécanique Quantique serait de choisir la description dans l'espace abstrait et d'y admettre que la solution est toujours séparable. Ce qui aboutit à écrire l'équation de Von Neumann comme équation fondamentale de la théorie et à privilégier ses solutions séparables, qui conduisent à l'équation de Schrödinger. Ce faisant, la Mécanique Quantique, considérée comme solution approchée de l'E.D.S., détruit certaines caractéristiques du modèle stochastique. Elle perd en particulier le caractère strictement positif de la transformée de Wigner de  $\rho(x,x')$ , et ne sait plus formuler sa problématique dans l'espace de phase. Il semble cependant que ce faisant, tout en simplifiant, par l'hypothèse de séparabilité, la résolution du problème, la mécanique quantique conserve certaines propriétés fondamentales, en particulier les propriétés de réponse au champ électromagnétique. Ces propriétés de réponse sont entièrement déterminées par la partie Liouville en E.D.S. et donc par l'équation de Von Neumann (éq. de Schrödinger) en mécanique quantique.

Ainsi pour l'oscillateur harmonique en E.D.S. peut-on appliquer la théorie de la réponse linéaire de Kubo (<sup>18</sup>). On trouve, et ceci constitue une caractéristique remarquable de l'oscillateur harmonique, que la réponse au champ électromagnétique ne dépend pas de la distribution de probabilité à l'équilibre. La réponse de l'oscillateur harmonique est résonnante à sa propre fréquence  $\omega_0$ . Dans ce discours classique on obtient une absorption privilégiée d'énergie à la fréquence propre de l'oscillateur. Dans le discours, mathématiquement équivalent, de la mécanique quantique, on parle de transition entre "niveaux d'énergie  $E_1$  et  $E_0$ , avec absorption privilégiée à la fréquence

$\frac{E_1 - E_0}{h}$ . Mais de notre point de vue le discours quantique est purement mathématique et l'on peut douter du sens physique des "phénomènes" qui semblent s'y dérouler.

L'absorption d'énergie résonnante s'oppose ainsi à une soi disant transition énergétique précise du système, mettant d'ailleurs en doute par la même occasion le concept de photon, ce qui est dans la parfaite logique de l'Electrodynamique Stochastique.

#### III.4. Le rotateur rigide.

Considérons un rotateur rigide caractérisé par un moment d'inertie  $I$  et un moment dipolaire  $\mu$ .

##### A) Le rotateur rigide plan.

Espace de phase : variables  $\theta$ ,  $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ .

Equation différentielle stochastique fondamentale :

$$(35) \quad \frac{d(I\omega)}{dt} = - \frac{2\mu^2\omega^3}{3c^3} + \vec{\mu} \wedge \vec{E}(t)$$

c'est l'équation écrite par Boyer (<sup>32</sup>). Appliquons lui la méthode de résolution approchée de Lax, nous obtenons :

$$(36) \quad D_{\omega\omega} = \frac{1}{2} f\mu^2 |\omega|^3. \quad f = \text{constante}$$

d'où l'équation FPK pour la densité de probabilité  $W(\theta, \omega)$  :

$$(37) \quad \frac{\partial W}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial \theta} (\omega W) - \frac{\partial}{\partial \omega} \left[ \left( - \frac{2}{3} \frac{\mu^2 \omega^3}{Ic^3} + \frac{3f\mu^2}{2I^2} \omega^2 \text{sgn}(\omega) \right) W \right] \\ + \frac{1}{2} \frac{f\mu^2}{I^2} \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} (|\omega|^3 W).$$

c'est-à-dire :

$$(38) \quad \frac{\partial W}{\partial t} = - \omega \frac{\partial W}{\partial \theta} + \frac{2}{3} \frac{\mu^2}{Ic^3} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega^3 W) + \frac{\mu^2 f}{2I^2} \frac{\partial}{\partial \omega} (|\omega|^3 \frac{\partial W}{\partial \omega})$$

Cette équation a une solution stationnaire de la forme :

$$(39) \quad W(\theta, \omega) = W_\theta(\theta) W_\omega(\omega)$$

et l'on obtient aisément :

$$W_\theta(\theta) = \text{constante}$$

$$(40) \quad W_{\omega}(\omega) = \text{constante} e^{-\frac{2I}{\hbar} \omega} = \frac{2I}{\hbar} e^{-\frac{2I}{\hbar} \omega}$$

ce qui est précisément le résultat obtenu par Boyer (<sup>32</sup>) (formule 45).

La mécanique quantique trouve évidemment aussi que  $W_{\theta}(\theta) =$  constante, mais elle ne trouve pas la même expression pour  $W_{\omega}(\omega)$ . Ceci entraîne qu'alors que l'E.D.S. donne une énergie moyenne  $\frac{\hbar^2}{4I}$  au rotateur plan dans son état stationnaire, la mécanique quantique trouve zéro pour l'état fondamental. Paradoxe sur lequel la mécanique quantique reste silencieuse, d'autant plus qu'elle triomphait en trouvant dans les mêmes circonstances une énergie non nulle ( $\frac{\hbar\omega_0}{2}$ ) pour l'oscillateur harmonique. Appliquons maintenant au rotateur plan de l'E.D.S. la théorie de la réponse de Kubo (<sup>18</sup>); nous avons déjà remarqué que la réponse au champ électromagnétique peut se calculer entièrement à partir de la seule "partie Liouville" de l'équation FPK.

On trouve pour l'énergie absorbée dans la bande de fréquence  $\omega$ ,  $\omega + d\omega$  par unité de temps et par absorbeur élémentaire :

$$(41) \quad -\frac{2\pi^2\mu^2}{3I} \omega \frac{dW(\omega)}{d\omega} \rho(\omega) d\omega = a(\omega) \rho(\omega) d\omega$$

où  $\rho(\omega)$  est la densité spectrale d'énergie du champ électromagnétique et  $a(\omega)$  est le coefficient d'absorption par absorbeur élémentaire.

La formule ainsi obtenue est exactement celle obtenue par Planck en 1917 dans un travail qui ne semble pas très connu (<sup>33</sup>). Planck soulignait déjà que l'absorption n'est pas proportionnelle à  $W(\omega)$  mais à une fonction de  $\omega$  et  $W(\omega)$  qui dépend spécifiquement du système.

Cette fonction apparaît dans la théorie de Kubo lors du calcul de la fonction  $\chi''(\omega)$ . Le mérite de la théorie de Planck est de donner une raison physique à ce paradoxe; un oscillateur harmonique de fréquence  $\omega$  absorbe le champ électromagnétique à la fréquence  $\omega$  sans changer lui-même de fréquence; il n'en est pas ainsi pour les autres systèmes physiques et le bilan d'absorption reflète en quelque sorte la dynamique de l'absorption : peuplement et dépeuplement des fréquences.

Si pour le rotateur plan on utilise l'expression de  $W(\omega)$  trouvée plus haut, on voit que l'absorption d'énergie à partir du champ électromagnétique est proportionnelle à  $\omega e^{-\frac{2I}{\hbar} \omega}$ . Cette absorption passe par un maximum pour :

$$(42) \quad \omega_{\max} = \frac{\hbar}{2I}$$

C'est exactement la valeur prévue pour le rotateur plan par la théorie quantique, qui calcule cette fréquence comme différence entre deux valeurs propres jouant le rôle de termes spectraux. A  $T = 0$  seule cette absorption privilégiée se manifeste. On retrouve à nouveau la différence fondamentale entre le langage de l'E.D.S. et le langage de la théorie quantique.

Remarquons que la connaissance de l'expression donnant l'absorption d'énergie à partir du champ électromagnétique permet de vérifier que l'état stationnaire résulte d'un équilibre à chaque fréquence entre l'énergie absorbée à partir du champ électromagnétique du vide et l'énergie émise par rayonnement.

La première vaut (x) :

$$(43) \quad - \frac{2\pi^2\mu^2}{3I} \omega \frac{dW(\omega)}{d\omega} = \frac{\hbar}{2\pi^2c^3} \omega^3$$

La seconde vaut (cf. (32) formule 9) :

$$(44) \quad \frac{2}{3}\mu^2 \frac{\omega^4}{c^4} W(\omega)$$

d'où :

$$(45) \quad - \frac{\hbar}{2I} \frac{dW(\omega)}{d\omega} = W \quad \text{et } W = \text{constante} \cdot e^{-\frac{2I}{\hbar} \omega}$$

ce résultat est un signe de cohérence interne de la théorie.

#### B) Le rotateur rigide spatial.

Nous allons appliquer au rotateur spatial le principe d'équilibre précédemment explicité. Ceci est possible en utilisant la formule pour l'absorption d'énergie donnée par Planck :

$$(46) \quad - \frac{2\pi^2\mu^2}{3I} \omega^2 \frac{d}{d\omega} \left( \frac{W(\omega)}{\omega} \right) \rho(\omega) d\omega = a(\omega) \rho(\omega) d\omega$$

On voit que cette formule donne une dépendance à  $\omega$ ,  $W(\omega)$  différente de celle obtenue pour le rotateur plan.

Si comme précédemment on écrit que l'état stationnaire résulte d'un équilibre entre l'absorption à partir du champ du vide et le rayonnement émis (formule 44), on obtient :

$$(47) \quad - \frac{\hbar}{2I} \omega \frac{d}{d\omega} \left( \frac{W}{\omega} \right) = W \quad \text{d'où } W = \text{constante} \cdot \omega e^{-\frac{2I}{\hbar} \omega}$$

---

(x) On remarquera que pour le champ du vide  $\frac{4\pi}{3} \rho(\omega) = 2\varepsilon(\omega)$ .  
(cf. (34)).

Si l'on reporte cette expression dans la formule de Planck (46) donnant l'absorption d'énergie, on trouve un maximum pour :

$$(48) \quad \omega_{\max} = \frac{h}{I}$$

c'est exactement, à nouveau, le résultat que la mécanique quantique obtient pour le rotateur rigide spatial, par différence entre les deux premières valeurs propres de l'équation de Schrödinger.

Ce faisant, l'E.D.S. comme la mécanique quantique trouve une différence entre le rotateur plan et le rotateur spatial. Ce n'était pas le cas pour l'ancienne théorie des quanta. Dès 1917, Planck avait en main tous les éléments de notre calcul !

On n'a envisagé jusqu'à présent que la position en fréquence du maxima du coefficient d'absorption  $a(\omega)$ . Mais on voit que le profil de raie "individuel" obtenu est relativement large. Or dans la réalité expérimentale les profils étroits sont obtenus par passage du rayonnement électromagnétique à travers un grand nombre de systèmes absorbants individuels.

Notre coefficient d'absorption est individuel et n'est pas le coefficient d'absorption phénoménologique macroscopique. Il serait donc nécessaire du point de vue théorique d'étudier d'une manière plus approfondie la réaction d'un ensemble physique de systèmes à un champ électromagnétique extérieur. Une telle étude serait analogue à celle de la théorie classique de la dispersion et de l'absorption qui envisage l'effet du champ électromagnétique sur un ensemble d'oscillateurs harmoniques. Mais dans notre cas les systèmes individuels ont un comportement plus complexe.

#### IV - C O N C L U S I O N .

L'Electrodynamique Stochastique apparaît donc comme un modèle physique a priori, où l'élément stochastique est un parti pris descriptif simplificateur pour tenir compte du champ électromagnétique du vide. Dans le cas de l'oscillateur harmonique cette théorie retrouve exactement les résultats de la théorie quantique. Pour le rotateur rigide elle retrouve les résultats essentiels de la théorie quantique, en particulier les propriétés de réponse au champ électromagnétique.

De ce point de vue la mécanique quantique apparaît comme un formalisme exprimant dans un espace abstrait ce que l'E.D.S. formule dans l'espace de phase. Ce passage à l'espace abstrait serait une manière de se placer dans des conditions où l'on peut découpler les variables de position et d'impulsion. La transformation de Weyl-Wigner engendre un tel espace abstrait et la mécanique quantique y suppose toujours vérifiée la séparation des variables. Comme ceci n'est qu'approché, ce que la mécanique quantique gagne en simplicité de calcul, elle le perd en signification de ses structures. En particulier elle perd ainsi une partie des caractéristiques probabilistes de la théorie originale. De plus dans l'espace abstrait elle ne sait pas bien distinguer état et réponse, quoiqu'elle insiste sur ce fait fondamental qu'une observable est avant tout une propriété de réponse.

Pour terminer nous soulignerons que dans la mesure où l'hypothèse de séparabilité est vérifiée, c'est-à-dire, où dans l'espace abstrait la densité de probabilité se présente sous forme d'un produit, et où les densités de probabilité marginales en position et en impulsion sont transformées de Fourier l'une de l'autre, la théorie présente un "caractère ondulatoire formel". Ce caractère formel résulte du caractère abstrait de l'espace où la mécanique quantique se situe. La théorie stochastique permettrait ainsi de "comprendre" les phénomènes d'optique corpusculaire sans pour autant leur associer des ondes physiques réelles, d'une autre nature que les ondes électromagnétiques.

## BIBLIOGRAPHIE

- (<sup>1</sup>) D'Espagnat B. : (ed) Foundations of quantum mechanics (Proc. of the Intern. School of Physics "Enrico Fermi" Course 49), Academic Press N.Y. 1971.
- (<sup>2</sup>) Scheibe E. : The logical analysis of quantum mechanics. Pergamon Press 1973.
- (<sup>3</sup>) Belinfante F.J. : A survey of hidden variables theories. Pergamon Press 1973.
- (<sup>4</sup>) Belinfante F.J. : Measurements and time reversal in objective quantum theory. Pergamon Press 1975.
- (<sup>5</sup>) D'Espagnat B. : Conceptual foundations of quantum mechanics Benjamin, Reading, Mass. 1971.
- (<sup>6</sup>) Bub J. : The interpretation of quantum mechanics. Reidel Dordrecht, 1974.
- (<sup>7</sup>) Jammer M. : The philosophy of quantum mechanics. The interpretations of quantum mechanics in historical perspective. Wiley, 1974.
- (<sup>8</sup>) Boyer T.H. : Phys. Rev. D 11, 790, 1975 fournit une revue complète des travaux de cet auteur.
- (<sup>9</sup>) Gilson J.G. : Proc. of the Cambridge Philos. Soc. 64, 1061, 1968.
- (<sup>10</sup>) Claverie P. et Diner S. : dans "Localization and Delocalization in quantum Chemistry" (eds. Chalvet O.; Daudel R.; Diner S. and Malrieu J.P.) vol. II, p. 375, Reidel Dordrecht, 1976.
- (<sup>11</sup>) Ballentine L.E. : Rev. Mod. Phys. 42, 358, 1970.
- (<sup>12</sup>) Accardi L. : Non relativistve quantum mechanics as a non-commutative markof process. (preprint.May 1975).
- (<sup>13</sup>) Bass J. : "Les fonctions pseudo-aléatoires" Gauthier-Villars, Paris 1962. J. Math. Anal. Appl. 47, 354 et 458, 1974.

- (<sup>14</sup>) Fenyés I. : Zeit. f. Phys. 132, 81, 1952.
- (<sup>15</sup>) Nelson E. : Phys. Rev. 150, 1079, 1966.
- (<sup>16</sup>) Nelson E. : Dynamical theories of Brownian, Princeton University Press, 1967.
- (<sup>17</sup>) De La Pena-Auerbach L. : J. Math. Phys. 10, 1620, 1969.
- (<sup>18</sup>) Kubo R. : J. Phys. Soc. Japan, 12, 570, 1957.
- (<sup>19</sup>) Martin P.C. : dans Problème à N corps. Many. body Physics Gordon and Breach 1968 p. 39.
- (<sup>20</sup>) Claverie P. et Diner S. : C.R. Acad. Sc. 280 B, 1, 1975.
- (<sup>21</sup>) Welton T.A. : Phys. Rev. 74, 1157, 1948.
- (<sup>22</sup>) Braffort P. et Tzara C. : C.R. Acad. Sc. (Paris) 239, 1779, 1954.
- (<sup>23</sup>) Marshall T.W. : Proc. Roy. Soc. 276 A, 475, 1963.
- (<sup>24</sup>) Boyer T.H. : Phys. Rev. 182, 1374, 1969.
- (<sup>25</sup>) Stratonovich R.L. : Conditionnal Markov processes and their application to the theory of optimal control. Elsevier N.Y., 1967.
- (<sup>26</sup>) Khas'minski R.Z. : Theory Prob. Appl. 11, 390, 1966.
- (<sup>27</sup>) Lax M. : Rev. Mod. Phys. 38, 541, 1966.
- (<sup>28</sup>) Claverie P. et Diner S. : Stochastic electrodynamics and the Weyl. Wigner transform. (à paraître).
- (<sup>29</sup>) Ming Chen Wang and Uhlenbeck G.E. : Rev. Mod. Phys. 17, 323, 1945.
- (<sup>30</sup>) Surdin M. : Ann. Institut Henri Poincaré 15A, 203, 1971.
- (<sup>31</sup>) Kramers H.A. : Physica 7, 284, 1940.
- (<sup>32</sup>) Boyer T.H. : Phys. Rev. D., 1, 2257, 1970.
- (<sup>33</sup>) Planck M. : Annalen der. Physik. 52, 491, 1917. 53, 241, 1917.
- (<sup>34</sup>) Santos E. : Il Nuovo Cimento 19 B, 57, 1974.

(<sup>35</sup>) De La Pena Auerbach L. and Cetto A.M. : The harmonic oscillator in a random electromagnetic field : Schrödinger's equation and radiative corrections (preprint 1974).