Annales de la Fondation Louis de Broglie - Vol. 3, n° 1, 1978

UNE EQUATION NON LINEAIRE DE KLEIN-GORDON AVEC UNE SOLUTION DU TYPE PARTICULE

par MM. Ajit Kumar et Ya.P. Terletskii
Peoples' Friendship University,
Department of theoretical physics,
Moscow (USSR)

(manuscrit reçu le 29 Mars 1977)

Résumé : Dans le présent article, nous proposons un nouveau modèle d'équation non linéaire de Klein-Gordon fournissant des solutions exactes du type particule. On montre que pour le modèle proposé, certaines quantités physiques comme la charge et l'énergie de la particule représentée par la solution régulière peuvent être aisément calculées.

Dans la seconde partie de l'article, nous étudions le problème inverse, c'est-à-dire le maniement de la non linéarité, pour une solution régulière exacte donnée, à l'aide d'un ordinateur.

1. La première tentative d'écrire une théorie systèmatique du champ non linéaire a été entreprise par Mie (1) en 1912. Dans ce travail, Mie essayait de formuler une électrodynamique non linéaire en vue d'obtenir une valeur finie pour l'énergie de l'électron. Le développement ultérieur d'une formulation invariante de jauge pour cette théorie est lié aux travaux de Max Born (2) et de Born et Infeld (3). Ces travaux fondamentaux attirèrent l'attention des scientifiques sur ce nouveau domaine (4-16-24).

De nos jours, l'intérêt pour une théorie du champ non linéaire s'est accru en rapport avec les travaux expérimentaux sur la structure interne et les propriétés des particules élémentaires. Tous les modèles en théorie des particules élémentaires basés sur la théorie du champ non linéaire portent sur des solutions du type particule. Dans cette approche, les solutions régulières sont supposées représenter des particules élémentaires et contenir certaines informations sur leur structure interne.

2. Dans une première tentative de cette sorte, l'équation de Klein-Gordon

$$\Box \Psi - \Psi = 0 \tag{2.1}$$

a été généralisée au cas non linéaire

$$\Box \Psi - \Psi = -f(\Psi\Psi^{\star}).\Psi \tag{2.2}$$

où $f(\Psi\Psi^{\star})$ est une fonction de $|\Psi|^2$, et des solutions régulières ont été obtenues ([17]). Quand on se donne la fonction non linéaire $f(\Psi\Psi^{\star})$ en (2.2), on trouve des solutions régulières de la forme :

$$\Psi(R,t) = \Phi(R)\,\exp\{-i\omega t\} \tag{2.3}$$

où la fonction $\Phi(R)$ satisfait aux conditions aux limites

$$\Phi(0) = \Phi_0,\ \Phi'(0) = 0,\ \Phi(\infty) = 0 \tag{2.4}$$

Ensuite, on écrit l'équation de la fonction Φ sous forme adimensionnelle :

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{2}{r}\,\frac{d\Phi}{dr} = P(\Phi).\Phi \tag{2.5}$$

où $P(\Phi) = 1-F(\Phi^2)$, $r = \sqrt{1-\omega^2}.R$, $F(\Phi^2) = f(\Phi^2)(1-\omega^2)^{-1}$.

Dans ([18]), on considère un modèle avec linérisation partielle de l'équation (2.2). La fonction $F(\Phi^2)$ est choisie sous la forme de la fonction de Heavyside $\Theta(\Phi^2-a)$ qui est égale à 1 si $\Phi^2 \geqslant a$ et 0 si $\Phi^2 < a$. Il s'ensuit que l'équation (2.2) se sépare en deux équations linéaires correspondant aux deux domaines, $\Phi^2 \geqslant a$ et $\Phi^2 < a$. Pour chaque domaine, on trouve une solution satisfaisant à la condition de raccordement.

Ici, nous proposons un nouveau modèle pour l'équation non linéaire de Klein-Gordon, donnant une solution exacte du type particule pour (2.2).

Soit :

$$F(\Phi^2) = \begin{cases} 0 & ,\ \Phi^2 < a \\ \lambda\ell n(\alpha\Phi^2) & ,\ \Phi^2 \geqslant a \end{cases} \tag{2.6}$$

où $\lambda > 0$ est une constante et $\alpha \neq a^{-1}$.

On écrit alors, dans le domaine $\Phi^2 < a$, l'équation (2.2) à l'aide de l'équation (2.3), ce qui donne :

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{2}{r}\,\frac{d\Phi}{dr} - \Phi(r) = 0 \tag{2.7}$$

qui a pour solution :

$$\Phi_1(r) = A_1\,\frac{\exp\{-r\}}{r} + A_2\,\frac{\exp\{r\}}{r}\ .$$

La condition à l'infini donne $A_2 = 0$, de sorte que :

$$\Phi_1(r) = A_1\,\frac{\exp\{-r\}}{r}. \tag{2.8}$$

Pour le domaine $\Phi^2 \geqslant a$, on obtient l'équation suivante pour la fonction $\Phi(r)$

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{2}{r}\,\frac{d\Phi}{dr} - [1 - \lambda\ \ell n(\alpha\Phi^2)].\Phi = 0 \tag{2.9}$$

et on a la solution exacte :

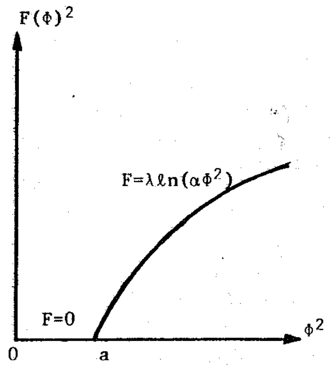
$$\Phi_2(r) = A_3\,\exp\{-\beta r^2\}$$

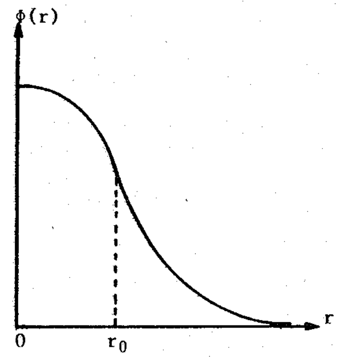
$$\text{si } \lambda = 2\beta,\ A_3 = \exp\left\{\frac{6\beta+1-2\beta\ell n\alpha}{4\beta}\right\} \text{ et } \alpha > 0. \tag{2.10}$$

Ces deux solutions obtenues dans des domaines différents formeront la solution de (2.2) si elles satisfont aux conditions de raccordement, c'est-à-dire l'égalité des fonctions et de leurs dérivées premières pour une certaine valeur de r. Dans notre modèle, les conditions de raccordement sont satisfaites pour :

$$r_0 = \frac{[3\lambda+1-\lambda\ell n(a\alpha^{-1})]^{1/2}}{\lambda}\ ;\ \lambda = \frac{\ell n(a\alpha^{-1})-1}{[\ell n(a\alpha^{-1})-2]^2} \tag{2.11}$$

Ainsi, l'équation (2.2) avec la fonction non linéaire $F(\Phi^2)$ de la forme (2.6) a-t-elle une solution exacte du type particule pour chaque valeur du paramètre λ.





Graphe de la fonction non linéaire — Graphe de la solution

On calcule maintenant les valeurs de la charge et de l'énergie de la "particule" représentée par notre solution régulière.

La charge Q est donnée par la formule :

$$Q = i\int j_0\, dV = i\int \left(\Psi^\star \frac{\partial\Psi}{\partial t} - \Psi\frac{\partial\Psi^\star}{\partial t}\right) dV \qquad (2.12)$$

j_0 étant la 0-ième composante du quadri-vecteur densité de courant. En coordonnées sphériques :

$$Q = 8\pi\omega\left\{\int_0^{r_0} r^2 e^{\frac{3\lambda+1-\lambda\ell n\alpha}{\lambda} - \lambda r^2} dr + \int_{r_0}^{\infty} e^{\frac{3\lambda+1-\lambda\ell n\alpha}{\lambda} - 2r} dr\right\} \qquad (2.13)$$

Pour $\lambda = 2$, $\alpha = e^{-3/2}$ le calcul numérique donne :

$$Q \cong 4925\ \omega \qquad (2.14)$$

L'énergie de la particule est donnée par $E = \int T^{00}\, dV$, où, dans notre modèle :

$$T^{00} = (\nabla\Phi)^2 + [\,(\omega^2+1) - (\lambda - \lambda\ell n\alpha) + \lambda\ell n\Phi^2]\,\Phi^2 \qquad (2.15)$$

Ainsi

$$E = 4\pi\left\{\int_0^{r_0} r^2(\omega^2+2\lambda+2)e^{\frac{3\lambda+1-\ell n\alpha}{\lambda} - \lambda r^2} dr + \int_{r_0}^{\infty}\left[(\omega^2+2)+\frac{2}{r}+\frac{1}{r^2}\right] e^{\frac{3\lambda+1-\lambda\ell n\alpha}{\lambda} - 2r} dr\right\}$$

pour $\lambda = 2$, $\alpha = e^{-3/2}$, on obtient

$$E \approx 0.44\ Q\omega + 13241 \qquad (2.16)$$

3. Souvent, quand $F(\Phi^2)$ est donné, il est difficile d'obtenir analytiquement la solution régulière de (2.2) cherchée. Les solutions régulières sont alors trouvées numériquement à l'aide d'un ordinateur ([17]). Les calculs numériques deviennent compliqués si on désire étudier le comportement d'un système de particules élémentaires. L'analyse de tels problèmes eut été plus facile si nous avions une équation de champ non linéaire avec des solutions exactes du type particule. C'est pourquoi nous considérerons maintenant le problème inverse, c'est-à-dire le maniement de la fonction $P(\Phi)$ pour des solutions régulières données, étude effectuée par les auteurs en collaboration avec Nisichenko ([20]).

Supposons que le problème :

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\Phi}{dr} = P(\Phi).\Phi\ ; \quad \Phi(0) = \Phi_0,\ \Phi'(0) = 0 \qquad (3.1)$$

possède une solution $f(r)$ pour un $P(\Phi)$ fixé mais non encore connu, $f(r)$ étant une fonction élémentaire. Alors (3.1) donne :

$$P(f) = \frac{f'' + \frac{2}{r}f'}{f} = R(r) \qquad (3.2)$$

Si la solution de l'équation $f = f(r)$ est, par rapport à r, une fonction élémentaire pour $r \in (0,\ell)$, on peut trouver la forme concrète de $P(\Phi)$ donnant la solution du problème (3.1) comme une fonction donnée $f = f(r)$. Si $r(f)$ est telle que $f(r(f)) = f$, $P(f)$ est donné par $P(f) = R(r(f))$.

Habituellement, l'équation $f = f(r)$ n'a pas de solution appartenant à la classe des fonctions élémentaires. Dans ce cas, la fonction s'exprime paramétriquement :

$$P(f(r)) = R(r) \tag{3.3}$$

où $f(r)$ et $R(r)$ sont des fonctions de r données.

De là, si $f(r)$ est une fonction de r univaluée et bornée et si $f'(0) = 0$, la fonction $P(f(r))$ peut être obtenue par (3.2), par exemple sous la forme d'une table (obtenue par ordinateur) et approchée par un polynome en f :

$$P(f) = \sum_{i=0}^{N} C_i\, f^i + \varepsilon_N(r), \quad r \in (0,\ell) \tag{3.4}$$

où $\varepsilon_N(r)$ est l'erreur d'approximation. Il est clair que pour des fonctions particulières $f(r)$ et pour des grandes valeurs de N cette erreur peut être minimisée pour $r \in (0,\ell)$ quelconque.

Mais la question de savoir si la solution du problème

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{2}{r}\,\frac{d\Phi}{dr} = \sum_{i=0}^{N} C_i\, \Phi^i, \qquad \Phi(0) = \Phi_0, \qquad \Phi'(0) = 0$$

coïncidera ou non avec $f(r)$ reste ouverte et nécessite une analyse plus poussée.

Soit

$$f(r) = A\,\frac{r+1}{r^2+1}\,e^{-r} \tag{3.5}$$

A partir de (3.2), nous obtenons

$$R(r) = \frac{r^5+r^4+4r^3-5r-9}{(r^2+1)^2(r+1)} \tag{3.6}$$

La fonction (3.5) pour $r \to \infty$ a une asymptote qui correspond à l'équation linéaire de Klein-Gordon. L'approximation de (3.6) montre que pour $A \approx 10^2$ le polynome (3.4) est limité et converge rapidement pour r arbitraire. Ainsi $A \approx 10^2$ est-il préférable.

Maintenant supposons que

$$f(r) = \frac{1}{(r^n+a)^m} \tag{3.7}$$

où $m > 0$, $n > 1$ et $a > 0$. Dans ce cas, nous trouvons

$$P(\Phi) = mn\Phi^{\frac{2}{m}}\left\{ n(m+1)\left(\Phi^{-\frac{1}{m}}-a\right)-(n-1)\Phi^{-\frac{1}{m}}\left(\Phi^{-\frac{1}{m}}-a\right)^{\frac{n-2}{n}} \right\} \tag{3.8}$$

Pour $n = 2$, on obtient l'équation

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{2}{r}\,\frac{d\Phi}{dr} = 2m(2m-1)\Phi^{\frac{m+1}{m}} - 4am(m+1)\Phi^{\frac{m+2}{m}} \tag{3.9}$$

ce qui conduit à l'équation bien connue d'Emden pour $m = \frac{1}{2}$ (22)

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{2}{r}\,\frac{d\Phi}{dr} = -3\,a\,\Phi^5 \tag{3.10}$$

Ainsi, nous avons obtenu une équation approchée non linéaire de Klein-Gordon et une équation généralisée d'Emden avec des solutions régulières (3.5) et (3.7) respectivement. Nous avons aussi écrit un programme numérique pour le calcul de la non-linéarité de (2.2) pour les solutions régulières données.

4. Pratiquement, on est confronté à des problèmes pour lesquels la non-linéarité est négligeable pour les faibles valeurs des amplitudes et augmente quand celles-ci augmentent. Le modèle que nous proposons présente le même comportement et conduit à une solution régulière exacte. A l'aide de ce modèle, il est aisé d'étudier certains problèmes comme la stabilité de solutions régulières d'équations de champ non linéaires, l'interaction des particules, etc.

BIBLIOGRAPHIE

(1) G. Mie, Ann. der physik, 37, 511 (1912), 40 (1913)

(2) M. Born, Proc. Roy. soc. (A) 143, 410 (1934)

(3) M. Born a L. Infeld, Proc. Roy. Soc., (A) 144, 425 (1934)

(4) J. Frenkel, Proc. Roy. Soc., (A) 146, 930 (1934)

(5) H. Weyl, Phys. Rev., 46, 505 (1934)

(6) L. Schif , Phys. Rev., 84, I (1951)

(7) W. Heisenberg, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Nr.8, 111-127 (1953)

(8) W. Heisenberg, Zs. Naturforsch., 9a, 292-303 (1954)

(9) W. Heisenberg, F. Kortel und A. Mitter, Zs. Naturforsch, 10a, 425-446 (1955)

(10)Finkelstein, R. Lelevier and M. Ruderman, Phys. Rev., 83, 326-332 (1951)

(11)Finkelstein, C. Fronsdal and P. Kaus, Phys. Rev., 103, 1571-1579 (1956)

(12)Gell-Mann M., Phys. Rev., 92, 833 (1953)

(13)Lee T.D., Yang C.N., Phys. Rev., 102, 290 (1956)

(14)Einstein A., Strauss F.G., Ann. Math. 47, 73 (1946)

(15)De Broglie L., Nuovo Cimento 1, 37 (1955)

(16)De Broglie L., Théorie générale des particules à spin (Méthode de fusion), 2 ed. Paris (1954)

(17)V.B. Glasko, F. Lerust, Ya.P.Terletskii, S.F. Shushurin, JETF (Journal of experim. and theoret. physics USSR), 35, 452 (1958)

(18) S.F. Shushurin, Nauchnie doklady Vishei Shkoly phisico-matematicheskie Nauki, N°5, 192 (1966)

(19) P.A.M. Dirac, Proc. Roy. Soc., A 180, 1(1942)

(20) Ajit Kumar, V.P. Nisichenko, Ya.P. Terletskii, Materialy 11 Nauchnoi konferentsii (Materials of the 11th scientific conference). P. Lumumba Peoples' Friendship University.

(21) Fer F. Thèse : Les solutions singulières des équations d'onde et la théorie de la double solution, Paris (1956)

(22) G. Rosen, Journ. of Math.-Phys., 6, N° 8, 1269 (1965)

(23) G. Lochak, Comptes rendus 250, p.1985 et p.2146 (1960)

(24) Bialynicki-Birula, J. Mycielski, Bulletin de l'Académie polonaise des Sciences, Série des Sciences Mathématiques, Astronomiques et Physiques, vol. XXIII, n°4 (1975).

Note ajoutée à la correction des épreuves

Dans la référence (^{24}), un modèle semblable au nôtre a été étudié, avec cette différence que la fonction non linéaire $f(|\Psi|^2)$ y est prise sous la forme du logarithme de $|\Psi|^2$. Notons que dans ce cas, on n'obtient pas l'équation de Klein-Gordon sous la forme (2.1) pour les faibles intensités du champ ; on obtient en réalité :

$$\Box\Psi - (1+\delta)\Psi = 0 \qquad (\delta > 0)$$

car la fonction $\log|\Psi|^2.\Psi$ tend vers zéro linéairement. Par conséquent (^{24}) ne satisfait pas à la condition évidente que, pour Ψ petit, on obtienne l'équation de Klein-Gordon, tandis que cette condition est automatiquement satisfaite dans notre cas.