

LA THÉORIE STATISTIQUE DES CHAMPS

ET LA MÉCANIQUE QUANTIQUE

par M. Yuri RYBAKOV

Université de l'Amitié des peuples, Chaire de Physique théorique,
3, rue Ordjonikidzé, 117923, GSP, MOSCOU V-302 (U.R.S.S.)

(manuscrit reçu le 10 Janvier 1977)

Résumé : On applique la méthode statistique de Gibbs à la description des solutions régulières des équations non linéaires de champ. En faisant correspondre ces solutions aux particules élémentaires, on étudie la liaison possible entre la quantification des grandeurs physiques et la stabilité en probabilité. Dans le cas non relativiste on construit l'espace hilbertien aléatoire, ce qui permet de satisfaire au principe de correspondance à la mécanique quantique non relativiste.

I - INTRODUCTION.

L'expérience confirme brillamment toutes les prédictions de la mécanique quantique pour les systèmes à un nombre fini de degrés de liberté (le domaine non relativiste). Néanmoins, l'application directe des postulats quantiques aux systèmes à un nombre infini de degrés de liberté (champs relativistes en interaction) ramène à des difficultés insurmontables. Ceci permet de supposer que les postulats quantiques ne soient pas applicables, au moins sous leur forme orthodoxe, aux champs relativistes en interaction et que dans la théorie future des particules élémentaires ces postulats ne soient valables qu'à titre d'approximation.

Il nous paraît donc important de chercher une telle généralisation de la mécanique quantique qui contiendrait les postulats orthodoxes dans la limite non relativiste en leur donnant une interprétation déterministe (causale). Parmi les tentatives de ce genre indiquons comme la plus conséquente la théorie de "la double solution" proposée par L. de Broglie ⁽¹⁾. Dans cette théorie, on représente les particules élémentaires, en suivant les idées de G. Mie ⁽²⁾ et A. Einstein ⁽³⁾, comme les bosses de champ décrits par les solutions régulières de certaines équations non linéaires. L'évolution spatiotemporelle de ces solutions détermine le comportement des particules correspondantes, ce qui permet de considérer la théorie de de Broglie comme déterministe.

Cependant, en donnant des preuves à l'appui du postulat statistique de M. Born, de Broglie utilise l'hypothèse supplémentaire de Bohm-Vigier ⁽⁴⁾ sur l'existence d'un milieu subquantique servant de source des perturbations aléatoires (la méthode statistique de Langevin). Malgré l'attrait de cette hypothèse, c'est gênant de la concilier au schéma déterministe et, en particulier, aux lois de conservation. C'est pourquoi il nous paraît souhaitable de rejeter l'hypothèse en question et retener la description déterministe.

Notons que l'exemple de la mécanique statistique de Gibbs nous suggère une telle possibilité. En effet, dans le schéma de Gibbs l'évolution d'un système dynamique est régie par la loi déterministe, les trajectoires du système étant déterminées par les conditions initiales auxquelles on assigne des probabilités a priori. Ainsi donc, l'origine statistique du schéma de Gibbs réside en caractère aléatoire des données initiales, tandis que celle du schéma de Langevin est causée par les sources externes aléatoires. Il est à noter qu'en théorie du champ les données initiales sont forcément aléatoires puisque le champ est un système à un nombre infini de degrés de liberté ce qui ne permet pas de les fixer précisément.

Le but de notre article est l'étude de quelques possibilités de l'application de la théorie statistique des champs, basée sur la méthode de Gibbs, à la description des particules élémentaires. En section II on introduit la notion de la solution régulière des équations de champ et on expose les éléments de la description statistique des champs. En particulier, on y écrit l'équation de Hopf pour la fonctionnelle caractéristique

(génératrice) et l'expression générale pour la probabilité de transition. En section III on discute la liaison possible entre la quantification des grandeurs physiques et la condition de stabilité en probabilité. En section IV on déduit, dans le cadre de la théorie statistique des champs, les postulats de base de la mécanique quantique non relativiste : le postulat statistique de M. Born, le postulat sur l'espace hilbertien et la règle à calculer les moyennes.

II - DESCRIPTION STATISTIQUE DES CHAMPS REGULIERS.

Considérons un champ réel relativiste $\phi(x)$ à m composantes $\phi_i(x)$, $i = \overline{1, m}$, définies sur l'espace de Minkowski $M \ni x$ avec la métrique $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$; $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. Supposons que le champ $\phi(x)$ satisfasse à l'équation qu'on peut obtenir à partir d'un principe variationnel :

$$(2.1) \quad \delta \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = 0$$

sous la condition $\delta\phi|_{\partial\Omega} = 0$, où $\partial\Omega$ est la frontière d'un domaine Ω en espace-temps. Comme on sait, on peut toujours transcrire les équations relativistes de champ sous la forme ^(2,3) :

$$(2.2) \quad (\beta^\mu \partial_\mu - M(\phi))\phi = 0$$

avec β^μ des matrices constantes et $M(\phi)$ une fonction du champ ϕ .

Le champ ϕ sera appelé régulier si les fonctions $\phi_i(x)$, $i = \overline{1, m}$, sont continument dérivables et toutes les grandeurs physiques, construites à l'aide des ϕ_i , sont bornées. En particulier, le champ ϕ est régulier si $\phi \in C_1 \cap L_2$, i.e. si les dérivées $\partial_\mu \phi_i(x)$ sont continues et $\int_S dS \phi_i^2 < \infty$, avec S une hypersurface du genre espace. Dans la suite on supposera que l'équation (2.2) admette comme solutions les champs réguliers qui sont les seuls ayant un sens physique.

Parmi les solutions régulières de l'équation de champ nous choisirons parfois celles qui correspondent à une seule particule. Le champ ϕ , décrit par une solution de ce genre, est pra-

tiquement localisé dans un domaine de tube $\tau \subset M$ et détermine, d'après Einstein et de Broglie, la structure interne de la particule correspondante. Définissons alors le volume propre de la particule comme domaine $V_0 = S_0 \cap \tau$, S_0 étant un hyperplan orthogonal à l'impulsion P^μ de la particule. Estimons la dimension L_0 du domaine $V_0 = L_0^3$ comme suit :

$$(2.3) \quad L_0 = \text{diam} \{x : \phi^2(x) \geq \delta; x \in S_0\}$$

avec δ un petit nombre positif.

Soulignons que la fonction $M(\phi)$ doit être spécifiée de telle façon que la dimension L_0 soit microscopique.

Pour la description statistique de l'ensemble R de solutions régulières il suffit de connaître la fonctionnelle caractéristique :

$$(2.4) \quad \chi_a(\eta) = \langle \exp i \int_{\Omega} d^4x (\phi\eta) \rangle$$

avec $\eta(x)$ un champ auxiliaire soumis à la condition $\eta|_{\partial\Omega} = 0$. On effectue ici la moyenne $\langle \dots \rangle$ à l'aide d'une mesure de probabilité $dP_a(\phi(x))$ qui s'annule sur l'ensemble R' (complémentaire de R), l'indice "a" symbolisant l'ensemble $a = \{a_1, a_2, \dots, a_s\}$ de valeurs moyennes $a_i = \langle A_i \rangle$ des observables physiques A_1, A_2, \dots, A_s . L'ensemble d'observables comprend l'énergie E , l'impulsion \vec{P} , le moment cinétique \vec{J} , la charge électrique Q , la position du centre de masse \vec{X} etc ...

Il est commode d'introduire le champ moyen $u(x) \equiv \langle \phi(x) \rangle$ et le champ aléatoire $v(x) \equiv \phi(x) - u(x)$, d'où $\langle v(x) \rangle = 0$. Supposons maintenant que la structure de la mesure $dP_a(\phi)$ soit telle qu'en moyenne le champ aléatoire $v(x)$ soit suffisamment petit, au moins dans le domaine V_0 , par rapport au champ moyen $u(x)$. On pourra alors se donner un petit nombre $\epsilon \ll \max_{\{x \in \Omega\}} |u(x)|$ tel qu'on aura :

$$(2.5) \quad \max_{x \in \Omega} \langle |v(x)| + L_0 |\vec{\nabla} v(x)| \rangle \leq \epsilon$$

L'inégalité (2.5) sera considérée comme condition de stabilité en probabilité (en moyenne) de l'état en question.

En utilisant l'équation de champ (2.2), on obtient facilement que la fonctionnelle caractéristique (2.4) satisfait à l'équation :

$$(2.6) \quad \left(\beta^\mu \partial_\mu - M(-i \frac{\delta}{\delta \eta}) \right) \frac{\delta}{\delta \eta} \chi_a = 0$$

connue comme celle de Hopf (^{5,6}). Cette équation régit l'évolution spatiotemporelle de la répartition probabiliste, sa solution étant déterminée par la structure de la mesure de probabilité $dP'_a = dP_a(\phi(x); x \in S')$ sur certaine hypersurface "initiale" S' du genre espace. Il est évident que la mesure dP'_a doit contenir la constante de Planck \hbar à titre de paramètre (par la suite on utilisera les unités naturelles $\hbar = c = 1$).

Calculons maintenant la probabilité dW_{12} de trouver le champ $\phi(t_2, \vec{x})$ au voisinage $D\phi_2$ du point $\phi_2(\vec{x})$ sous la condition que la mesure de probabilité à l'instant $t_1 < t_2$ est $dP_1(\phi_1(\vec{x}))$. On a :

$$(2.7) \quad dW_{12} = D\phi_2 \int dP_1(\phi_1) P(\phi_1 | \phi_2),$$

où $P(\phi_1 | \phi_2)$ est la densité de probabilité pour la transition $\phi_1 \rightarrow \phi_2$.

On a évidemment :

$$(2.8) \quad P(\phi_1 | \phi_2) = \langle \delta(\phi(t_1, \vec{x}) - \phi_1(\vec{x})) \delta(\phi(t_2, \vec{x}) - \phi_2(\vec{x})) \rangle$$

Fournissons le développement fonctionnel de Fourier :

$$(2.9) \quad \delta(\phi(t_k, \vec{x}) - \phi_k(\vec{x})) = \int D\eta_k \exp\{i \int d^3x (\phi(t_k, \vec{x}) - \phi_k(\vec{x})) \eta_k(\vec{x})\},$$

où $D\eta_k$, $k = 1, 2$, sont les mesures fonctionnelles correspondantes. En introduisant (2.9) dans (2.8), on trouve, compte tenu de (2.4) :

$$(2.10) \quad P(\phi_1 | \phi_2) = \iint D\eta_1 D\eta_2 \exp\{-i \int d^3x (\phi_1 \eta_1 + \phi_2 \eta_2)\} \chi_a(\eta_{12}),$$

où $\eta_{12}(x) = \eta_1(\vec{x})\delta(t - t_1) + \eta_2(\vec{x})\delta(t - t_2)$.

Or pour calculer la probabilité dW_{12} par les formules (2.7) et (2.10), il faut connaître la fonctionnelle caractéristique χ_a et la mesure de probabilité $dP_1(\phi_1)$ pour l'état initial. Le point qui n'est pas clair dans ce programme c'est le choix de la mesure initiale dP_1 dont la structure doit s'accorder aux données d'expérience. Pour mieux accomplir cette tâche il nous semble nécessaire d'utiliser le principe de stabilité en probabilité.

III - STABILITE EN PROBABILITE ET QUANTIFICATION DES GRANDEURS PHYSIQUES.

Supposons que l'action dans (2.1) soit invariante par rapport aux transformations d'un groupe de Lie G à r paramètres. Alors, d'après le théorème de Nöther, il existe l'ensemble de r grandeurs physiques $A_i(\phi)$, $i = \overline{1, r}$, se conservant au cours du temps. Mettons ces grandeurs (à l'exclusion de l'énergie E) sous la forme ⁽²³⁾ :

$$(3.1) \quad A_i(\phi) = -i \int d^3x (\pi A_i \phi),$$

où on a introduit la grandeur conjuguée de champ $\pi = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{\phi}$ et les générateurs hermitiens A_i de la représentation correspondante du groupe G . Par la substitution :

$$(3.2) \quad \varphi = 2^{-1/2} (\phi v^{-1} + i v \pi),$$

où v est une constante positive, l'expression (3.1) se ramène à la forme hermitique :

$$(3.3) \quad A_i(\phi) = \int d^3x (\varphi^* A_i \varphi).$$

L'expérience montre que les valeurs observées d'une grandeur physique A_i , i.e. les moyennes $a_i = \langle A_i \rangle$, ne sont pas arbitraires et au total, si l'on considère tous les états possibles, constituent le spectre $S(A_i)$ d'observable A_i . En particulier, soit G le sous-groupe compact maximal du groupe G avec A_i les générateurs de sa représentation quelconque. Alors, comme

on sait, le spectre $S(A_i)$ d'observables correspondants est discret. Il vient donc que les valeurs observées des grandeurs physiques sont quantifiées.

Il est séduisant de lier la quantification des grandeurs physiques avec la stabilité des états stationnaires du système en considération. Les idées de ce genre-là ayant été énoncées par plusieurs auteurs ^(7,8), notons leurs développements intéressants dans les travaux ⁽⁹⁻¹¹⁾. Il nous paraît donc raisonnable d'étudier plus profondément la condition de stabilité en probabilité (2.5).

Dans la suite $\{a; u(x); dP_a(\phi)\}$ désignera l'état du système, en indiquant l'ensemble d'observables physiques "a", le champ moyen $u(x)$ et la mesure de probabilité $dP_a(\phi)$. En remarquant que pour les états les plus stables le nombre ϵ dans l'inégalité (2.5) doit être minimal, concluons que dans ces états-là les variances des grandeurs physiques sont aussi minimales.

Soient $A_i(\phi)$ et $A_k(\phi)$ deux grandeurs arbitraires dont les générateurs satisfont à la condition :

$$(3.4) \quad (A_i, A_k)_- = 0.$$

La variance de la grandeur A_i étant définie par $D(A_i) \equiv \langle (A_i - \langle A_i \rangle)^2 \rangle$, mettons la différence $A_i - \langle A_i \rangle$ sous la forme :

$$(3.5) \quad A_i - \langle A_i \rangle = \int d^3x \varphi^* (A_i - A_k \langle A_i \rangle / A_k) \varphi,$$

d'où, compte tenu de l'inégalité de Schwartz, on déduit l'estimation :

$$(3.6) \quad D(A_i) \leq \left\langle \int d^3x |\varphi|^2 \int d^3x (A_i - A_k \langle A_i \rangle / A_k) \varphi \right\rangle^2.$$

Notons qu'en vertu de (3.4) il existe un système orthonormal et complet $\{\varphi_r(\vec{x})\}$ de fonctions propres communes aux générateurs A_i et A_k . On a donc :

$$(3.7) \quad A_i \varphi_r = \lambda_r^{(i)} \varphi_r; \quad A_k \varphi_r = \lambda_r^{(k)} \varphi_r$$

avec $\lambda_r^{(i)}$, $\lambda_r^{(k)}$ les valeurs propres correspondantes. En introduisant le développement $\varphi = \sum_r C_r \varphi_r$ dans (3.6), on trouve :

$$(3.8) \quad D(A_i) \leq \left\langle \sum_r |C_r|^2 \sum_r |C_r|^2 (\lambda_r^{(i)} - \lambda_r^{(k)} \langle A_i \rangle / A_k)^2 \right\rangle$$

Pour estimer la partie droite en (3.8), remplaçons A_k par $\langle A_k \rangle$ et $|C_r|^2$ par $\langle |C_r|^2 \rangle$. Alors on déduit de (3.8) que la variance $D(A_i)$ est minimale dans un état $\{a; u(x); dP_a(\phi)\}$ pourvu qu'on puisse choisir le numéro r tel que les conditions suivantes soient satisfaites :

$$(3.9) \quad \langle |C_r|^2 \rangle \gg \langle |C_{\bar{r}}|^2 \rangle \quad \forall \bar{r} \neq r;$$

$$(3.10) \quad \frac{\langle A_i \rangle}{\langle A_k \rangle} = \frac{a_i}{a_k} = \frac{\lambda_r^{(i)}}{\lambda_r^{(k)}}$$

Notons que la condition (3.9) permet de fixer la constante v dans (3.2). Pour s'en convaincre considérons à titre d'exemple le champ scalaire à deux composantes ϕ_1 et ϕ_2 . En état à spirale le champ moyen est de la forme :

$$u_1 = \cos(\gamma - \omega t) u(r, \theta); \quad u_2 = \sin(\gamma - \omega t) u(r, \theta), \quad \omega = \text{Cte},$$

avec r, θ, γ les coordonnées sphériques. En posant dans (3.2) $\langle \pi_1 \rangle = \dot{u}_1 = \omega u_2$; $\langle \pi_2 \rangle = \dot{u}_2 = -\omega u_1$, on déduit de (3.9) que $\hat{J}_3 \langle \varphi \rangle = -i \partial_Y \langle \varphi \rangle = \langle \varphi \rangle$, d'où $v = \omega^{-1/2}$.

Ainsi donc, les conditions (3.9) et (3.10) déterminent l'ensemble d'états les plus stables en probabilité. La condition (3.10) étant satisfaite dans chacun de ces états, on conclut qu'il existe une constante h_a caractérisant la mesure de probabilité $dP_a(\phi)$ et telle que pour les états les plus stables $\{a; u(x); dP_a(\phi)\}$ on a :

$$(3.11) \quad \langle A_i \rangle = a_i = \lambda_r^{(i)} h_a$$

avec A_i appartenant au système d'observables déterminé par (3.4). Pour qu'on puisse considérer les relations (3.11) comme conditions de quantification des grandeurs physiques (au sens de Bohr), il faut soumettre la mesure $dP_a(\phi)$ à la condition $h_a = h$. Ça signifie que la constante h_a doit être universelle.

Pour estimer le champ moyen $u(x)$ en première approximation on peut utiliser la méthode suivante. En posant dans (3.1) $\phi = u + v$, on trouve, vu la condition $\langle v \rangle = 0$,

$$(3.12) \quad \langle A_i(\phi) \rangle = A_i(u) + \langle A_i(v) \rangle.$$

Les générateurs A_i étant antisymétriques, en supposant l'invariance de la mesure de probabilité $dP_a(v)$ par rapport aux transformations du groupe G , trouvons :

$$(3.13) \quad \langle A_i(v) \rangle = 0.$$

Alors les conditions de quantification (3.11), vu (3.12) et (3.13), prennent la forme (en posant $h = 1$) :

$$(3.14) \quad A_i(u) = a_i = \lambda_r^{(i)}$$

Notons que les conditions de quantification (3.14) déterminent le champ moyen $u(x)$ pourvu qu'on le considère comme solution stationnaire de l'équation de champ (2.2). Le champ $u(x)$ sera appelé stationnaire si, dans un système de référence où la particule est au repos, il décrit le mouvement uniforme en espace de paramètre du groupe compact G . Cela signifie que le champ stationnaire $u(x)$ ne dépend du temps t que par l'intermédiaire de paramètres $\alpha_i(t)$ du groupe G , tout en posant :

$$(3.15) \quad \alpha_i(t) = \omega_i t; \quad i = \overline{1, d}; \quad d = \dim G,$$

avec les vitesses ω_i constantes. On a donc :

$$(3.16) \quad u(x) = u(\vec{x} | \alpha(t))$$

en désignant $\alpha \equiv \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d\}$. Il s'ensuit que :

$$(3.17) \quad \partial_t u = -i \sum_{k=1}^d \omega_k A_k u.$$

En introduisant (3.17) en l'équation de champ (2.2), il vient :

$$(3.18) \quad \left\{ i\beta^0 \sum_{k=1}^d \omega_k A_k - (\vec{\beta}\vec{V}) + M(u) \right\} u = 0.$$

Le problème se ramène donc à la recherche des fonctions propres d'un opérateur non linéaire contenant les paramètres ω_i dont les valeurs sont déterminées par les conditions (3.14).

IV - CORRESPONDANCE A LA MECANIQUE QUANTIQUE NON RELATIVISTE.

Nous proposons maintenant un procédé possible de déduction, dans le cadre de la théorie statistique des champs, des postulats de base de la mécanique quantique non relativiste. En nous rendant compte du fait que ce procédé n'est pas définitif et en espérant que ses détails plus fins seront établis dans le plus bref délai, nous nous restreindrons aux trois postulats suivants que nous formulerons conformément à la description d'un système de n particules :

1) D'après le postulat statistique de M. Born, à chaque système dynamique, la position de laquelle se donne par le vecteur $q = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ de l'espace de configuration, on fait correspondre l'ensemble statistique quantique décrit par l'amplitude de probabilité $\psi(t, q)$. Cela signifie que la densité de probabilité pour que notre système se trouve au point q à l'instant t est égale à :

$$\rho(t, q) = |\psi(t, q)|^2.$$

2) D'après le postulat sur l'espace hilbertien, connu également comme principe de superposition de Dirac, $\psi(t, q)$ appartient à l'espace de Hilbert \mathcal{H} , d'où l'on tire que l'évolution temporelle de ψ est régie par une équation linéaire (celle de Schrödinger) décrivant, d'après le postulat de M. Born, une transformation unitaire dans \mathcal{H} :

$$i\partial_t \psi = \hat{H}\psi.$$

3) D'après la règle à calculer les moyennes, à chaque observable physique \hat{A} on fait correspondre un opérateur linéaire hermitien A agissant dans \mathcal{H} et tel que la valeur moyenne $\langle A \rangle$ en état ψ est :

$$\langle A \rangle = \int dq \psi^* \hat{A} \psi.$$

On voit donc que la mécanique quantique est la théorie statistique d'une espèce inhabituelle qui décrit des ensembles de systèmes identiques. Pour la construction de tels ensembles dans le cadre de la théorie statistique des champs commençons aux expériences à une seule particule. Soit ΔV un petit volume spatial de centre \vec{x} . On suppose que la dimension $(\Delta V)^{1/3}$ soit déterminée par la précision de mesure des coordonnées de la particule et qu'on ait l'inégalité $\Delta V \gg V_0$.

Supposons qu'à l'instant $t = 0$ on prépare notre système (la particule), c'est-à-dire qu'on fixe l'ensemble d'observables $\{A_1, A_2, \dots, A_S\}$, et puis au temps $t > 0$ on effectue l'observation. Supposons de plus que dans N expériences on ait indiqué ΔN cas tels que la particule (i.e. son centre de masse) se soit trouvée dans le domaine ΔV au temps t . Alors on peut dire que la densité de probabilité pour que la particule se trouve au point \vec{x} à l'instant t est

$$(4.1) \quad \rho(t, \vec{x}) \equiv \rho(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \rho_N(x) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \Delta N / \Delta V.$$

Désignons par $\phi_{(k)}(x)$, $k = \overline{1, N}$, le champ régulier décrivant la particule en k -ième expérience. On peut considérer le champ $\phi_{(k)}(x)$ comme échantillon d'un ensemble de champs aléatoires avec la mesure de probabilité $dP_a^{(k)}(\phi_{(k)}(x))$, chaque mesure $dP_a^{(k)}$, $k = \overline{1, N}$, étant caractérisée par sa trajectoire $\vec{X}^{(k)}(t)$ du centre de masse de la particule. Ceci permet d'obtenir une représentation utile pour le champ moyen correspondant $u_{(k)}(x)$. En effet, si l'on suppose que le mouvement de la particule soit non relativiste, on trouve évidemment que le champ moyen $u_{(k)}(x)$ est presque stationnaire. Alors, compte tenu de (3.16), on obtient :

$$(4.2) \quad u_{(k)}(x) = \langle \phi_{(k)}(x) \rangle \equiv u(\vec{x} - \vec{X}^{(k)}(t) | \alpha(t)).$$

Formons maintenant la grandeur auxiliaire :

$$(4.3) \quad \psi_N(x) \equiv (CN)^{-1/2} \sum_{k=1}^N \langle \varphi_{(k)}(x) \rangle \exp(i\xi_k), \quad C = \text{Cte},$$

où on a utilisé la construction (3.2), i.e.

$$\varphi_{(k)}(x) = 2^{-1/2} (\phi_{(k)} v^{-1} + i v \pi_{(k)}) \equiv \langle \varphi_{(k)}(x) \rangle + \tilde{\varphi}_{(k)}(x),$$

en posant :

$$(4.4) \quad \xi_k \equiv \arg \int d^3x \left[\langle \varphi_{(k)}^*(x) \rangle \tilde{\varphi}_{(k)}(x) \right]_t = 0$$

Les expériences individuelles étant indépendantes, on désignera dans la suite par $\langle \dots \rangle$ la prise de la moyenne à l'aide de la mesure $dP_a^{(1\dots N)} \equiv \prod_{k=1}^N dP_a^{(k)}$. Alors on obtient facilement que :

$$(4.5) \quad \langle |\psi_N(x)|^2 \rangle = (CN)^{-1} \sum_{k=1}^N g(\vec{x} - \vec{X}^{(k)}(t) | \alpha(t)),$$

où, compte tenu de (4.2), on a posé :

$$(4.6) \quad |\langle \varphi_{(k)}(x) \rangle|^2 \equiv g(\vec{x} - \vec{X}^{(k)}(t) | \alpha(t))$$

avec $g(\vec{x} - \vec{X}^{(k)}(t) | \alpha(t))$ une fonction positive, localisée pratiquement dans le domaine V_0 de centre $\vec{X}^{(k)}(t)$.

Choisissons maintenant la constante C dans (4.3) comme suit :

$$(4.7) \quad C \equiv \int d^3x g(\vec{x} - \vec{X}^{(k)}(t) | \alpha(t)).$$

Notons que ce choix est admissible car l'intégrale (4.7) ne dépend pas du temps. En effet, comme on sait ⁽¹²⁾, toutes les représentations du groupe compact G sont unitaires. Il s'ensuit que $\langle \varphi_{(k)}(x) \rangle$ se transforme selon une représentation unitaire du groupe G. D'autre part, il est évident, compte tenu de (4.6), que l'intégrale (4.7) est invariante pour toute transformation unitaire du $\langle \varphi_{(k)}(x) \rangle$. Cela signifie que l'intégrale (4.7) ne dépend pas de paramètres $\alpha(t)$ du groupe G, d'où l'assertion ci-dessus.

En utilisant (4.7) et la condition $\Delta V \gg V_0$, on obtient :

$$(4.8) \quad C^{-1} \int_{\Delta V} d^3x' g(\vec{x}' - \vec{X}^{(k)}(t) | \alpha(t)) = \theta_k \equiv \begin{cases} 0; & \vec{X}^{(k)}(t) \notin \Delta V \\ 1; & \vec{X}^{(k)}(t) \in \Delta V \end{cases}$$

Pour tenir compte de la condition $\Delta V \gg V_0$ explicitement, effectuons la moyenne dans le domaine ΔV en introduisant une nouvelle opération $\langle \dots \rangle$ définie par :

$$(4.9) \quad \langle F(\theta; \vec{x}) \rangle \equiv (\Delta V)^{-1} \int_{\Delta V} d^3x' \langle F(\theta; \vec{x}') \rangle.$$

Alors la relation (4.5), compte tenu de (4.8), prend la forme :

$$(4.10) \quad \langle |\psi_N(x)|^2 \rangle = N^{-1} \Delta N / \Delta V \equiv \rho_N(x).$$

Ainsi donc, on peut interpréter ψ_N comme vecteur de l'espace hermitien aléatoire Z_N avec les éléments de base $\exp(i\xi_k)$ et le produit scalaire $\langle \psi_N^* | \psi_N \rangle$ ⁽¹³⁾.

Notons que à la limite $N \rightarrow \infty$ l'espace Z_N se ramène à l'espace hilbertien aléatoire Z_∞ dont le vecteur $\psi_\infty(x)$ vérifie, en vertu de (4.10), le postulat statistique généralisé de M. Born :

$$(4.11) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \langle |\psi_N(x)|^2 \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \rho_N(x) = \rho(x).$$

Il vient donc que à la limite $N \rightarrow \infty$ le vecteur $\psi_N(x)$ joue le rôle d'amplitude de probabilité pourvu que l'on effectue la moyenne $\langle \dots \rangle$ en tenant compte de la condition $\Delta V \gg V_0$.

Etudions maintenant le passage à la limite $N \rightarrow \infty$ plus étroitement. Notons tout d'abord que $\varphi_{(k)}(x) \in L_2(\mathbb{R}^3)$, d'où l'on tire que $\psi_N(x) \in L_2(\mathbb{R}^3) \otimes Z_N \equiv \mathcal{H}_N$, l'espace \mathcal{H}_N étant muni du produit scalaire :

$$(4.12) \quad (\psi_N | \psi'_N) \equiv \int d^3x \langle \psi_N^*(x) \psi'_N(x) \rangle.$$

Dans la limite $N \rightarrow \infty$ l'espace \mathcal{H}_N devient hilbertien avec les propriétés établies par le lemme suivant.

l e m m e. Dans la limite $N \rightarrow \infty$ le vecteur aléatoire $\psi_N(x) \in \mathcal{H}_N$ est réparti suivant la loi de Gauss de variance $\sigma^2 = \rho(x)$ et de moyenne nulle.

En effet, d'après (4.3), $\psi_N(x)$ est la somme des variables aléatoires indépendantes avec les moyennes nulles. Grâce à la régularité des champs $\varphi^{(k)}$, ces variables sont bornées, ce qui permet d'appliquer le théorème de Lindeberg (14). D'après ce théorème, dans la limite $N \rightarrow \infty$ la variable $\psi_N(x)$ est gaussienne avec la variance $\sigma^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle |\psi_N(x)|^2 \rangle$. Il s'ensuit, compte tenu de (4.11), que $\sigma^2 = \rho(x)$.

Etudions maintenant l'évolution temporelle du vecteur ψ_∞ . En tenant compte de (2.2), (4.2) et (4.3), on trouve :

$$(4.13) \quad i\partial_t \psi_N = (CN)^{-1/2} \sum_{k=1}^N e^{i\xi_k} \left[-i \frac{\dot{\vec{X}}^{(k)} \vec{V}}{\vec{X}^{(k)} \vec{V}} + \sum_{m=1}^d \dot{\alpha}_m A_m \right] \langle \varphi^{(k)} \rangle = (CN)^{-1/2} \sum_{k=1}^N \exp(i\xi_k) \left[\hat{L} \langle \varphi^{(k)} \rangle + \langle \hat{N}(\varphi^{(k)}) \rangle \right],$$

où l'opérateur linéaire \hat{L} provient de (BV) dans (2.2) et $\hat{N}(\varphi)$ est lié avec $M(\phi)$.

Considérons le terme non linéaire dans (4.13) :

$$r_N(x) \equiv (CN)^{-1/2} \sum_{k=1}^N \exp(i\xi_k) \langle \hat{N}(\varphi^{(k)}(x)) \rangle.$$

D'après le lemme, les vecteurs aléatoires $r_\infty(x)$ et $\psi_\infty(x)$ sont gaussiens. Calculons leurs matrices des covariances spatiales. En désignant, vu (4.2), $\langle \hat{N}(\varphi^{(k)}(x)) \rangle \equiv s(\vec{x} - \vec{X}^{(k)}(t) | \alpha)$, on trouve :

$$\langle r_\infty(t, \vec{x}) r_\infty^*(t, \vec{x}') \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} (CN)^{-1} \sum_{k=1}^N s(\vec{x} - \vec{X}^{(k)} | \alpha) s^*(\vec{x}' - \vec{X}^{(k)} | \alpha).$$

La partie droite étant la somme intégrale, on a :

$$\langle r_\infty(t, \vec{x}) r_\infty^*(t, \vec{x}') \rangle = C^{-1} \int d^3 y \rho(t, \vec{y}) s(\vec{x} - \vec{y} | \alpha) s^*(\vec{x}' - \vec{y} | \alpha).$$

Si l'on prend en considération que la précision de mesure des coordonnées est $(\Delta V)^{1/3}$, alors pour $\vec{x} \neq \vec{x}'$ il faut prendre $\vec{x} \in \Delta V$ et $\vec{x}' \notin \Delta V$. Comme la fonction $s(\vec{x})$ est concentrée dans le domaine $V_0 \ll \Delta V$, où $\rho(t, \vec{x})$ est constante, on obtient que $\langle r_\infty(t, \vec{x}) r_\infty^*(t, \vec{x}') \rangle = 0$, si $\vec{x} \neq \vec{x}'$, et $\langle r_\infty(x) r_\infty^*(x) \rangle = \rho(x) S S^*$, où la matrice non dégénérée S est définie par :

$$S S^* \equiv C^{-1} \int d^3 y s(\vec{x} - \vec{y} | \alpha) s^*(\vec{x} - \vec{y} | \alpha).$$

De la même façon on trouve que $\langle \psi_\infty(t, \vec{x}) \psi_\infty^*(t, \vec{x}') \rangle = 0$, si $\vec{x} \neq \vec{x}'$, et $\langle \psi_\infty(x) \psi_\infty^*(x) \rangle = \rho(x) P P^*$, en posant :

$$\langle \varphi^{(k)}(x) \rangle \equiv p(\vec{x} - \vec{X}^{(k)}(t) | \alpha);$$

$$P P^* \equiv C^{-1} \int d^3 y p(\vec{x} - \vec{y} | \alpha) p^*(\vec{x} - \vec{y} | \alpha).$$

Il s'ensuit que les vecteurs aléatoires gaussiens $r_\infty(x)$ et $\bar{r}_\infty(x) \equiv \hat{K} \psi_\infty(x)$, où $\hat{K} = \hat{K}^* = S(S^* P P^* S)^{-1/2} S^*$, ont les mêmes covariances spatiales. Ca signifie que dans la limite $N \rightarrow \infty$ on peut approximer l'équation d'évolution (4.13) par une équation linéaire :

$$(4.14) \quad i\partial_t \psi_\infty = \hat{H} \psi_\infty,$$

où, d'après (4.13), l'opérateur \hat{H} est hermitien et donné par :

$$(4.15) \quad \hat{H} = \hat{L} + \hat{K} = \hat{L} + S(S^* P P^* S)^{-1/2} S^*$$

l'opérateur \hat{K} étant déterminé par la structure interne de la particule.

Ainsi donc, en remplaçant r_∞ par \bar{r}_∞ , on gagne le principe de superposition de Dirac, mais on perd l'information sur les covariances temporelles ($t' \neq t$), car :

$$(4.16) \quad \langle \bar{r}_\infty(t, \vec{x}) r_\infty^*(t', \vec{x}') \rangle \neq \langle \bar{r}_\infty(t, \vec{x}) \bar{r}_\infty^*(t', \vec{x}') \rangle.$$

A notre avis, ce sacrifice est inévitable et lié au fait que la mécanique quantique ne donne pas de règle univoque à calculer les covariances temporelles (24).

Ainsi donc, nous avons obtenu une représentation spéciale de la mécanique quantique, telle que les vecteurs d'état appartiennent à l'espace aléatoire de Hilbert. Il est à noter que les représentations de ce genre-là ont été découvertes par N. Wiener (15, 16). Il considéra le processus brownien complexe

z en espace- \vec{x} (\vec{x} jouant le rôle du temps), en faisant correspondre un nombre $\alpha \in (0, 1)$ à chaque trajectoire brownienne $z(\vec{x}, \alpha)$. Alors il vient que la fonction d'onde de la particule en représentation- α de Wiener se donne par :

$$(4.17) \quad \psi(\alpha) = \int \psi(t, \vec{x}) d_x z(\vec{x}, \alpha),$$

$\psi(t, \vec{x})$ étant la fonction d'onde en représentation de Schrödinger.

Notons que l'existence de la transformation unitaire (4.17) s'accorde au théorème général sur l'isomorphisme des espaces hilbertiens séparables (17). En appliquant ce théorème à notre cas, concluons que dans la limite $N \rightarrow \infty$ on peut construire une transformation linéaire unitaire :

$$(4.18) \quad \psi_\infty(t, \vec{x}) = \hat{U} \psi(t, \vec{x})$$

effectuant l'application isomorphe de l'espace $\mathcal{H} \ni \psi$ sur l'espace aléatoire \mathcal{H}_∞ . Pour éclaircir la structure de l'opérateur \hat{U} utilisons le lemme et le fait que $|\psi(x)|^2 = \rho(x)$. Alors, si l'on prend en considération que la fonction d'onde $\psi(x)$ est pratiquement constante dans le domaine ΔV , on déduit de (4.11) que l'opérateur \hat{U} agit comme multiplication par une grandeur aléatoire gaussienne $z(x)$ de variance $\sigma_z^2 = \langle |z(x)|^2 \rangle = 1$ et de moyenne nulle.

Grâce à l'isomorphisme des espaces hilbertiens \mathcal{H} et \mathcal{H}_∞ nous pouvons donc nous placer en schéma de Schrödinger,

i.e. utiliser la fonction d'onde non stochastique

$\psi(x) = \langle \psi_\infty(x) z^*(x) \rangle$, ce qui est plus commode. Comme la

structure du processus aléatoire $z(x)$ n'est pas claire pour le moment, nous ne pouvons pas utiliser l'équation d'évolution (4.14). Cependant, grâce à la linéarité de l'application \hat{U} , l'évolution temporelle du vecteur ψ doit être régie par une équation linéaire. En ajoutant la condition de normalisation de la probabilité :

$$(4.19) \quad \int d^3x \rho(t, \vec{x}) = \int d^3x |\psi(t, \vec{x})|^2 = 1,$$

on déduit que l'équation d'évolution s'écrira (18) :

$$(4.20) \quad i \partial_t \psi = \hat{H} \psi,$$

avec \hat{H} un opérateur linéaire hermitien dans \mathcal{H} .

Remarquons que l'équation (4.20) peut être obtenue à partir du principe variationnel :

$$(4.21) \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \psi^* \left(\frac{i}{2} \partial_t^2 - \hat{H} \right) \psi = 0$$

sous les conditions : $\delta \psi(t_1, \vec{x}) = \delta \psi(t_2, \vec{x}) = \lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \delta \psi(t, \vec{x}) = 0$.

Identifions le principe variationnel (4.21) à celui de moindre action $\delta S = 0$ et considérons le groupe G de transformations laissant l'action S invariante. En notant que l'équation (4.20) décrit l'évolution de la densité de probabilité $\rho(x)$ et des moyennes correspondantes, il est raisonnable d'interpréter les intégrales premières, déduites de (4.21), comme valeurs moyennes des observables physiques. D'après le théorème de Nöther, les intégrales premières s'écrivent sous la forme :

$$(4.22) \quad \langle A_i \rangle = \int d^3x \psi^* A_i \psi,$$

avec A_i les générateurs hermitiens. En particulier, pour les valeurs moyennes de l'énergie $\langle E \rangle$ et de l'impulsion $\langle \vec{P} \rangle$ d'une particule libre on a les expressions :

$$(4.23) \quad \langle E \rangle = \int d^3x \psi^* \hat{H} \psi; \quad \langle \vec{P} \rangle = \int d^3x \psi^* (-i \vec{\nabla}) \psi,$$

ce qui éclaircit le sens de l'opérateur \hat{H} .

Le calcul des valeurs moyennes de la position \vec{X} du centre de masse ou d'une fonction arbitraire $F(\vec{X})$ s'effectue en conformité avec l'expression pour la densité de probabilité $\rho(t, \vec{x}) = |\psi(t, \vec{x})|^2$:

$$(4.24) \quad \langle F(\vec{X}) \rangle = \int d^3x \rho(t, \vec{x}) F(\vec{x}) = \int d^3x \psi^* F(\vec{x}) \psi.$$

Il y a aussi une classe de grandeurs physiques qui sont d'origine dynamique, c'est-à-dire qu'ils se révèlent en présence d'un champ de force. Par exemple, en présence du champ électromagnétique $\{\vec{E}, \vec{B}\}$ la particule, en état ψ , possède les moments électrique et magnétique définis comme suit :

$$\langle \vec{p} \rangle = - \int d^3x \psi^* (\partial \hat{H} / \partial \vec{E})_{\vec{E}} \psi = \vec{0} \psi$$

$$\langle \vec{\mu} \rangle = - \int d^3x \psi^* (\partial \hat{H} / \partial \vec{B})_{\vec{B}} \psi = \vec{0} \psi$$

Par analogie on peut introduire les moments multipolaires.

Or concluons qu'en vertu de la linéarité de l'équation d'évolution (4.20) la valeur moyenne d'une observable physique A s'écrit :

$$(4.25) \quad \langle A \rangle = \int d^3x \psi^* \hat{A} \psi,$$

avec \hat{A} un opérateur linéaire hermitien. Ceci donc confirme la règle quantique à calculer les moyennes. En ce qui concerne la démonstration de cette règle en représentation aléatoire cf. (1³).

Comparons maintenant (4.25) à la condition de stabilité (3.14) en nous bornant pour la simplicité au cas où le spectre de l'opérateur A est discret et non dégénéré, i.e.

$S(A) = \{\lambda_r\}$; $r = 1, 2 \dots$. Alors dans un état stable on a $\psi = \varphi_r$, φ_r étant une fonction propre de l'opérateur \hat{A} . Si l'état ψ est arbitraire, on peut prendre la décomposition $\psi = \sum_r C_r \varphi_r$. Alors (4.25) s'écrira :

$$(4.26) \quad \langle A \rangle = \sum_r \lambda_r |C_r|^2,$$

ce qui permet d'interpréter $|C_r|^2$ comme probabilité de trouver la valeur de A égale à λ_r (²⁰). Comme on sait, ce principe de décomposition spectrale est l'un des postulats fondamentaux de la théorie quantique des mesures. D'après ce principe, la valeur moyenne de $f(A)$ s'écrit :

$$(4.27) \quad \langle f(A) \rangle = \sum_r f(\lambda_r) |C_r|^2 = \int d^3x \psi^* f(\hat{A}) \psi,$$

ce qui s'accorde à la règle de J. Von Neumann : $\hat{f}(A) = f(\hat{A})$.

Tous les raisonnements précédents se généralisent facilement au cas de n particules. Dans ce cas il faut considérer les champs réguliers qui correspondent à n particules et satisfont aux équations de champ (2.2). Représentons ces champs sous la forme :

$$(4.28) \quad \phi(x) = \sum_{\sigma=1}^n \phi^{(\sigma)}(x),$$

avec $\phi^{(\sigma)}(x)$ désignant les solutions régulières des équations :

$$\left[\beta^\mu \partial_\mu - M(\phi) \right] \phi^{(\sigma)} = 0; \quad \sigma = \overline{1, n}.$$

On suppose que le champ $\phi^{(\sigma)}$ décrit la structure interne de la σ -ième particule et qu'il soit pratiquement localisé dans un volume $V_0^{(\sigma)}$. Considérons maintenant n domaines $\Delta V^{(\sigma)} \gg V_0^{(\sigma)}$ de centres \vec{x}_σ et marquons les cas de passage

de nos particules à travers ces domaines. Supposons que dans N expériences on ait indiqué ΔN cas où chaque particule se soit trouvée dans son domaine au temps t . Alors la densité de probabilité pour que notre système de particules se trouve

à l'instant t au point $q = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ de l'espace de configuration s'écrira :

$$(4.29) \quad \rho(t, q) = \lim_{N \rightarrow \infty} \rho_N(t, q) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \Delta N / N \prod_{\sigma=1}^n \Delta V^{(\sigma)}$$

En utilisant le développement (4.28) pour le champ $\phi_{(k)}$ et pour la grandeur conjuguée de champ $\pi_{(k)}$ qui décrivent notre système en k-ième expérience, posons :

$$\phi_{(k)}(x) = \sum_{\sigma=1}^n \phi_{(k)}^{(\sigma)}(x); \quad \pi_{(k)}(x) = \sum_{\sigma=1}^n \pi_{(k)}^{(\sigma)}(x)$$

et construisons la grandeur auxiliaire :

$$(4.30) \quad \psi_N(t, q) = (CN)^{-1/2} \sum_{k=1}^N \exp(i\xi_k) \otimes_{\sigma=1}^n \langle \varphi_{(k)}^{(\sigma)}(t, \vec{x}_k) \rangle,$$

où $C = \text{Cte}$, $\varphi_{(k)}^{(\sigma)} \equiv 2^{-1/2} \left[v_{\sigma}^{-1} \phi_{(k)}^{(\sigma)} + i v_{\sigma} \pi_{(k)}^{(\sigma)} \right]$ et ξ_k est défini par (4.4). Alors à la limite $N \rightarrow \infty$, compte tenu des conditions $\Delta V^{(\sigma)} \gg V_0^{(\sigma)}$, on est conduit à la formule (4.11) avec le changement $\vec{x} \rightarrow q$, la constante C dans (4.30) étant choisie comme suit :

$$C = \prod_{\sigma=1}^n \int d^3 x_{\sigma} \left| \langle \varphi_{(k)}^{(\sigma)}(t, \vec{x}_{\sigma}) \rangle \right|^2.$$

On voit donc que $\psi_N(t, q)$ appartient à l'espace aléatoire hermitien $\mathcal{H}_N^{(n)} = L_2(\mathbb{R}^{3n}) \otimes Z_N$. Tous les autres raisonnements sont les mêmes que dans le cas $n = 1$.

Enumérons les hypothèses qui font la base de nos raisonnements en section IV :

1) Le mouvement des particules est non relativiste, ce qui permet d'utiliser l'approximation quasistationnaire pour $\langle \varphi_{(k)} \rangle$.

2) Le volume propre V_0 de la particule est petit par rapport au domaine ΔV déterminé par la précision de mesure des coordonnées, ce qui permet d'introduire l'amplitude de probabilité.

3) En négligeant l'inégalité des covariances temporelles, on considère les champs aléatoires r_{∞} et $\bar{r}_{\infty} = K\psi_{\infty}$ comme équivalents, ce qui permet d'approximer l'équation d'évolution du vecteur ψ_{∞} par une équation linéaire.

V - CONCLUSION.

En résumant, ébauchons les problèmes dont la résolution est nécessaire, à notre avis, pour le développement du schéma proposé.

1) En suivant l'analogie étroite entre l'équation de Hopf en théorie statistique des champs et l'équation de Schrödinger en théorie quantique des champs, il est rationnel de chercher les solutions stationnaires de l'équation de Hopf.

2) Si l'on suppose que les fluctuations soient petites, alors on peut approximer la fonctionnelle caractéristique par une fonctionnelle gaussienne. Dans ce cas l'équation de Hopf se réduit au système d'équations pour le champ moyen $u(x)$ et pour la matrice de corrélation $\langle v(x_1)v(x_2) \rangle$.

3) Notons que le caractère universel de la constante h_a dans (3.11) sera assuré si une des grandeurs physiques A_i est fixée (ou quantifiée). Cette possibilité peut être réalisée dans les théories spéciales des champs non linéaires (par exemple, si la grandeur A_i est d'origine topologique (²¹)). S'il s'agit de la charge électrique $Q = A_i$, on peut la quantifier en choisissant la densité lagrangienne \mathcal{L}_{em} du champ électromagnétique sous la forme spéciale non analytique au point $A_{\mu} = 0$ (²²). En particulier, on peut choisir :

$$\mathcal{L}_{em} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \left\{ 1 + g \cos\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{e} A_{\lambda} \Lambda^{\lambda}\right) |F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}|^{-1/2} \right\},$$

avec e la charge de l'électron, $g = \text{Cte}$.

4) Il faut éclaircir la structure du processus aléatoire $z(x)$ déterminant l'application $U^{-1} : \mathcal{H}_{\infty} + \mathcal{H}$. En posant $z(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} z_N(x)$, avec $\psi_{\infty}(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} z_N(x)\psi(x)$ et $\psi(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle z_N^*(x)\psi_N(x) \rangle$, on trouve formellement que $z_N(x) = \psi_N(x)\psi(x)/\rho_N(x)$. Ça signifie que la structure de $z(x)$ est déterminée par celle de $\psi_{\infty}(x)$ et doit s'accorder à la condition $\Delta V \gg V_0$.

BIBLIOGRAPHIE

- (¹) L. de Broglie : Une interprétation causale et non linéaire de la mécanique ondulatoire : théorie de la double solution. Gauthier-Villars, Paris, 1956.
- (²) G. Mie : Ann. der Physik, 37, 1912, p. 511; 39, 1912, p. 1; 40, 1913, p. 1.
- (³) A. Einstein : "Reply to critics" dans "Albert Einstein : Philosopher-scientist", éditeur P.A. Schilpp (Library of Living Philosophers), Evanston, Ill., 1949.
- (⁴) D. Bohm et J.P. Vigier : Phys. Rev., 96, 1954, p. 208.
- (⁵) E. Hopf : Journ. Rat. Mech. Anal., 1, 1952, p. 87.
- (⁶) R.M. Lewis et R.H. Kraichnan : Comm. Pure Appl. Math., 15, 1962, p. 397.
- (⁷) S.A. Bogouslavsky : Oeuvres choisies, Moscou, 1961, p. 123, (en russe).
- (⁸) N.G. Tchetaïev : Travaux sur la mécanique analytique, Moscou, 1962, p. 245 (en russe).
- (⁹) J. Andrade e Silva et G. Lochak : C.R. Acad. Sc., 254, 1962, p. 4260.
- (¹⁰) G. Lochak : C.R. Acad. Sc., 254, 1962, p. 4436.
- (¹¹) J. Andrade e Silva, F. Fer, P. Leruste et G. Lochak : Cahiers de Physique, 15, 1961, p. 210; 16, 1962, p. 1.
- (¹²) L.S. Pontriaguine : Groupes continus, Moscou, 1973 (en russe).
- (¹³) E.J. Hannan : Multiple Time Series, New York - London, 1970.
- (¹⁴) W. Feller : An Introduction to Probability Theory and its Applications, New York - London, 1957.
- (¹⁵) N. Wiener : Nonlinear problems in Random Theory, lecture 9, New York, 1958.
- (¹⁶) G. Della Riccia et T. Hida : Ann. Inst. H. Poincaré, A4, 1966, p. 31.
- (¹⁷) A. Kolmogorov et S. Fomine : Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle, Moscou, 1974.
- (¹⁸) L. Landau et E. Lifshitz : Quantum Mechanics. Nonrelativistic Theory. London - Paris, 1959.
- (¹⁹) Yu. Rybakov : Found. Phys., 4, 1974, p. 149.
- (²⁰) J. Andrade e Silva : C.R. Acad. Sc., 270B, 1970, p. 565.
- (²¹) D. Finkelstein : Journ. Math. Phys., 7, 1966, p. 1218.
- (²²) Yu. Rybakov : Le Messager de l'Université de Moscou, sér. III, n° 1, 1966, p. 72 (en russe).
- (²³) A. Visconti : Théorie quantique des champs, v.I, Paris, 1961.
- (²⁴) P. Claverie et S. Diner : C.R. Acad. Sc., 277B, 1973, p. 579.