Annales de la Fondation Louis de Broglie - Vol. 2, n° 2, 1977

REMARQUES SUR LES DYNAMIQUES NON HAMILTONIENNES

par M. Maurice SURDIN
Université de Bordeaux I - 33405 - Talence France

(manuscrit reçu le 21 Février 1977)

Résumé : A la suite des discussions qui ont eu lieu au Séminaire de la Fondation Louis de Broglie pendant l'hiver 1976-1977, l'auteur expose diverses considérations sur la notion de force dissipative et sur les fluctuations d'un système dynamique au voisinage d'un équilibre.

1°) Il est intéressant de noter qu'alors que la mécanique newtonienne a élaboré tous les formalismes nécessaires pour traiter les problèmes où la dissipation intervient, la plupart des traités modernes de la mécanique (1) (2) leur consacrent très peu de place.

Cet état de choses est probablement dû au fait que ces traités modernes sont destinés surtout aux futurs physiciens quanticiens, qui eux se soucient peu des problèmes de dissipation (voir par exemple le cours de Messiah (3), où le vocable "dissipation" est absent de l'index).

Cependant, déjà Langevin, pour étudier le mouvement brownien, a renoncé à la description hamiltonienne différentielle continue du mouvement.

Les dynamiques non hamiltoniennes ont été abondamment étudiées dans le cadre des travaux sur la stabilité du mouvement. C'est au cours des quinze dernières années que des études approfondies ont été consacrées aux dynamiques non hamiltoniennes appliquées à la microphysique (4) (5).

Dans ce qui suit on se propose de se limiter à quelques remarques concernant des systèmes dissipatifs. Ces remarques résultent de l'étude de quatre exemples dont les deux premiers sont empruntés à la macrophysique; le troisième peut être considéré à la fois comme un exemple de micro ou de macrophysique; le quatrième est relatif à la microphysique.

2°) Soit un système "autonome" obéissant à une équation différentielle du second ordre, par exemple un circuit électrique LCR, non "forcé" en équilibre thermodynamique à la température T avec un thermostat :

$$L.\ddot{q} + R.\dot{q} + \frac{1}{C} q = 0 \qquad (2.1)$$

En fait il <u>n'existe pas de systèmes autonomes</u>; dans le cas considéré il apparait aux bornes du condensateur une tension fluctuante V donnée par la relation d'Einstein :

$$\frac{1}{2} C\overline{V^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\overline{q^2}}{C} = \frac{1}{2} kT \qquad (2.2)$$

L'éq(2.1) doit être modifiée, le système n'étant pas autonome, pour tenir compte de la f.é.m. fluctuante e(t), on a :

$$L.\ddot{q} + R.\dot{q} + \frac{1}{C} q = e(t) \qquad (2.3)$$

Cette équation appelle les observations suivantes :

a) la valeur moyenne de e(t) est nulle,

b) le carré moyen de e(t) est différent de zéro,

c) le "temps de corrélation" de e(t) est très court comparé à la constante du temps du circuit; il s'ensuit que pour tout circuit utilisé dans la pratique e(t) est un "bruit blanc",

d) dans le cadre de la thermodynamique, e(t) s'annule pour T = 0 mais à cette température <u>le terme dissipatif R s'annule aussi.</u>

Les quatre propriétés citées plus haut sont très générales, on les retrouve dans les cas d'autres systèmes, en particulier des systèmes mécaniques.

La propriété (d) est très importante; elle montre qu'une relation étroite existe entre le terme dissipatif et la "force" fluctuante. Cette propriété sera illustrée plus bas, particulièrement

lors de l'étude d'un galvanomètre à cadre mobile.

Appliquons à l'éq(2.3) une méthode inspirée de celle que Langevin a utilisé pour étudier le mouvement brownien; multiplions les deux membres de l'éq(2.3) non par q comme le fait Langevin, mais par $\dot{q}$ et faisons la moyenne dans le temps (*); on a :

$$L.\overline{\ddot{q}.\dot{q}} + R.\overline{\dot{q}^2} + \frac{1}{C}\overline{q.\dot{q}} = \overline{\dot{q}.e(t)} \qquad (2.4)$$

Comme $\ddot{q}$ et $\dot{q}$ ainsi que $\dot{q}$ et q ne sont pas corrélés, la moyenne de leur produits est nulle, donc :

$$\overline{\ddot{q}\,\dot{q}} = 0 \quad ; \qquad \overline{\dot{q}\,q} = 0 \qquad (2.5)$$

d'où :

$$R.\overline{\dot{q}^2} = \overline{\dot{q}.e(t)} \qquad (2.6)$$

Cette équation s'écrit sous une forme plus familière :

$$R.\overline{i^2} = \overline{i.e(t)} \qquad (2.6\text{ bis})$$

L'énergie dissipée par unité de temps - la puissance moyenne dissipée - est donc exactement compensée par la puissance moyenne fournie par la source fluctuante. De plus :

$\ddot{q}\,\dot{q} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\dot{q}^2$ et $\dot{q}\,q = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}q^2$, les équations (2.5) peuvent s'écrire :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\overline{\dot{q}^2} = 0 \; ; \quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\overline{q^2} = 0$$

d'où :

$$\frac{1}{2}\overline{\dot{q}^2} = \text{Cte} \; ; \qquad \frac{1}{2}\overline{q^2} = \text{Cte} \qquad (2.7)$$

Les éqs(2.7) correspondent à celles d'Einstein, à savoir :

$$(1/2)L.\overline{\dot{q}^2} = (1/2)\overline{q^2}/C = (1/2)kT \qquad (2.8)$$

On tire une conséquence importantes :

(*) L'unité de temps utilisée pour l'intégration doit être choisie très grande comparée au temps de corrélation mais elle peut être aussi très petite comparée à la constante de temps du circuit.

une trajectoire stationnaire-en-moyenne est possible.

Si les conditions initiales sont données par $q(0) = q°$ et $\dot{q}(0) = \dot{q}°$, c'est-à-dire si on fournit au système au temps $t = 0$ une énergie potentielle $(1/2)q°^2/C$ et une énergie cinétique $(1/2)L\dot{q}°^2$ celle-ci vient en sus de l'énergie d'équilibre (2.8) et la "température équivalente" du système devient supérieure à la température du thermostat T : l'équilibre thermodynamique est rompu. L'énergie initiale se dissipera jusqu'à ce que l'équilibre thermodynamique soit rétabli.

3°) Soit maintenant un galvanomètre à cadre mobile, en équilibre thermodynamique avec un thermostat à la température T. On considère, successivement, les deux cas suivants :

- le galvanomètre est en circuit ouvert,
- le galvanomètre est en circuit fermé.

Dans le premier cas, entre en jeu uniquement le couple fluctuant mécanique avec la dissipation correspondante. Dans le deuxième cas, on doit considérer à la fois le couple fluctuant électrique et mécanique avec leurs dissipations respectives. On montre que dans les deux cas la déviation quadratique moyenne totale est la même : c'est celle qui correspond à l'équilibre thermodynamique. Ce qui suit précise des résultats obtenus par l'auteur en 1949 [7] et repris notamment par C. Kittel dans son traité de statistique.

Dans le premier cas le galvanomètre est régi par l'équation différentielle suivante :

$$I\ddot{\theta} + f\dot{\theta} + C\theta = K(t) \qquad (3.1)$$

où θ est l'angle de déviation :

I   est le moment d'inertie,

f   est le coefficient d'amortissement mécanique (le terme dissipatif)

C   est la constante de torsion, et

K(t)   est le couple fluctuant dû au mouvement d'agitation thermique des particules gazeuses qui frappent l'équipage mobile.

On notera que le terme dissipatif, l'amortissement f, est dû lui aussi aux chocs des particules gazeuses sur l'équipage.

L'équation d'Einstein, dans ce cas, est :

$$(1/2)\ C.\overline{\theta^2} = (1/2)kT \qquad (3.2)$$

Les propriétés (a), (b), (c) et (d) sont encore valables ici.

On va établir l'expression de l'intensité spectrale du couple fluctuant $\overline{K^2_\nu}$. Bernamont [6] a proposé une méthode simple qui permet de calculer cette expression. Pour un système soumis à l'action d'une "force" fluctuante on peut définir une fonction de transfert à la fréquence ν, désignée par A_ν et donnée par :

$$A^2_\nu = \frac{\overline{\theta^2_\nu}}{\overline{K^2_\nu}} \qquad (3.3)$$

où $\overline{\theta^2_\nu}$ représente la densité spectrale de θ.

On a :

$$\overline{\theta^2} = \int_0^\infty \overline{\theta^2_\nu} d\nu = \int_0^\infty A^2_\nu\ \overline{K^2_\nu}\ d\nu \qquad (3.4)$$

Tenant compte de la propriété (c), on peut écrire :

$$\overline{K^2_\nu} = 4\int_0^\infty \phi_{KK}(\tau)\ d\tau \qquad (3.5)$$

où $\phi_{KK}(\tau)$ est la fonction d'autocorrélation de K(t). En effet $\overline{K^2_\nu}$, l'intensité spectrale de K(t), est indépendante de la fréquence ν (bruit blanc), puisque le temps de corrélation de K(t) est court comparé à la constante de temps du galvanomètre. Dans ces conditions (3.4) s'écrit :

$$\overline{\theta^2} = \overline{K^2_\nu} \int_0^\infty A^2_\nu\ d\nu \qquad (3.6)$$

Tenant compte de l'équation d'Einstein (3.2), l'éq(3.6) devient :

$$\overline{K^2_\nu} \int_0^\infty A^2_\nu\ d\nu = \frac{kT}{C} \qquad (3.7)$$

Pour calculer A_ν^2 on remarque que (3.1) est un cas particulier d'une équation plus générale ayant la forme :

$$\sum_m a_m \frac{d^m\theta}{dt^m} = \sum_i b_i \frac{d^iK}{dt^i} \qquad (3.8)$$

Bernamont (l.c.) a montré que pour un système obéissant à une équation du type (3.8) on a :

$$A_\nu^2 = \frac{\sum\limits_{i,j} (p)^{(-1)^{\frac{i-j}{2}}}\, \omega^{\frac{i+j}{2}}\, b_i b_j}{\sum\limits_{m,n} (p)^{(-1)^{\frac{i-j}{2}}}\, \omega^{\frac{m+n}{2}}\, a_m a_n} \qquad (3.9)$$

où $\omega = 2\pi\nu$. Les sommes sont étendues à tous les termes pour lesquels m + n est pair; les termes pour lesquels m ≠ n doivent être comptés deux fois.

L'éq(3.9) appliquée au cas présent donne :

$$A_\nu^2 = \frac{1}{f^2\omega^2 + (I\omega^2 - C)^2} \qquad (3.10)$$

Combinant (3.7) et (3.10), on obtient :

$$\frac{kT}{C} = \frac{K_\nu^2}{2\pi} \int_0^\infty \frac{d\omega}{f^2\omega^2 + (I\omega^2 - C)^2} = \frac{\overline{K_\nu^2}}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{2fC} = \frac{\overline{K_\nu^2}}{4fC} \text{ d'où}$$

$$\overline{K_\nu^2} = 4fkT \qquad (3.11)$$

L'éq(3.11) donne l'intensité spectrale du couple fluctuant. Elle est de la même forme que celle qui donne l'intensité spectrale de la f.é.m. fluctuante aux bornes de la résistance du circuit LCR, à savoir :

$$\overline{e_\nu^2} = 4RkT \qquad (3.12)$$

On considère maintenant le cas d'un galvanomètre en circuit fermé. Soit R la résistance totale du circuit de mesure, L la self-inductance, Φ le flux embrassé par le cadre et e(t) la f.é.m. de fluctuation dûe à l'effet thermique. L'équation du galvanomètre devient :

$$I\ddot{\theta} + \left(f + \frac{\Phi^2}{R}\right)\dot{\theta} + C\theta = K(t) + \frac{\Phi}{R}\, e(t) \qquad (3.13)$$

où on a négligé les termes de l'ordre de $L\omega/R$. Φ^2/R est l'amortissement électrique du galvanomètre.

Comme K(t) et e(t) sont indépendants, on a :

$$\overline{\theta^2} = \int_0^\infty \left(\overline{K_\nu^2} + \frac{\Phi^2}{R^2}\,\overline{e_\nu^2}\right) A_\nu^2\, d\nu \qquad (3.14)$$

Tenant compte des eqs(3.9), (3.11) et (3.12), l'éq(3.14) devient :

$$\overline{\theta^2} = \frac{4kT}{2\pi}\left(f + \frac{\Phi^2}{R}\right) \int_0^\infty \frac{d\omega}{\left(f + \frac{\Phi^2}{R}\right)^2 \omega^2 + (I\omega^2 - c)^2}$$

$$= \frac{4kT\left(f + \frac{\Phi^2}{R}\right)}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{2\left(f + \frac{\Phi^2}{R}\right)C} = \frac{kT}{C} \qquad (3.15)$$

D'après (3.15) la fluctuation totale du galvanomètre, $\overline{\theta^2}$, est indépendante du coefficient d'amortissement mécanique f et de la résistance électrique totale du circuit R. Elle est la même si le circuit est ouvert ou fermé. La comparaison des deux cas - circuit ouvert et circuit fermé - montre que, lorsqu'on ajoute une nouvelle force fluctuante, on ajoute en même temps un terme dissipatif correspondant. Le résultat final montre que la fluctuation totale $\overline{\theta^2}$ est celle de l'équipartition, à condition de tenir compte de toutes les forces fluctuantes et des dissipations correspondantes.

4°) Dans ce paragraphe on va étudier le mouvement d'un système mécanique obéissant à l'équation différentielle suivante :

$$m.\ddot{r} + \beta\dot{r} + \frac{dU(r)}{dr} = F(t) \qquad (4.1)$$

où U(r) est un potentiel ne dépendant que de la coordonnée r et F(t) la force fluctuante.

L'application de la méthode de Langevin conduit au même résultat que celui obtenu pour le circuit électrique, à savoir : une trajectoire stationnaire-en-moyenne est possible.

Considérons maintenant le cas particulier où le potentiel U(r) est en 1/r, on a :

$$m.\ddot{r} + \beta\dot{r} + \frac{k}{r^2} = F(t) \qquad (4.2)$$

La projection sur deux axes perpendiculaires donne deux équations du type suivant :

$$m.\ddot{x} + \beta\dot{x} + \frac{kx}{r_0^3} = F_x(t) \quad \text{ou encore}$$

$$\left.\begin{aligned} m.\ddot{x} + \beta\dot{x} + m\,\omega_0^2\,x &= F_x(t) \\ m.\ddot{y} + \beta\dot{y} + m\,\omega_0^2\,y &= F_y(t) \end{aligned}\right\} \qquad (4.3)$$

où r_0 est le "rayon moyen" de l'orbite de $\omega_0^2 = \frac{k}{mr_0^3}$. $F_x(t)$ et $F_y(t)$ sont les projections sur les axes considérés de $F(t)$. $F_x(t)$ et $F_y(t)$ sont indépendants.

Pour décrire le mouvement des planètes autour du soleil on doit modifier les éqs(4.3). Dans le cas présent on a un mouvement sur une orbite moyenne, résultant de l'action d'une force centrale et décrit par les éqs(4.4), auquel se superpose un mouvement fluctuant décrit par les éqs(4.5)

$$m\ddot{x} \qquad + m\,\omega_0^2\,x = 0; \qquad m\ddot{y} \qquad + m\,\omega_0^2\,y = 0 \qquad (4.4)$$

$$m\ddot{u} + \beta\dot{u} + m\,\omega_0^2\,u = F_x(t); \qquad m\ddot{v} + \beta\dot{v} + m\,\omega_0^2\,v = F_y(t) \qquad (4.5)$$

Les équations du mouvement sont alors :

$$\begin{aligned} m(\ddot{x} + \ddot{u}) + \beta\dot{u} + m\omega_0^2(x + u) &= F_x(t) \;; \\ m(\ddot{y} + \ddot{v}) + \beta\dot{v} + m\omega_0^2(y + v) &= F_y(t) \;; \end{aligned} \qquad (4.6)$$

où le force fluctuante serait dûe aux chocs des météorites.

L'application de la méthode de Langevin donne ici (on considère la première éq(4.6); le raisonnement est valable pour la deuxième équation) :

$$\overline{m(\ddot{x} + \ddot{u})\dot{x}} + \overline{\beta\dot{u}\dot{x}} + \overline{m\omega_0^2(x + u)\dot{x}} = \overline{\dot{x}\,F_x(t)} \qquad (4.7)$$

Puisque les termes considérés ne sont pas corrélés, en faisant les moyennes tous les termes sont nuls.

Cependant, on a :

$$\frac{1}{2}\,\overline{m\dot{x}^2} + \frac{m\omega_0^2}{2}\,\overline{x^2} = \frac{1}{2}\,m\dot{x}^{0\,2} + \frac{1}{2}\,m\,\omega_0^2 x^{0\,2} \qquad (4.8)$$

où x^0 et $\dot{x}^0$ sont les valeurs initiales de x et de x.

D'autre part, en multipliant par $\dot{u}$, on a :

$$\overline{m(\ddot{x} + \ddot{u})\dot{u}} + \overline{\beta\dot{u}^2} + \overline{m\omega_0^2(x + u)\dot{u}} = \overline{\dot{u}\,F_x(t)} \qquad (4.9)$$

et en faisant la moyenne, on obtient :

$$\overline{\beta\dot{u}^2} = \overline{\dot{u}\,F_x(t)} \qquad (4.10)$$

Les éqs(4.8) et (4.10) montrent comment dans ce cas l'orbite stationnaire-en-moyenne est possible.

5°) Enfin considérons, comme on le fait dans le cadre de l'Electrodynamique Stochastique (EDS), un oscillateur harmonique non-relativiste soumis à l'action du champ de zéro. L'équation du mouvement est :

$$-\frac{2e^2}{3e^3}\,\dddot{x} + m.\ddot{x} + k.x = e.E(t) \qquad (5.1)$$

où E(t) est la composante électrique du champ de zéro. De ce champ fluctuant on ne connaît que la densité spectrale qui s'écrit dans le cas uni-dimensionnel qui nous intéresse :

$$\varepsilon(\omega) = \frac{K|\omega|^3}{3\pi c^3}, \qquad (5.2)$$

où K est une constante ayant les dimensions d'une action et où ω parcourt l'axe des ω de $-\infty$ à $+\infty$.

On sait que de nombreux résultats ont été obtenus dans l'EDS, correspondant à ceux de la Mécanique Quantique quand on fait $K \equiv \hbar$.

Ici aussi on peut montrer ([8]) qu'une trajectoire stationnaire-en-moyenne est possible.

Un des résultats qui nous intéresse concerne l'énergie moyenne de l'oscillateur harmonique. En première approximation elle est donnée par :

$$\overline{E} = \frac{K\omega_0}{2} \tag{5.3}$$

où ω_0 est la pulsation de résonance de l'oscillateur. La relation (5.3) est l'équivalent, dans le cas étudié, à l'équation d'Einstein d'un système en équilibre avec un thermostat.

L'éq(5.3) s'obtient parce que l'équation du mouvement (5.1) comporte le terme en $\dddot{x}$ et que la densité spectrale a la forme de l'éq(5.2).

L'éq(5.1) n'a pas la forme des équations étudiées aux paragraphes précédents. Le coefficient $2e^2/3c^3$ étant très petit, on peut obtenir une équation approximant (5.1) qui a la forme des équations étudiées. On montre ([9]) que cette nouvelle équation est

$$m.\ddot{x} + m\tau\omega_0^2\dot{x} + m\omega_0^2 x = e.E(t) \tag{5.4}$$

où $\tau = 2e^2/3me^3$ et $\omega_0^2 = k/m$

Etant données les éqs(5.3) et (5.4), on va établir la formule donnant la densité spectrale du champ fluctuant à la fréquence de résonance. Tenant compte de (3.11) et (3.12) on voit que la densité spectrale à la fréquence de résonance s'obtient en prenant 4 fois le produit du coefficient de dissipation par l'énergie moyenne totale, soit :

$$e^2,\ \varepsilon(\omega_0)d\nu = 4\,\frac{2e^2}{3c^3}\,\omega_0^2,\ \frac{K\omega_0}{2}\,d\nu$$

ou encore :

$$\varepsilon(\omega_0)d\omega = \frac{2K\omega_0^3}{3\pi c^3}\,d\omega \tag{5.5}$$

ce qui équivaut à l'éq(5.2) à la fréquence de résonance, car ici on ne considère l'axe des ω que de 0 à $+\infty$.

Ce résultat est très satisfaisant pour l'EDS.

On peut résumer comme suit ce qui précède :

La réalité physique est décrite par les points suivants :

- Un mouvement comporte nécessairement une dissipation.
- Il n'existe pas de systèmes autonomes; on doit tenir compte des forces fluctuantes.
- Il existe une relation entre le coefficient de dissipation et la force fluctuante.
- En général, des trajectoires stationnaires-en-moyenne sont possibles.

BIBLIOGRAPHIE

(1) H. Goldstein, Classical Mechanics, Addison-Wesley Press 19

(2) L. Landau et E. Lifchitz, Mécanique, Editions de la Paix, Moscou.

(3) A. Messiah, Mécanique Quantique, Dunod Paris 1962.

(4) J. Andrade e Silva, F. Fer, Ph. Leruste et G. Lochak, C.R. Acad. Sc., 251, pp. 2305, 2482, 2662, 1960; Cahiers de Physique, 129, p. 209, 1961; 137, p. 1, 1962.
F. Fer, l'Irréversibilité fondement de la stabilité du mon physique, Gauthier-Villars, Paris, 1977.

(5) J. Fronteau, Annales de la Fondation Louis de Broglie, 1, 199, 1976.
J. Fronteau et A. Tellez-Arenas, Nuovo Cimento 36 B, série n° 1, p. 85, 1976.

(6) J. Bernamont, Annales de Physique, Paris, 7, p. 71, 1937.

(7) M. Surdin, Le Jr. de Physique et le Radium 10, p. 253, 194
Ce travail a été repris par C. Kittel dans Elementary Statistical Physics, J. Wiley & Sons.

(8) M. Surdin, International J. of Theoretical Phys. 8, n° 3, p. 183, 1973.

(9) M. Surdin, Annales Inst. Henri-Poincaré 15, n° 3, p. 203,