Annales de la Fondation Louis de Broglie - Vol. 2, n° 3, 1977

SUR LE MOUVEMENT BROWNIEN ET LA THÉORIE DE L'INFORMATION

par M. P. HAMMAD
Laboratoire de Mathématiques Appliquées
Université d'Aix-Marseille
3, Avenue R. Schuman
13621 - AIX-EN-PROVENCE

(manuscrit reçu le 15 Février 1977)

Résumé :

En étudiant l'évolution vers l'équilibre statistique du mouvement brownien, on met en relief les liens étroits qui existent entre certaines fonctions de la Thermodynamique et certaines grandeurs caractéristiques de la Théorie de l'Information.

I - INTRODUCTION

Le mouvement brownien constitue un prototype de système dynamique aléatoirement perturbé et dont le processus présente les deux caractéristiques suivantes : celle d'évoluer de façon irréversible aux yeux de la Thermodynamique et celle d'être markovien pour la Théorie des Probabilités.

C'est pourquoi l'évolution, vers l'état d'équilibre, d'un tel système peut être guidée par l'entropie thermodynamique, l'énergie libre ou le potentiel chimique selon que le système est considéré comme isolé, fermé ou ouvert [1]. Cette évolution peut en outre, à l'image des processus markoviens discrets, être décrite tantôt par l'information de SHANNON [2], tantôt par le gain d'information [3].

Laissant de côté le problème plus délicat d'un système ouvert (échanges de matière avec le milieu extérieur), nous verrons ici comment l'entropie s'identifie à l'information, l'énergie libre au gain d'information et pourquoi ce dernier peut jouer dans tous les cas le rôle de "potentiel thermodynamique" du système.

La première partie de l'article est consacrée à une esquisse d'une Thermodynamique Statistique du mouvement brownien. Les deux autres parties traitent de la théorie de l'information : non seulement elle éclaire ou explique la description des phénomènes étudiés, mais surtout elle apparaît en permanence étroitement liée aux principes de la Thermodynamique.

II - THERMODYNAMIQUE STATISTIQUE DU MOUVEMENT BROWNIEN

Le rapport étroit et quantitatif entre l'agitation moléculaire et le mouvement brownien (qu'illustrent entre autres les lois de VANT'HOFF, le principe d'équipartition de l'énergie, la loi barométrique de LAPLACE) fait apparaître la théorie générale du mouvement brownien comme un écho de l'agitation moléculaire.

Devant une telle analogie, on peut se demander, puisque l'équation de BOLTZMANN entraîne le théorème H pour les gaz parfaits, si l'équation de la diffusion sur laquelle repose la théorie du mouvement brownien, n'entraîne pas elle aussi un théorème H pour un "gaz" de particules browniennes.

L'idée d'un tel théorème - que l'on doit à Georges LOCHAK - a été reprise et développée dans [4] ; En définissant la fonction H pour la densité de répartition de particules browniennes libres, on y montre que l'équation de la diffusion assure sa décroissance monotone, entraînant ainsi l'analogue d'un théorème H. On peut observer en outre que le théorème H découlant de l'équation intégro-différentielle de BOLTZMANN s'appuie sur une analyse précise des chocs moléculaires ; alors que l'équation de la diffusion (cas particulier de l'équation de SMOLUCHOWSKI) s'appuie sur l'indépendance statistique des libres parcours [5]. Cette hypothèse, certes approximative, ne suppose plus tel modèle concret de molécule ni telle loi précise pour les chocs. Le théorème H que nous avons établi apparaît comme une confirmation supplémentaire de la légitimité de cette hypothèse (à l'échelle de temps où elle est admise).

Plaçons nous maintenant dans l'espace des vitesses et considérons le milieu extérieur comme un thermostat. Alors que dans l'espace de configuration nous supposions l'équilibre énergétique du système réalisé, il en est à présent autrement :

le système n'est pas isolé et son énergie ne saurait se conserver au cours du temps, excepté pour des conditions initiales bien particuliers (vitesses réparties dès le départ selon la loi de MAXWELL-BOLTZMANN). Le système étant en contact permanent avec ce réservoir de chaleur que constitue le milieu extérieur, la grandeur régissant son évolution ne doit pas être rapprochée de l'entropie mais d'une autre grandeur [6] : l'énergie "utilisable" ou énergie libre au sens de HELMHOLTZ. Il doit en effet résulter de toute transformation spontanée du système une diminution de son énergie libre ; les particules browniennes évolueront irréversiblement vers un état d'équilibre stable caractérisé par une valeur minimale de cette énergie.

C'est pourquoi, en se plaçant dans l'espace des vitesses (à une dimension pour plus de simplicité) et donc en se basant sur l'équation de FÖKKER-PLANCK, on se propose de montrer ici que l'évolution du système se fait en respectant non pas le principe du maximum d'entropie, mais celui du minimum d'énergie libre.

Désignons, en l'absence de forces extérieures, par U l'énergie interne du système (réduite ici à son énergie cinétique moyenne $\overline{E_c}$) ; par H la fonction de BOLTZMANN et par T la température du thermostat. Nous voulons établir la décroissance, au cours du temps, de la fonction :

$$(1) \qquad F = U - TS = \overline{E_c} + kTH,$$

ou encore :

$$(2) \qquad F = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} mu^2 f du + kT \int_{-\infty}^{+\infty} f \operatorname{Log} f du$$

lorsque la densité de la répartition des vitesses f(u,t) (positive, nulle pour u infini et normée à l'unité) est solution de l'équation [7] :

$$(3) \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = \beta \frac{\partial}{\partial u}(uf) + D_o \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}, \quad D_o = \frac{\beta k t}{m}.$$

Compte tenu de l'expression :

$$(4) \qquad f(u,\infty) = f_\infty = \left(\frac{\beta}{2\Pi D_o}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\beta u^2}{2D_o}}$$

de la densité de la répartition d'équilibre de MAXWELL-BOLTZMANN, il est aisé de mettre (3) sous la forme parfois plus commode :

$$(5) \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = D_o \frac{\partial}{\partial u}\left\{ f \left[\frac{\partial}{\partial u} \operatorname{Log} {}^{f}/_{f_\infty}\right]\right\}.$$

Le calcul de la dérivée temporelle de F donne, d'après (1) :

$$(6) \qquad \frac{dF}{dt} = \frac{d\overline{E_c}}{dt} + kT\frac{dH}{dt}$$

et celui de H, d'après (2) et (3) :

$$(7) \qquad \frac{dH}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \beta\frac{\partial}{\partial u}(uf) + D_o \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\right\} \operatorname{Log} f du ;$$

soit, en intégrant par parties,

$$(8) \qquad \frac{dH}{dt} = \left[D_o \frac{\partial f}{\partial u} \operatorname{Log} f\right]_{-\infty}^{+\infty} + \beta\left[uf \operatorname{Log} f\right]_{-\infty}^{+\infty} - \beta\int_{-\infty}^{+\infty} u\frac{\partial f}{\partial u} du - D_o \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{f}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 du.$$

Au second membre de (8), la nullité du premier crochet résulte des conditions aux limites et de l'inégalité (cf [8] et [9] pour le procédé) :

$$(9) \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 \leq \frac{1}{e}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \beta^{\frac{3}{2}}\left[D_o(1-e^{-2\beta t})\right]^{-\frac{3}{2}} f \; ;$$

la nullité du second crochet est assurée moyennant l'hypothèse que $f(u,t)$ se comporte, pour u infini, comme e^{-u^2} : il en est ainsi dès qu'on suppose par exemple – ce qui est réaliste – la donnée initiale $f(u,o)$ bornée sauf sur un ensemble de mesure nulle. *(8)* donne alors :

$$(10) \qquad \frac{dH}{dt} = \beta - D_o \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{\partial}{\partial u}\,\mathrm{Log} f\right)^2 du.$$

On remarquera, moyennant un calcul évident, que cette expression s'annule bien si $f(u,t)=f_\infty$, autrement dit lorsque le système se trouve dans la configuration la plus probable qui est précisément celle de MAXWELL-BOLTZMANN.

On obtient par ailleurs, à partir de *(1)*, *(2)* et *(3)* et une intégration par parties :

$$\frac{d\overline{E_c}}{dt} = \frac{m\beta}{2}\left[U^3F\right]_{-\infty}^{+\infty} - m\beta\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 f du + \beta\frac{kT}{2}\left[u^2\frac{\partial f}{\partial u}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \beta kT\int_{-\infty}^{+\infty} u\frac{\partial f}{\partial u} du \, .$$

Compte tenu de *(9)* et des précédentes hypothèses, il s'ensuit sans difficulté que :

$$(11) \qquad \frac{d\overline{E_c}}{dt} = -2\beta\left(\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} mu^2 f du + \frac{kT}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} u\,\frac{\partial f}{\partial u}\,du\right) = 2\beta\left(\frac{kT}{2} - \overline{E}_c\right) .$$

Remarques

1°) L'équation différentielle *(11)* admet pour solution :

$$(12) \qquad \overline{E}_c = \left(\overline{E}_o - \frac{kT}{2}\right) e^{-2\beta t} + \frac{kT}{2} \, ,$$

en désignant par $\overline{E}_o$ l'énergie moyenne initiale du système. On voit, d'après *(12)*, que si $\overline{E}_o = \frac{1}{2}\,kT$, l'énergie se conserve au cours du temps et que pour toute autre valeur de $\overline{E}_o$, $\overline{E}_c \to \frac{1}{2}kT$ quand $t \to \infty$, ce qui est en accord avec le principe d'équipartition de l'énergie.

2°) Si les vitesses sont initialement réparties selon une loi normale de paramètres quelconques, l'énergie du système ne se conserve que si cette répartition est la répartition d'équilibre de MAXWELL-BOLTZMANN. En effet, si la donnée initiale $f_o(u) = f(u,o)$ est la densité d'une loi normale $L(m_o,\sigma)$, il est facile de s'assurer que la solution générale $f(u,t)$ de l'équation (3) est la densité de la loi normale $L\left(m_o e^{-\beta t}, \sqrt{\alpha+\sigma^2 e^{-2\beta t}}\right)$ avec $\alpha = \beta^{-1} D_o(1-e^{-2\beta t})$.

Dans ce cas, l'expression de l'énergie $\overline{E}_c$ est :

$$(13) \qquad \overline{E}_c = \left\{\frac{m}{2}\,(m_o^2 + \sigma^2) - \frac{kT}{2}\right\} e^{-2\beta t} + \frac{kT}{2} \, .$$

(13) est bien l'analogue de *(12)* ; il est en outre immédiat que c'est la loi normale initiale $L\left(o, \sqrt{\frac{kT}{m}}\right)$ – autrement dit la répartition de MAXWELL – qui assure l'invariance de $\overline{E}_c$ au cours du temps. En d'autres termes, dès que l'on considère le milieu environnant comme un thermostat, le système n'est généralement pas isolé, sauf pour des conditions initiales bien particulières.

Revenons au calcul de $\frac{dF}{dt}$; d'après *(6)*, *(10)*, *(11)* :

$$\frac{dF}{dt} = 2\beta kT - \int_{-\infty}^{+\infty} m\beta\left\{\left(\frac{kT}{m}\right)^2 \frac{1}{f}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + u^2 f\right\} du.$$

En remarquant que :

$$\left(\frac{kT}{m}\right)^2 \frac{1}{f}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + u^2 f = f\left(\frac{kT}{m}\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial u} + u\right)^2 - \frac{2kT}{m} u \frac{\partial f}{\partial u},$$

on obtient :

$$\frac{dF}{dt} = - m\beta \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{kT}{m}\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial u} + u\right)^2 du \; ;$$

soit, compte tenu de l'expression (4) de la répartition d'équilibre :

(14) $$\frac{dF}{dt} = - kTD_o \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{\partial}{\partial u} \text{Log}\, \frac{f}{f_\infty}\right)^2 du \;,\; D_o = \frac{\beta kT}{m}.$$

• L'inégalité (9) assure, au second membre de (14), la convergence de l'intégrale ; l'intégrand y est toujours positif (au sens large) et continu pour tout $t > 0$.

Il en résulte que $\frac{dF}{dt} \leq 0 \quad \forall t$. f étant supposée continue et donc à valeurs finies, $\frac{dF}{dt}$ ne s'annulera que si f est identiquement nulle, ce qui n'arrive à aucun instant, ou si $f = f_\infty$, c'est-à-dire pour la répartition finale ; c'est ce qui se produit effectivement comme le montrerait un calcul basé sur l'inégalité (9) en vertu duquel :

$$\left|\frac{dF}{dt}\right| \leq \left|\frac{d\bar{E}_c}{dt}\right| + kT\left|\frac{dH}{dt}\right| \leq \Phi e^{-2\beta t} + \frac{\Psi}{t}$$

(Φ et Ψ finies et telles que $\Phi'_t = \Psi'_t = 0$).

• La décroissance au cours du temps de F jusqu'à une valeur minimale caractéristique de l'état d'équilibre du système est en plein accord avec la thermodynamique des processus irréversibles : lorsque le système est de type "fermé" (couplage avec un thermostat), ce n'est plus l'entropie, mais l'énergie libre (ici au sens de HELMHOLTZ) qui guide son évolution au cours du temps. La théorie de l'information et le caractère markovien du système choisi expliquent également ces résultats, comme le montrent les paragraphes qui suivent.

III - ENTROPIE ET INFORMATION DE SHANNON

Le sens attribué ici à la notion d'information est classique : plus l'issue d'une "expérience" est indéterminée, moins nous avons de chances de prévoir avec succès cette issue et plus notre information sur cette expérience est faible.

Dans un premier temps, prenons, pour caractériser l'information sur le système à l'instant t, la fonction H de BOLTZMANN qui n'est autre, au signe près, que la généralisation au cas continu de l'information au sens de SHANNON [16].

III.1 - Système "isolé" :

C'est le cas, dans l'espace de configuration et en l'absence de forces extérieures, de particules browniennes se déplaçant dans un intervalle $[0,\ell]$ de la droite réelle.

L'information attachée au système est :

$$H = \int_0^\ell f(x,t)\, \text{Log} f(x,t) dx$$

où la densité de probabilité $f(x,t)$, solution de l'équation de la diffusion sous la condition que le courant de diffusion s'annule en 0 et ℓ, s'écrit [4] :

$$\begin{cases} f(x,t) = \frac{1}{\ell} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{\Pi n}{\ell}\right)^2 Dt} \cos \frac{\Pi n}{\ell} x, \\ A_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f_o(\xi) \cos \frac{\Pi n}{\ell} \xi \, d\xi \;,\; f_o(x) = f(x,o). \end{cases}$$

Nous avons établi dans [4] qu'à partir d'un instant t suffisamment grand mais fini :

(15) $$\frac{dH}{dt} = - D\int_0^\ell f\left(\frac{\partial}{\partial x} \text{Log} f\right)^2 dx \leq 0,$$

l'égalité dans (15) ne survenant que pour la répartition uniforme de densité $f = 1/\ell$.(*)

Supposons qu'à un instant donné la particule soit repérée. Au fur et à mesure qu'évoluera le système, nos chances de prévoir avec succès sa position diminueront. En d'autres termes nous possédons la plus grande information sur le système à l'instant initial et nous la perdons au cours du temps. C'est cette perte d'information qu'exprime la relation (15) dans laquelle l'égalité correspond au minimum d'information $H = -\text{Log}\,\ell$. Cette décroissance de l'information au cours du temps est en accord avec la théorie des processus markoviens homogènes dont le système choisi est un exemple ; l'entropie ou l'information (**) sont dans ce cas les grandeurs qui régissent l'évolution du système.

III.2 - Système "fermé"

Reprenons, pour modèle, le mouvement brownien étudié dans II et pour information la fonction $H = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u,t)\text{Log}f(u,t)du$.

Il est intéressant, avant toute interprétation, de rappeler le caractère non subjectif de la théorie classique de l'information : elle ne tient en effet aucun compte de la valeur de l'information, l'entropie mesurant le degré d'indétermination d'une expérience sans se soucier de la nature de ses issues, mais seulement de leurs probabilités. Il suffit, pour

(*) *Pour des particules se déplaçant sur toute la droite, (15) est vraie $\forall t$ et la répartition finale uniforme correspond à une dispersion des particules browniennes dans tout l'espace.*

(**) *La décroissance de l'information de SHANNON est vraie pour les processus markoviens homogènes à distribution d'équilibre uniforme* [3].

mettre en évidence cet aspect de la théorie, de suivre l'évolution au cours du temps de la fonction H selon que la répartition initiale des vitesses est une loi normale centrée à l'origine ou une loi normale quelconque. En effet :

si, à $t = o$, $f_o(u) = f(u,o)$ est la densité de la loi $L(m_o, \sigma)$, on sait qu'à t quelconque $f(u,t)$ est la densité de la loi $L(m_o\, e^{-\beta t}, \alpha + \sigma^2 e^{-2\beta t})$, avec $\alpha(t) = D_o \beta^{-1}(1 - e^{-2\beta t})$.
Il en résulte que :

$$H(o) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_o\,\text{Log}f_o du = \text{Log}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}} - \frac{1}{2} \;;$$

$$H(\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\infty\,\text{Log}f_\infty du = \text{Log}\frac{1}{\sqrt{2\Pi\alpha(\infty)}} - \frac{1}{2} \;;$$

(16) $$\frac{dH}{dt} = \beta\left\{1 - D_o\left[D_o(1 - e^{-2\beta t}) + \beta\sigma^2 e^{-2\beta t}\right]^{-1}\right\}.$$

Comme on peut le constater, une variation du paramètre m_o revient seulement à faire subir une translation à la densité $f(u,t)$ sans modifier les trois précédentes relations ; que la densité initiale f_o soit centrée ou non, la quantité d'information fournie par le système a la même valeur dans les deux cas. L'information ne détermine pas dans une épreuve probabiliste la valeur de la variable aléatoire qui lui est associée et définit seulement une distribution caractéristique de cette variable.

Variations et stationnarité de l'information de SHANNON :

Si l'on prend la fonction H pour mesure de l'information, on vérifie aisément que pour une répartition initiale gaussienne des vitesses, l'information est une fonction monotone (croissante ou décroissante) du temps, stationnaire à l'état d'équilibre seulement. En effet, en vertu de (16) :

(17) $$\frac{dH}{dt} = o \iff e^{-2\beta t} (\sigma^2 - D_o \beta^{-1}) = o \;;$$

une fois l'écart-type initial σ fixé, la fonction H est forcément monotone et n'atteint son extremum, selon (17), que dans deux cas :

- soit pour $\sigma^2 = D_o \beta^{-1} = kT/m$, c'est-à-dire pour une répartition initiale des vitesses qui serait celle de MAXWELL-BOLTZMANN ;

- soit pour t infini, autrement dit une fois l'équilibre réalisé et donc une fois encore pour la répartition de MAXWELL. Cet "extremum" d'information vaut alors :

(18) $$H(\infty) = - \text{Log}\sqrt{2\Pi\alpha(\infty)} - \frac{1}{2} = - \text{Log}\sqrt{2\Pi e k T\, m^{-1}} \; .$$

Il est à noter que l'usage du seul Calcul des Variations permet de retrouver (18) et d'énoncer, d'une façon plus générale, que : parmi toutes les distributions possibles des vitesses à un instant t, c'est la distribution de probabilité normale $L\left(o\,, \sqrt{\frac{2E(t)}{m}}\right)$ où E(t) est l'énergie du système, qui conduit à un extremum de l'information dont la valeur est :

$$H(t) = - \text{Log} \sqrt{m^{-1}\; 4\Pi e E(t)} \; .$$

Contrairement donc au modèle de la diffusion, l'information de SHANNON - si elle est cependant monotone - ne décroît pas forcément au cours du temps. L'équation (16), cas particulier de l'équation (10) montre bien que H croît ou décroît selon que l'on se donne un écart-type σ des vitesses au départ, supérieur ou inférieur à $\sqrt{\frac{kT}{m}}$. La décroissance de

H n'est donc vraie que pour des conditions initiales bien spécifiées. Les raisons en sont les suivantes :

- pour la Thermodynamique, l'information de SHANNON n'est autre que la fonction H de BOLTZMANN ou l'entropie thermodynamique (au signe ou à une constante près). Il est donc normal que H ne décroisse pas forcément, le système concerné étant fermé (en contact avec le milieu extérieur à la température T) ; le véritable potentiel thermodynamique du système n'est plus l'entropie, mais l'énergie libre conformément à l'évolution des processus irréversibles.

- d'un point de vue probabiliste, l'information de SHANNON définie ici par la fonction $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,t) \text{Log} f(u,t) du$ ne reste pas invariante lors d'un changement de variable. Il est en effet connu [13] que lorsque l'on passe d'un système de coordonnées u à un système de coordonnées V, l'entropie initiale H_u se transforme en :

(19) $$H_V = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u,t)\, \frac{\text{Log} f(u,t)}{|J(V/u)|}\, du,$$

où J(u/V) désigne le Jacobien de la transformation. Ceci n'a rien de surprenant car c'est, lors d'un changement de coordonnées, la probabilité élémentaire fdu qui demeure invariante et non pas la densité de probabilité f. Pour contourner cette difficulté, on est incité à substituer à l'information de SHANNON une expression de la forme [14] :

(20) $$I = \int_{\Omega} f \;\text{Log}\, \frac{f}{\Phi}\, d\tau$$

dans laquelle la fonction Φ possède la même "variance" que la fonction f, autrement dit celle d'une densité de probabilité. Les deux avantages de I sur H se vérifient aisément :

$$I > o \quad \text{et} \quad I = o \quad \text{si} \quad f \equiv \Phi \qquad [10]$$

$I_V = I_u$: l'invariance de I est assurée.

I caractérise le "gain" d'information lorsqu'on passe de la distribution de densité f à la distribution de densité Φ .

IV - ENERGIE LIBRE ET GAIN D'INFORMATION

Pour suivre l'évolution du système d'un instant t à un instant τ ; il est normal de choisir pour fonction Φ dans (20) la fonction f à cet instant précis τ en sorte qu'avec $\Phi = f(u,\tau)$, I représentera le gain d'information lorsque le système évolue de t jusqu'à τ . Le cas particulier où τ est infini paraît privilégié car il caractérise l'état d'équilibre stable du système. Comme le montre ce qui suit, des considérations dictées par la Thermodynamique confirment l'intérêt d'une définition de l'information par la fonction :

$$(21) \qquad I(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u,t) \operatorname{Log} \frac{f(u,t)}{f_\infty} \, du \ , \qquad f_\infty = f(u,\infty) .$$

Mettons en évidence, pour le modèle étudié, le lien étroit qui existe entre l'énergie libre F de HELMHOLTZ et le gain d'information (ou simplement information) I.

D'après l'expression (4) de f_∞ , on a :

$$\frac{1}{2} mu^2 = kT \left(\operatorname{Log} \sqrt{\frac{m}{2\Pi kT}} - \operatorname{Log} f_\infty \right) ,$$

ce qui entraîne dans (2), compte tenu de la norme de f et de (21) :

$$(22) \qquad F = kT\, I + kT \operatorname{Log} \sqrt{\frac{m}{2\Pi kT}} .$$

Par ailleurs, selon (18) et puisque $\overline{E}_c(t) \to \frac{1}{2}\, kT$ si $t \to \infty$, on obtient :

$$kT \operatorname{Log} \sqrt{\frac{m}{2\Pi kT}} = kT\, H(\infty) + \overline{E}_c(\infty) = F(\infty) = F_\infty \ ;$$

si bien qu'en vertu de (22) :

$$(23) \qquad I(t) = (kT)^{-1} \left(F(t) - F_\infty \right) .$$

L'analogie énergie libre-information est évidente ; l'information I n'est autre que l'énergie libre F, à des constantes additive $(-F_\infty/kT)$ et multiplicative $(1/kT)$ près qui ne dépendent pas du temps.
Il découle en particulier de (23) et (14) que :

$$(24) \qquad \forall t \quad \frac{dI(t)}{dt} = (kT)^{-1} \frac{dF(t)}{dt} \leq o \ ,$$

l'égalité correspondant à la stabilité du système. La décroissance de l'information - telle que nous l'avons mesurée - a été établie dans [3] pour les processus markoviens homogènes continus ; (24) apparaît comme une confirmation supplémentaire de ce résultat. Faisons à présent quelques remarques.

Entropie et énergie libre :

Puisque, d'après (1) et (23) ,

$$F(t) = \overline{E}_c(t) + kTH(t) = F_\infty + kT\, I(t),$$

l'information I joue le même rôle que H pourvu que l'on substitue à l'énergie (variable) $\overline{E}_c$, l'énergie (constante) F_∞ . En d'autres termes, pour tout système dont l'énergie (interne) demeure invariante au cours du temps, le rôle du potentiel thermodynamique qui en gouverne l'évolution peut être tenu par la fonction H de BOLTZMANN : c'est précisément le cas pour le modèle de la diffusion étudié dans [4] . Par contre l'énergie libre joue seule ce rôle lorsque l'énergie interne varie.

D'une façon générale, l'énergie libre ou l'information I rend mieux compte de l'évolution d'un système que l'entropie ou l'information H.

Si l'on reprend, pour conclure, le modèle particulier de la diffusion dans le cas d'un intervalle fini (o,ℓ), donc d'une répartition finale de densité $f_\infty = 1/\ell$, on vérifie aisément que :

(25) $$I(t) - H(t) = \text{Log}\ell \ .$$

Sachant en outre que $H(t) \to -\text{Log}\ell$ si $t \to \infty$, (25) confirme :

d'une part que l'information I s'annule bien si et seulement si, dans l'expression (21), $f \equiv f_\infty$;

d'autre part que l'on a bien affaire à un système isolé, entropie et énergie libre ne différant que par une constante.

Information et néguentropie ; principe de BRILLOUIN

Si l'on admet qu'on ne sait rien a priori sur la densité $f(u,\infty)$ de la distribution d'équilibre, la quantité d'information contenue dans le système est en moyenne $\overline{\text{Log}f(u,t)}$. Apprendre que c'est la répartition de MAXWELL de densité f_∞ qui se réalisera à l'équilibre, revient à posséder une certaine information moyenne $\overline{\text{Log}f_\infty}$. Il est alors naturel de soustraire cette quantité de la précédente, autrement dit de mesurer l'information par :

(26) $$\overline{\text{Log}f} - \overline{\text{Log}f_\infty} = \int_{-\infty}^{+\infty} f\text{Log}f du - \int_{-\infty}^{+\infty} f\text{Log}f_\infty \, du = I \ .$$

I, différence entre deux quantités d'information, correspond bien à un "gain" d'information.

Les égalités (26) et (23) mettent bien en relief l'équivalence entre gain d'information et perte d'énergie libre.
Toute acquisition d'information (*) :

$$\Delta I = I(t) - I(t') \qquad t<t'$$

se traduit par une perte d'énergie :

$$\Delta F = (kT)^{-1}\big(F(t) - F(t')\big) \qquad t<t'.$$

Ceci n'est pas sans rappeler les conceptions de BRILLOUIN dans ce domaine et notamment l'équivalence entre information et néguentropie [11] .

Evolution vers l'équilibre : distance probabiliste.

Si l'on sait que les vitesses tendent, au cours du temps, à se répartir selon la distribution d'équilibre de MAXWELL-BOLTZMANN, on ne sait, par contre, pas si cette tendance s'effectue de façon monotone dans le temps. En particulier, si $f(u,t_1)$ et $f(u,t_2)$ caractérisent les distributions du système aux instants finis t_1 et t_2 $(t_1<t_2)$, on ne peut a priori affirmer que $f(u,t_2)$ est plus "proche" que $f(u,t_1)$ de f_∞ . Cette "proximité" peut s'exprimer au moyen de la "divergence" entre deux distributions [10] :

(27) $$J(f,f_\infty) = J(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f-f_\infty) \text{ Log } \frac{f}{f_\infty} \, du.$$

Montrons que, f obéissant à l'équation de FÖKKER-PLANCK, la fonction J(t) est monotone décroissante ; autrement dit que

(*) *"Acquisition" ou "perte" selon que l'information est "l'incertitude" ou au contraire la "connaissance" relative au système.*

l'on a, au fur et à mesure qu'évolue le système, de plus en plus de difficulté à discerner f de f_∞ . Remarquons auparavant qu'avec la notation $I(t) = I(f,f_\infty)$ on a :

$$J(f,f_\infty) = I(f,f_\infty) + I(f_\infty,f) ,$$

$$J(f,f_\infty) = J(f_\infty,f) .$$

En mettant J sous la forme :

$$J = I + H(\infty) - \int_{-\infty}^{+\infty} f_\infty \mathrm{Log} f du = I + H(\infty) - L, \tag{28}$$

il est facile de calculer, en s'aidant de l'équation (5), la dérivée temporelle de L :

$$\frac{dL}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\infty \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial t} du = D_o \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_\infty}{f}\frac{\partial}{\partial u}\left(f\frac{\partial}{\partial u} \mathrm{Log}\frac{f}{f_\infty}\right)du$$

En intégrant par parties et en tenant compte des relations suivantes :

$$\frac{f_\infty}{f}\frac{\partial f}{\partial u} = f_\infty \frac{\partial}{\partial u}\mathrm{Log} f \quad , \quad \frac{\partial f_\infty}{\partial u} = f_\infty \frac{\partial}{\partial u}\mathrm{Log} f_\infty ,$$

on en déduit :

$$\frac{dL}{dt} = D_o \int_{-\infty}^{+\infty} f_\infty\left(\frac{\partial}{\partial u}\mathrm{Log}\frac{f}{f_\infty}\right)^2 du . \tag{29}$$

Il résulte alors de (29) , (28), (23) et (14) que :

$$\frac{dJ}{dt} = - D_o \int_{-\infty}^{+\infty} (f+f_\infty)\left(\frac{\partial}{\partial u}\mathrm{Log}\frac{f}{f_\infty}\right)^2 du . \tag{30}$$

L'intégrand, dans (30), n'est jamais négatif et $\frac{dJ}{dt} \leq o \ \forall t$, l'égalité survenant si et seulement si $f \equiv f_\infty$. Ceci confirme que toute distribution initiale des vitesses tend à se rapprocher de la distribution finale de MAXWELL pour finalement l'atteindre à l'équilibre.

Extension aux informations et gains d'information d'ordre α :

Les résultats qui précèdent peuvent être étendus à l'information H_α ou au gain d'information I_α introduits par RENYI [15] et pour lesquels les fonctions H et I se présentent comme des cas limites.

Le gain d'information I_α (d'ordre α) pour la variable continue u de densité de répartition f(u,t) est représenté par l'expression, lorsqu'elle existe (*),

$$I_\alpha = (\alpha-1)^{-1} \mathrm{Log} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f^\alpha(u,t)}{f_\infty^{\alpha-1}(u)} du \qquad \begin{cases}\alpha > o \\ \alpha \neq 1 .\end{cases} \tag{31}$$

La limite (si elle existe) pour $\alpha \to 1$ représente précisement le gain d'information I :

$$I_1 = \lim_{\alpha \to 1} I_\alpha = I .$$

Dans le cas particulier ou f_∞ est uniforme (cas de la diffusion dans un intervalle fini (o,ℓ) par exemple) on sait qu'à une constante près la fonction I redonne la fonction H (ou l'information de SHANNON). C'est pourquoi cette dernière peut, à son tour, être regardée comme la limite pour $\alpha \to 1$ d'une information H_α ainsi définie :

$$H_\alpha = (\alpha-1)^{-1} \mathrm{Log} \int_{-\infty}^{+\infty} f^\alpha(x) dx \qquad \begin{cases}\alpha > o \\ \alpha \neq 1\end{cases} , \tag{32}$$

$$H_1 = \lim_{\alpha \to 1} H_\alpha = H .$$

Les deux résultats qui suivent sont des cas particuliers d'un résultat déjà établi dans [3] :

(*) *La définition qui suit est, comme pour celle de I, bâtie autour de la densité particulière f_∞. La signification statistique de I_α en général, est donnée par RENYI dans [12].*

(33) $$\frac{dI_\alpha}{dt} = -\alpha D_o \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f^\alpha}{f_\infty^{\alpha-1}} \left(\frac{\partial}{\partial u} \text{Log} \frac{f}{f_\infty}\right)^2 du}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f^\alpha}{f_\infty^{\alpha-1}} du},$$

(34) $$\frac{dH_\alpha}{dt} = -\alpha D \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x} \text{Log} f\right)^2 dx}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f^\alpha dx}.$$

I_α décroît donc constamment au cours du temps jusqu'à une valeur extrêmale pour $f \equiv f_\infty$; c'est là l'équivalent du principe du minimum d'énergie libre pour les systèmes fermés.

Il en est de même pour H_α qui atteint son minimum pour une distribution uniforme à l'équilibre ; on retrouve là le théorème H de BOLTZMANN pour les systèmes isolés.

Il est enfin bon de vérifier que les expressions des dérivées temporelles de H et I découlent des limites suivantes :

(35) $$\frac{dI}{dt} = \lim_{\alpha \to 1} \frac{dI_\alpha}{dt} = -D_o \int_{-\infty}^{+\infty} f \left(\frac{\partial}{\partial u} \text{Log} \frac{f}{f_\infty}\right)^2 du ,$$

(36) $$\frac{dH}{dt} = \lim_{\alpha \to 1} \frac{dH_\alpha}{dt} = -D \int_{-\infty}^{+\infty} f \left(\frac{\partial}{\partial x} \text{Log} f\right)^2 dx .$$

(35) est conforme à (14) et (36) au résultat établi dans [4].

<u>*EN CONCLUSION*</u>, on observe en fait qu'un système isolé, une entropie, une information de SHANNON ne sont que les cas particuliers d'un système fermé, d'une énergie libre ou d'un gain d'information : dans tous les cas c'est ce dernier qui semble jouer le rôle de potentiel thermodynamique du système, en accord d'une part avec la Thermodynamique des processus irréversibles, d'autre part avec la théorie des processus markoviens continus.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A . BLANC-LAPIERRE - "Mécanique Statistique" , Masson, Paris, 1967.

[2] J. VILLE - "Entropie et Information", Revue du Cethedec, n°1, 19

[3] P. HAMMAD - "Information dans les systèmes à caractère markovien" Revue "Publications Econométriques", Janvier 77.

[4] P. HAMMAD & G. LOCHAK - "C.R. Acac. Sc. Paris", 266, série B, 1968, p. 25

[5] E. BOREL - "Mécanique Statistique Classique", G. Villars, Paris,

[6] L. de BROGLIE - "La Thermodynamique de la particule isolée" (ou Therm mique cachée des particules), G. Villars, Paris, 196

[7] MING CHEN WANG & G.E. UHLENBECK - "Theory of the Brownian Motion", Rev. Mod. Phys., t. n° 2, p.3.

[8] P. HAMMAD - "C.R. Acad. Sc. Paris", 266, série B, 1968, p. 981.

[9] P. HAMMAD - "Le rôle de l'énergie libre pour des systèmes régis p l'équation de Fökker-Planck", Ann. Inst. Henri Poinc Vol. XXV, n° 2, 1976, p. 183.

[10] S. KULLBACK - "Information Theory and Statistics", Dover Publ., N.Y

[11] L. BRILLOUIN - "La Science et la Théorie de l'Information", Masson, Paris, 1959.

[12] A. RENYI - "Calcul des Probabilités", Dunod, Paris, 1966.

[13] S. GOLDMAN - "Information Theory", Dover Publ. n.Y., 1968.

[14] I. VINCZE - "On the Maximum Probability Principle in Statistical European Meeting of Statisticians, Budapest, 1972.

[15] A. RENYI - "On Measures of Entropy and Informations", Proc. Four Berkeley Symposium on Math. Stat. Prob., 1960, Vol. Univ. California Press.

[16] C.E. SHANNON "A Mathematical Theory of Communication" Bell Syst. T Journ., Vol. 27, 1948.