Annales de la Fondation Louis de Broglie - Vol. 2, n° 3, 1977

STRUCTURE ET ÉVOLUTION DES SYSTÈMES STATIONNAIRES

par M. Jean BASS

Université Pierre et Marie Curie
Mathématiques
tour 45-46
4, Place Jussieu

75230 - PARIS Cédex 05

Résumé :

Fonctions stationnaires en moyenne.

Irrégularité et probabilité.

Un phénomène stationnaire est-il probabilisable ?

Usage des moyennes temporelles et classification des fonctions stationnaires.

Existence de solutions stationnaires pour certaines équations aux dérivées partielles linéaires ou non linéaires.

STRUCTURE ET EVOLUTION DES SYSTEMES STATIONNAIRES

Je m'intéresserai dans ce qui suit à un système matériel qui évolue en fonction du temps. Pour commencer, je supposerai que ce système est décrit par une seule fonction scalaire $f(t)$ du temps. Si cette fonction dépend de l'espace, les coordonnées d'espace ne joueront qu'un rôle accessoire de paramètre.

Il peut arriver que $f(t)$ soit une constante indépendante de t, c'est à dire que le système n'évolue pas. En général, ce n'est pas le cas. Que se passe-t-il lorsque $t \to \infty$?

Le cas le plus simple est celui où $f(t)$ tend vers une limite. Dans la pratique, cette limite est "atteinte" au bout d'un temps fini. Après une période transitoire, $f(t)$ reste constante.

Mais il arrive souvent que, lorsque $t \to \infty$, $f(t)$ tende vers une fonction "stationnaire en moyenne". C'est ce qui se passe pour le son émis par un tuyau sonore entretenu, ou pour la distribution des vitesses dans une soufflerie. L'air est initialement au repos. En un temps très court, il se met en mouvement, et l'on conçoit que son mouvement, si irrégulier qu'il soit, ait quelque chose de permanent

Je me propose de définir et d'étudier les fonctions f stationnaires (en moyenne). Si la fonction f est solution d'une équation fonctionnelle, on peut se demander si cette équation possède des solutions exactement stationnaires, ou si elle a seulement des solutions asymptotiquement stationnaires. Je ne m'occuperai pas de ce problème, qui a été discuté dans une récente conférence de M. FER et m'intéresserai aux fonctions purement stationnaires.

Il faut donner une définition des <u>fonctions stationnaires</u>. Il est clair qu'une fonction périodique (cas du tuyau sonore) sera considérée comme stationnaire. Mais certaines fonctions d'aspect fort irrégulier, sont aussi de nature stationnaires. On les rencontre dans les circonstances suivantes : le phénomène considér a été conçu dans l'espoir que $f(t)$ serait constante. En réalité, $f(t)$ oscille autour d'une "valeur moyenne" constante. C'est le cas de la turbulence. f est la vitesse en un point fixé. $f(t)$ = constante correspond au régime laminaire, autour duquel se produisent les oscillations turbulentes.

Bien que le cas "$f(t)$ périodique" se rencontre souvent, il n'est pas contradictoire de dire que c'est un cas très particulier. En général, les oscillations de f sont "irrégulières". Comment peut-on les caractériser ?

Imaginons qu'on répète plusieurs fois "dans les mêmes conditions" le phénomène considéré. On obtient chaque fois une fonction $f(t)$ et, en général, les fonctions $f(t)$ sont différentes. Appelons chaque expérience une épreuve. On a tendance à dire qu'une famille de fonctions f qui a les deux propriétés suivantes :

f dépend de l'épreuve,

f est très irrégulière,

est une <u>fonction aléatoire</u>. On dit même, parfois abusivement, que la fonction unique f obtenue par une seule épreuve est une fonction aléatoire.

Représenter un phénomène stationnaire par une fonction aléatoire (stationnaire) est à priori raisonnable, mais ce n'est pas toujours possible ni souhaitable. Je montrerai plus loin que, dans certains cas, un ensemble de fonctions f attaché à un ensemble d'épreuves n'est pas forcément probabilisable. Pour le moment, je vais faire comprendre par un exemple que "aléatoire" n'est pas du tout synonyme de "irrégulier".

L'équation de la chaleur

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

admet la solution particulière

$$f = a + bx + c\left(\frac{x^2}{2} + t\right)$$

Le choix d'une épreuve est fixé par celui des paramètres a,b,c. Si (a,b,c) sont des variables aléatoires, f est une fonction aléatoire de t (et de x). x étant fixé, f est une fonction linéaire de t. C'est la moins irrégulière de toutes les fonctions. On voit bien que "aléatoire" n'implique pas "irrégulier". Bien entendu, f n'est pas stationnaire.

Pour définir une fonction stationnaire, il faut chercher ce qu'elle contient de stable, indépendant de l'épreuve qui la détermine. On appelle moyenne de f le nombre

$$M f = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)\, dt$$

Ce nombre peut ne pas exister. Exemple :

$$f(t) = \sin \log |t| \quad , \quad \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)\, dt = \frac{1}{2}\left[\cos(\log T) + \sin(\log T)\right]$$

Lorsque la limite existe, on dit que f est moyennable. Dans la pratique, tout se passe comme si la limite était atteinte pour une valeur fixe de T. M est un opérateur linéaire sur l'espace vectoriel des fonctions moyennables.

Une fonction stationnaire doit être moyennable. Mais cela ne suffit pas. Il faut que diverses autres moyennes existent. Les plus importantes sont :

la fonction de corrélation de f. Si f est à valeur complexes, elle est égale à :

$$\gamma(\tau) = M\, \overline{f(t)}\, f(t+\tau), \qquad (\bar{f} \text{ conjuguée de } f) ;$$

les coefficients de Fourier de f :

$$c(\omega) = M f(t)\, e^{-i\omega t} ;$$

la fonction caractéristique de f :

$$\varphi(\lambda) = M e^{i\lambda f(t)} .$$

Etudions rapidement les propriétés de ces moyennes.

Pour $\tau = 0$, $\gamma(0) = M|f(t)|^2$ est la moyenne quadratique de f. Je la suppose non nulle. Si γ est une fonction continue, il existe une mesure positive bornée σ telle que

$$\gamma(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha\tau}\, d\sigma(\alpha)$$

(la continuité de γ n'est pas automatiquement réalisée. La fonction de corrélation de e^{it^2} n'est pas continue).

σ s'appelle la mesure, ou fonction spectrale de f. Lorsque σ est une mesure atomique, γ est une fonction presque-périodique, et il existe des fonctions presque-périodiques f admettant γ pour fonction de corrélation. Lorsque σ admet une densité ρ (densité spectrale), $\gamma(\tau)$ a la propriété suivante :

$$\lim_{\tau\to\infty} \gamma(\tau) = 0 .$$

On dit alors que f est une fonction pseudo-aléatoire.

En ce qui concerne les coefficients de Fourier, deux cas sont possibles. Ou bien $c(\omega) = 0$ quelque soit ω. On démontre que cela a lieu certainement si f est pseudo-aléatoire. Une fonction pseudo-aléatoire n'est donc pas du tout déterminée par ses coefficients de Fourier. Ou bien il existe des valeurs de ω pour lesquelles $c(\omega) \neq 0$. On démontre que ces valeurs constituent un ensemble dénombrable. C'est ce qui se passe lorsque f est presque-périodique.

Je donnerai plus loin des exemples de fonctions pseudo-aléatoires. Pour les fonctions presque-périodiques, l'exemple le plus naturel est

$$f(t) = \sum_k c_k e^{i\omega_k t} , \quad \text{avec} \quad \sum |c_k| < \infty$$

On vérifie que $c(\omega) = 0$, sauf $c(\omega_k) = c_k$, et que

$$\gamma(\tau) = \sum |c_k|^2 e^{i\omega_k \tau} .$$

Enfin, dans des conditions assez générales, on démontre que la <u>fonction caractéristique</u>

$$c(\lambda) = M\, f(t)\, e^{i\lambda t}$$

est la transformée de Fourier d'une mesure positive bornée μ (s), appelée <u>mesure asymptotique</u> de f. Si par exemple $f(t) = \sin t$, on a

$$M e^{i\lambda \sin t} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{i\lambda \sin t}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\lambda \sin t}\, dt = \frac{1}{\pi} J_0(\lambda) ,$$

où J_0 est la fonction de Bessel d'ordre 0. Or

$$J_0(\lambda) = \int_{-1}^{1} \frac{e^{i\lambda s}}{\sqrt{1-s^2}}\, ds$$

$\sin t$ a donc une mesure asymptotique de densité $\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}$ $(|s| < 1)$

Remarquons que, si $f(t)$ est la transformée de Fourier d'une fonction intégrable, f n'est pas stationnaire, ou plus exactement f est une "fonction stationnaire nulle". En effet, la moyenne quadratique de f est nulle, car, d'après le théorème de Parseval- Plancherel,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |f(t)|^2\, dt$$

existe. Donc $\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |f(t)|^2\, dt$ tend vers 0. D'ailleurs, d'après le théorème de Riemann-Lebesgue, f est asymptotiquement nulle.

On appelle <u>fonction stationnaire</u> une fonction pour laquelle un certain nombre de moyennes, du type de celles qui viennent d'être définies, existent. Ces moyennes sont presque complètement indépendantes et peuvent être choisies arbitrairement, sauf qu'elles doivent vérifier quelques conditions de compatibilité. A part Mf, la plus fondamentale est la fonction de corrélation, qui fait intervenir les valeurs de f en deux instants décalés. <u>Une fonction stationnaire est donc une fonction qui admet une fonction de corrélation continue</u>.

Si un ensemble d'expériences est cohérent, les fonctions f relatives aux diverses expériences doivent avoir les mêmes moyennes. Ces moyennes peuvent être appelées des <u>moyennes temporelles</u>. Quel rapport ont-elles avec des moyennes stochastiques, ou espérances mathématiques ? L'ensemble de ces fonctions f est-il assimilable à une fonction aléatoire stationnaire ?

Une fonction aléatoire stationnaire est une fonction définie sur l'espace produit de :

a) l'espace des valeurs de t (ici l'espace $\mathbb{R}$) ;

b) un espace de probabilité Ω .

On doit écrire $f(t,\omega)$. Sur Ω, on a choisi une mesure de probabilité p. On définit

l'espérance mathématique $\quad E\,f = \int_{\Omega} f(t,\omega)\,dp(\omega)$

la covariance de f, $\quad \Gamma = E\,\bar{f}(t,\omega)\,f\,(t+\tau,\omega)$

f est stationnaire si $E\,f$ ne dépend pas de t (c'est une constante) et si Γ ne dépend pas de t (c'est une fonction de τ seul).

Une épreuve sur $f(t,\omega)$ consiste à choisir ω dans Ω. On peut alors définir la moyenne temporelle de f sur cette épreuve :

$$M\,f = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t,\omega)\,dt$$

$M\,f$ dépend en général de ω. C'est une variable aléatoire.

Si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} E\,f & \text{ne dépend pas de } t, \\ M\,f & \text{ne dépend pas de } \omega, \\ E\,f = M\,f, & \end{cases}$$

on dit que f est ergodique. Plus généralement, on pourra demander que la fonction $\overline{f(t)}\;f(t+\tau)$ soit ergodique, ce qui assurera l'identité de la fonction de corrélation temporelle et de la covariance stochastique.

Sur chaque épreuve, une fonction aléatoire stationnaire ergodique est une fonction stationnaire. Inversement, si l'on se donne une famille de fonctions stationnaires paramétrée par un paramètre ω, appartenant à un certain espace Ω, est-il possible de probabiliser Ω de façon à structurer f en une fonction aléatoire stationnaire ?

Dans certains cas, la réponse est affirmative. Si par exemple $\omega = (c_1, c_2, \ldots, c_\kappa, \ldots) \in l^2$, on pose

$$f(t,\omega) = \sum c_\kappa e^{i\omega_\kappa t}, \qquad \omega_\kappa \neq 0 .$$

On choisit une probabilité telle que les c_κ, composantes de ω, soient des variables aléatoires deux à deux orthogonales et d'espérance mathématique nulle. On a

$$M\,f = 0\,, \qquad E\,f = 0$$

On a ensuite

$$M\,\bar{f}(t,\omega)\,f\,(t+\tau,\omega) = \sum |c_\kappa|^2\, e^{i\omega_\kappa \tau}$$

$$E\,\bar{f}(t,\omega)\,f\,(t+\tau,\omega) = \sum E|c_\kappa|^2\, e^{i\omega_\kappa \tau}$$

Il y a identité si $|c_\kappa|^2 = E\,|c_\kappa|^2$. Les modules des c_κ ne sont pas aléatoires. Posons

$$c_\kappa = r_\kappa e^{i\theta_\kappa}$$

Les conditions imposées entraînent que :

r_κ n'est pas aléatoire ; les θ_κ sont aléatoires et tels que

$$E\,e^{i\theta_\kappa} = 0\,, \quad E\,e^{i(\theta_\kappa - \theta_\ell)} = 0$$

Par exemple, ce sont des variables aléatoires indépendantes équiréparties sur sur $[\,0,1\,]$.

Mais il en est tout autrement si l'on considère par exemple la fonction

$$f(t,\omega) = e^{i\omega t}\,,$$

où la pulsation ω est aléatoire. On a

$$M f = 0 \qquad \text{sauf si} \quad \omega = 0$$

$$E f = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \, d F(\omega)$$

$E f$ est la fonction caractéristique de la fonçtion de répartition F. Elle est continue et égale à 1 pour $t = 0$. Donc elle dépend de t et n'est généralement pas nulle. Au contraire $M f$ est une variable aléatoire nulle.

Des circonstances analogues se produisent pour les fonctions pseudo-aléatoires. Rappelons d'abord comment on peut construire d'une façon concrète des fonctions pseudo-aléatoires.

La méthode consiste indirectement à faire une simulation du hasard en utilisant les propriétés d'irrégularité des nombres irrationnels. On dit qu'une suite x_n de nombres réels compris entre 0 et 1 est <u>équirépartie</u> (sur $[0,1]$) si la propriété suivante est vérifiée :

soit I un intervalle quelconque intérieur à $[0,1]$. Parmi les nombres

$$x_1, \ldots, x_n,$$

on en trouve N' dans I, de telle sorte que, lorsque $N \to \infty$, la fraction $\frac{N'}{N}$ ait une limite égale à la longueur de I.

H. WEYL a prouvé en 1916 les théorèmes suivants :

I - la suite x_n est équirépartie si, et seulement si, quelle que soit la fonction $F(x)$, définie et intégrable au sens de Riemann sur $[0,1]$, on a

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \left[F(x_1) + \ldots + F(x_N) \right] = \int_0^1 F(x) \, dx$$

II - soit $P(z) = a_o Z^{\nu} + a_1 Z^{\nu-1} + \text{---} + a_{\nu-1} Z + a_{\nu}$

un polynome à coefficients réels non constant ($\nu \geq 1$). Si a_o est irrationnel, la suite $x_n = P(n)$ (mod. 1) est équirépartie sur $[0,1]$.

D'autre part, N. WIENER a démontré le théorème d'interpolation suivant :

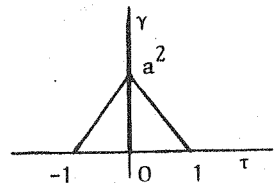
si $f(t)$ est une fonction en escalier, constante sur chacun des intervalles $[k, k+1]$, sa fonction de corrélation (si elle existe) est continue, et varie linéairement dans chaque intervalle $[k, k+1]$.

Soit x_κ la suite égale à $P(k)$ modulo 1. On suppose que le degré ν de P est au moins égal à 2. Soit $g(x)$ une fonction définie et intégrable sur $[0,1]$, telle que

$$\int_0^1 g(x) \, dx = 0 \; , \qquad , \qquad \int_0^1 g^2(x) \, dx = a^2 \; .$$

Soit alors $f(t)$ la fonction en escalier égale à $g(x_\kappa)$ si $k < t < k+1$. $f(t)$ est une fonction pseudo-aléatoire, dont la fonction de corrélation vaut

$$\begin{cases} a^2 (1 - |\tau|) & \text{si} \quad |\tau| \leqslant 1 \\ 0 & \text{si} \quad |\tau| \geqslant 1 \end{cases}$$



Sa moyenne est nulle.

Cette fonction dépend des paramètres $a_o, a_1, \ldots, a_\nu$. Leur choix équivaut à celui d'une expérience. Peut-on affecter à ces paramètres des probabilités telles que f soit ergodique ? Pour simplifier les notations, prenons le cas d'un polynôme du second degré et ne conservons que son terme essentiel. Posons donc

$$P(k) = a k^2 \; , \qquad a \text{ irrationnel.}$$

Dire que $x_k = P(k)$ modulo 1 , cela revient à prolonger la fonction $g(x)$ en une fonction périodique de période 1 , et à poser

$$f(t) = g(a\,k^2) \qquad \text{pour} \qquad k < t < k+1 .$$

D'après le théorème de Weyl, on a

$$M\,f = M\,g(x_k) = \int_0^1 g(x)\,dx = 0 .$$

Si $p(a)$ est la fonction de répartition du paramètre a , considérée comme une variable aléatoire, on a

$$E\,f = \int g(a\,k^2)\;dp\,(a) .$$

Or $E\,f$ dépend de k . En particulier, pour $k = 0$, $E\,f = 1$. Si par exemple $g(x) = e^{2i\pi x}$, $E\,f = \varphi\,(k)$, où k est la fonction caractéristique de α .

On voit qu'il existe des fonctions stationnaires dépendant de paramètres et qui ont la propriété suivante :
quelle que soit la loi de probabilité qu'on donne à ces paramètres, la fonction n'est pas ergodique. Son espérance mathématique ne peut pas se calculer comme une moyenne temporelle sur une épreuve. Inversement, sa moyenne temporelle ne peut pas être interprétée comme une espérance mathématique. Il existe donc des phénomènes stationnaires en moyenne dont les diverses épreuves constituent un ensemble non probabilisable, en ce sens que les espérances mathématiques ne peuvent pas se calculer comme des moyennes sur une épreuve.

Revenons maintenant à la notion d'irrégularité. Nous avons vu qu'elle n'était en aucune façon équivalente à "aléatoire". Bien entendu, elle n'a pas

non plus de rapports avec l'irrégularité, ou la régularité locale. Une fonction est d'autant plus régulière en un point qu'elle est dérivable un plus grand nombre de fois. Or on peut construire facilement des fonctions presque-périodiques ou pseudo-aléatoires indéfiniment dérivables. Pour les fonctions presque-périodiques, il suffit d'utiliser la représentation par des séries. Par exemple, si la suite $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots$ est croissante et à croissance lente, la fonction

$$\sum a^n e^{i\omega_n t} \qquad , \qquad \text{où} \quad |a| < 1$$

est presque périodique et indéfiniment dérivable.

Mais plus généralement, on démontre que la convolution d'une fonction stationnaire f par une fonction $K \in L^1$ est stationnaire et de même nature que f . Elle a les propriétés locales de K , même si f n'est pas continue. Si par exemple $K(x) = e^{-x^2}$, $K * f$ est une fonction stationnaire indéfiniment dérivable.

L'irrégularité est une propriété non locale, difficile à définir. On peut d'abord remarquer que si une fonction est stationnaire, bornée, de moyenne nulle, et non nulle, elle change de signe une infinité de fois dans tout intervalle $[a, +\infty[$. En effet, si par exemple $0 \leqslant f(t) \leqslant M$, on a

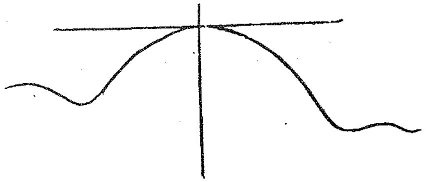
$$0 < \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |H(t)|^2\,dt \leqslant M\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)\,dt$$

Par hypothèse, le dernier terme tend vers 0 lorsque $T \to \infty$. Donc f est de moyenne quadratique nulle : $\gamma\,(0) = 0$.

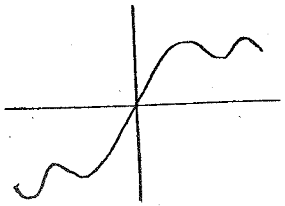
Cependant on n'a pas l'habitude de dire qu'une fonction périodique soit irrégulière. L'irrégularité signifie que f n'admet aucune invariance par rapport à des transformations simples à savoir :

translations horizontales, symétries par rapport à un point ou une droite verticale.

Localement, une fonction dérivable admet chaque point comme centre de symétrie. Si f est deux fois dérivable, f peut avoir localement des axes de symétrie, correspondant en particulier aux maxima et minima.



Ces éléments de symétrie ont un caractère très local. Il arrive que la symétrie intéresse un voisinage assez vaste d'un point.



On a pu prouver que certaines fonctions pseudo-aléatoires, définies à partir de nombres irrationnels, peuvent présenter des centres locaux de symétrie intéressant, avec la précision du graphique, plusieurs oscillations. Mais cette symétrie n'intéresse jamais la courbe entière. Si l'on regarde, à une certaine échelle, un échantillon suffisant de la courbe, il n'y apparait aucune symétrie. C'est en cela que consiste l'irrégularité .

Posons nous maintenant la question suivante :

Une équation fonctionnelle peut-elle avoir des solutions stationnaires ? En un sens, la réponse est bien connue. Dans de nombreux cas, pour des équations aux dérivées partielles linéaires, la méthode de séparation des variables fournit des solutions périodiques simples en t . Exemples :

<u>Equation de la chaleur</u> $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$$u(t) = e^{i\omega t} \quad e^{\frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega}\,x}$$

<u>Equations des cordes vibrantes</u> $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$$u(t) = e^{i\omega\,(x \pm t)}$$

<u>Equations de Schrödinger</u> $\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{h}{2im}\,\Delta\,\psi = \frac{V}{ih}\,\psi$

$$\psi = e^{-\frac{i\omega t}{h}} f(x) \quad , \quad \text{avec} \quad \Delta f = \frac{2m}{h^2}\,(V-\omega)\,f$$

De ces solutions on déduit des solutions plus générales sous forme :

d'intégrales de Fourier (non stationnaires au sens ci-dessus)

de séries de Fourier presque périodiques.

Mais le problème des solutions stationnaires est plus complexe. C'est celui de l'existence et de l'unicité de solutions stationnaires d'un type donné (périodique, presque-périodique, pseudo-aléatoire). Accessible pour des équations linéaires, ce problème est plus compliqué pour les équations non linéaires. Analysons le.

Puisque le phénomène considéré n'est reproductible qu'en moyenne, <u>il n'y a aucun espoir d'unicité</u>. On cherche donc les solutions dans certains espaces fonctionnels, définis non à partir de conditions initiales et aux limites, mais de conditions d'une tout autre nature, d'origine physique : déterminisme ou indéterminisme statistique par exemple, et dans ces espaces, on trouve en général des familles de solutions, et non des solutions uniques.

Il se pose alors la question de savoir si le caractère stationnaire précis des solutions provient :

de la nature de l'opérateur considéré

ou

du transfert par cet opérateur de données ayant déja ce caractère.

Voici quelques exemples des circonstances qui peuvent se produire.

Dans le cas d'une équation aux dérivées partielles linéaires, il est assez facile de voir que c'est la seconde circonstance qui est la plus naturelle. On sait en effet transformer une fonction stationnaire (presque-périodique ou pseudo-aléatoire) par une opération linéaire : la convolution. Si

$$A \psi = 0$$

est une équation linéaire, et si

$$\psi = K * u ,$$

il suffit que u soit stationnaire et que $A K = 0$ pour que $A \psi = 0$ (ceci exige naturellement, dans chaque cas particulier, bien des précautions). Cependant, on voit qu'il y a séparation entre une donnée a priori u, et le rôle de l'opérateur A. u contient la stationnarité et K traduit l'opérateur A.

Dans le cas d'équations non linéaires, il n'y a pas de résultats généraux. J'ai montré l'existence de solutions stationnaires pour l'équation de Burgers

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

qui se ramène à l'équation de la chaleur par la transformation non linéaire

$$u = -2 \frac{\partial}{\partial x} \log v .$$

J'ai montré l'existence de solutions des équations de Navier-Stokes

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial t} + \sum u_\kappa \dfrac{\partial u_i}{\partial x_u} + \dfrac{\partial p}{\partial x_i} = \nu \Delta u_i \\ \sum \dfrac{u_i}{\partial x_i} = 0 , \end{cases}$$

qui sont sommes d'un terme périodique et d'un terme pseudo-aléatoire. La méthode consiste à remarquer que les équations sont invariantes par les transformations du "groupe de BERKER"

$$u_i(x,t) = a'_i(t) + v_i \left[x-a(t), t \right]$$

où $a_i(t)$ est un vecteur fonction de t, deux fois dérivable, et à part cela arbitraire. Si l'on prend pour v_i une solution des équations du mouvement permanent

$$\sum v_\kappa \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial p_o}{\partial x_i} = \nu \Delta v_i \qquad , \qquad \sum \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 ,$$

on peut choisir les a_i pour que u_i ait la propriété de stationnarité énoncée ci-dessus. On développe $v_i [x - a(t)]$ suivant les puissances des a_j. C'est toujours possible, d'après le théorème de Cauchy - Kovalewska, si les $| a_i(t) |$ sont suffisamment petits. Puis on construit les a_i comme convolutions de noyaux intégrables par des fonctions pseudo-aléatoires, obligatoirement construites elles mêmes à l'aide de propriétés arithmétiques. Dans ce cas, la tranformation de BERKER se substitue aux équations de Navier-Stokes. On part de solutions quelconques des équations du mouvement permanent. On les utilise pour transformer, par un processus non linéaire, une donnée $a_i(t)$ (qui n'est ni une donnée initiale ni une donnée aux limites) en une solution conservant les propriétés de la donnée.

On notera que la non linéarité exige un développement suivant les puissances de a_i. a_i étaant stationnaire (pseudo-aléatoire), il faut que a_i^n soit encore stationnaire. Cela exige de définir a_i par des méthodes arithmétiques plus fines que celles qui résultent du second théorème de H.WEYL. Il faut introduire des suites "complètement équiréparties", ce qui est faisable, mais non élémentaire.

Pour comprendre ce qui se passe, il peut sembler plus élémentaire d'étudier des problèmes d'équations différentielles ordinaires. Comme les données n'ont pas de caractère fonctionnel, la nature de la solution est nécessairement liée à celle de l'opérateur. Mais, pour cette raison, le problème est bien plus difficile. Soit d'abord

$$X' = A X$$

un système différentiel linéaire et homogène à coefficients constants. On sait que, si les valeurs propres de la matrice A sont imaginaires pures ou nulles, et distinctes, la solution générale est presque-périodique (polynômes trigonométriques). C'est le seul cas où elle est stationnaire.

On connaît quelques résultats surles solutions presque-périodiques de systèmes linéaires à coefficients presque-périodiques. Dans ces cas, l'opérateur contient d'avance ce qu'il va transmettre aux solutions.

Le cas des équations différentielles non linéaires reste très mystérieux. On connaît un certain nombre d'exemples de systèmes non linéaires dont la solution est périodique. Celui des fonctions elliptiques est le plus classique. En langage mécanique, c'est le problème du mouvement d'un solide ayant un point fixé, en l'absence de forces extérieures :

$$A \frac{dp}{dt} = (B - C)\, q\, r , \quad B \frac{dq}{dt} = (C - A)\, r\, p , \quad C \frac{dr}{dt} = (A - B)\, p\, q$$

p , q , r sont les composantes sur les axes principaux d'inertie du vecteur vitesse de rotation instantanée.

Quelques expériences numériques ont suggéré que certains systèmes différentiels non linéaires à coefficients constants avaient probablement des solutions pseudo-aléatoires. Cela semble confirmer que, de même qu'une matrice constante donne naissance à des solutions presque-périodiques, de même un système non linéaire, défini par un tenseur du troisième ordre constant, pourrait donner naissance à des solutions pseudo-aléatoires. Mais la preuve mathématique reste à faire.

QUELQUES REFERENCES :

J. BASS

- Suites uniformément denses, moyennes trigonométriques, fonctions pseudo-aléatoires (Bull., Soc. Math. de France 87 , 1959).
- Les fonctions pseudo-aléatoires (Mémorial des Sciences mathématiques, Gauthier-Villars, 1962).
- Stationary functions and their applications to the theory of turbulence (Journal of mathematical analysis and applications. Vol. 47, n° 2 et n° 3, 1974).

Thèses de

J.P. BERTRANDIAS (Mémoires de la Soc. math. de France, 1964).

Vo KHAC KHOAN (Mémoires de la Soc. math. de France, 1965).

J. DHOMBRES (Mémoires de la Soc. math. de France, 1971).

PHAM PHU HIEN (Annales de l'Institut H. Poincaré, 1975).

J. COUOT (Publication partielle dans "Répartition modulo 1", Lectures Notes in Mathematics, Springer, 1975).