EXTRAIT DU LIVRE DE M. LOUIS DE BROGLIE :

UNE INTERPRETATION CAUSALE ET NON LINEAIRE DE LA MECANIQUE ONDULATOIRE

(Gauthier-Villars, 1956)

LES TRAINS D'ONDES ET LA RÉDUCTION DU PAQUET DE PROBABILITÉ

1. Difficulté provenant de l'étalement spontané des trains d'ondes. — Une onde plane monochromatique est une abstraction : on a toujours expérimentalement affaire à des trains d'ondes limités dans l'espace dont la durée de passage en un point est limitée dans le temps. Mais on a souvent affaire à un train d'ondes qui, dans toute sa partie centrale sauf tout près des bords, est assimilable à une onde plane monochromatique comme c'est le cas pour les trains d'ondes utilisés en optique. Un tel train d'ondes est représentable par un « groupe d'ondes », c'est-à-dire par une superposition d'ondes planes monochromatiques de longueurs d'onde et de directions de propagation très voisines. Or, un groupe d'ondes ainsi constitué a une tendance spontanée à s'étaler dans l'espace.

Pour le voir, laissons de côté la représentation des dimensions transversales du groupe d'ondes par une superposition d'ondes planes de directions de propagation différentes, un peu inclinées les unes sur les autres, et, pour représenter la longueur finie du groupe d'ondes dans le sens x de la propagation, écrivons simplement

$$(1) \qquad \Psi = \int_{\mu_0-\Delta\mu}^{\mu_0+\Delta\mu} c(\mu)\, e^{2\pi i(\nu t-\mu x)}\, d\mu, \qquad \text{avec} \quad \mu = \frac{1}{\lambda}.$$

La fréquence ν est une certaine fonction de μ définie par l'équation de propagation supposée linéaire à laquelle Ψ obéit et cette relation entre ν et μ correspond à la relation dynamique entre énergie et quantité de mouvement. Posons $\mu = \mu_0 + \eta$, $\nu_0 = \nu(\mu_0)$ et écrivons le développement de Taylor de $\nu(\mu)$:

$$(2) \qquad \nu(\mu) = \nu_0 + \left(\frac{\partial\nu}{\partial\mu}\right)_0 \eta + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\nu}{\partial\mu^2}\right)_0 \eta^2 + \ldots = \nu_0 + v_0\eta + \ldots,$$

où l'indice o indique que les dérivées sont prises pour $\mu = \mu_0$ et où v_0 est la vitesse correspondant à μ_0. Nous nous sommes servi du fait que v_0 est donnée par la formule de Rayleigh pour la vitesse de groupe, soit $v_0 = \left(\frac{\partial\nu}{\partial\mu}\right)_0$. Nous pouvons donc écrire

$$(3) \qquad \Psi = e^{2\pi i(\nu_0 t - \mu_0 x)} \int_{-\Delta\mu}^{\Delta\mu} c(\eta)\, e^{2\pi i \eta (v_0 t - x)}\, e^{\left[2\pi i \left(\frac{\partial^2\nu}{\partial\mu^2}\right)_0 \eta^2 + \dots\right] t}\, d\eta,$$

où les points représentent des termes d'ordre supérieur à η^2. L'intervalle $\Delta\mu$ étant très petit par hypothèse, pendant un temps très long à partir de l'instant initial, la seconde exponentielle sous le signe somme, dont l'exposant est sensiblement nul, pourra être prise égale à 1 et l'on aura

$$(4) \qquad \Psi = e^{2\pi i(\nu_0 t - \mu_0 x)} F(v_0 t - x).$$

Le groupe d'ondes aura donc même facteur de phase que l'onde plane de fréquence ν_0 et son amplitude se déplacera en bloc avec la vitesse v_0 le long de l'axe des x : il n'y a pas étalement.

Mais, au bout d'un temps suffisamment long par rapport à $\frac{1}{\nu_0}$, quelle que soit la petitesse de l'intervalle $\Delta\mu$, il arrivera toujours un moment où l'exposant de la dernière exponentielle cessera d'être négligeable : alors l'intégrale de (3) sera de la forme $\int f(\eta, v_0 t - x_0, t)\, d\eta$ et l'on aura $\left(\text{sauf cependant dans le cas d'un corpuscule de masse propre nulle où } \frac{\partial\nu}{\partial\mu} \text{ est une constante}\right)$

$$(5) \qquad \Psi = e^{2\pi i(\nu_0 t - \mu_0 x)} F(v_0 t - x, t).$$

L'amplitude deviendra donc ainsi variable avec le temps autrement que par l'intermédiaire de la combinaison $v_0 t - x$. Le groupe d'ondes va donc se déformer en progressant et une analyse plus détaillée montrerait qu'il va toujours s'étaler. Comme les équations linéaires de propagation entraînent la constance de $\int a^2\, d\tau$ au cours du temps, l'étalement du train d'ondes a pour conséquence un affaiblissement des amplitudes locales : il y a affaiblissement du groupe d'ondes qui s'étale.

On peut expliquer intuitivement cet étalement du groupe d'ondes de la manière suivante. Les ondes monochromatiques dont la superposition forme le groupe d'ondes se propagent *indépendamment* les unes des autres parce que, par hypothèse, l'équation de propagation de l'onde Ψ

est linéaire. Chaque composante monochromatique a sa vitesse v correspondant à la valeur de μ qui la spécifie. Sauf dans le cas du corpuscule de masse propre nulle où ν est fonction linéaire de μ, les vitesses v sont les unes plus grandes, les autres plus petites que v_0, les différences étant très faibles. Il en résulte qu'à la longue, certaines composantes prendront de l'avance par rapport à la composante centrale de fréquence ν_0 tandis que d'autres prendront du retard. D'où l'étalement du groupe d'ondes qui, pour ainsi dire, se désorganise lentement en progressant. Cette désorganisation, accompagnée d'étalement dans l'espace, est intimement liée au caractère linéaire de l'équation de propagation.

Nous pouvons encore retrouver d'une autre manière, qui nous servira plus loin, cet étalement des groupes d'ondes. Pour cela, écrivons l'équation de Jacobi généralisée (J) correspondant à l'équation linéaire de propagation de la Mécanique ondulatoire relativiste

$$(6) \qquad (\mathrm{J}) \quad \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 - (\operatorname{grad}\varphi)^2 - m_0^2 c^2 = \frac{h^2}{4\pi^2}\,\frac{\Box a}{a}.$$

Pour que le groupe d'ondes sans déformation

$$(7) \qquad \Psi = F(v_0 t - x)\, e^{2\pi i(\nu_0 t - \mu_0 x)}, \qquad \text{avec} \quad \frac{\nu_0^2}{c^2} - \mu_0^2 = \frac{m_0^2 c^2}{h^2},$$

soit une solution *rigoureuse* de (6), il faudrait que $\frac{\Box F}{F} = 0$. Or ceci ne peut être réalisé, pour une forme de F représentant un groupe d'ondes de dimensions finies, que si v_0 est égale à c, c'est-à-dire dans le cas des particules de masse propre nulle. Donc, pour une particule de masse propre non nulle, le groupe d'ondes sans déformation n'est pas solution de l'équation linéaire des ondes. Notons que pour un groupe d'ondes ayant la forme de la figure 13, c'est aux limites, là où F varie brusquement, que l'équation $\Box F = 0$ ne sera pas satisfaite.

Voici maintenant la difficulté qui se présente quand on compare ces résultats avec les conceptions introduites au chapitre précédent. Si un corpuscule est associé à un groupe d'ondes planes monochromatiques, nous devrions, semble-t-il, admettre que son onde u est très sensiblement représentée, en dehors de la région singulière, par l'expression

$$(8) \qquad u = u_0 + v = u_0 + C \int \dots,$$

où C est une constante à valeur objectivement déterminée et où $\int \dots$

est l'intégrale de Fourier qui représente le groupe d'ondes. Malheureusement, au bout d'un temps suffisamment long, le groupe d'ondes se sera étalé, disséminé : l'onde régulière v tendra donc vers zéro en tout point et u se réduira à sa partie singulière u_0. En termes imagés, on peut dire que le corpuscule finira par « perdre son onde » et cette conclusion paraît physiquement peu acceptable. En somme, malgré l'introduction de l'hypothèse « corpuscule-région singulière de l'onde u » qui permet à la théorie de la double solution de conserver un sens objectif à la notion de corpuscule, nous retrouvons ici l'objection faite naguère à l'interprétation de la Mécanique ondulatoire proposée par M. Schrödinger qui assimilait les corpuscules à des groupes d'ondes.

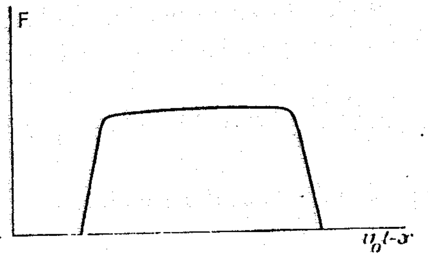

Fig. 13.

2. **La non-linéarité de l'équation des ondes pourrait permettre d'imaginer des groupes d'ondes sans étalement.** — Pour lever cette difficulté d'apparence grave, on peut se demander s'il ne serait pas possible d'imaginer des groupes d'ondes u qui ne s'étaleraient pas. Il est évident que ceci ne pourrait provenir que de la différence de l'équation des ondes u et de celle des ondes Ψ, c'est-à-dire de la non-linéarité de la première.

Remarquons d'abord que, comme nous l'avons souligné à la fin du chapitre précédent, poser $u \simeq C\Psi$ en dehors de la région singulière est nécessairement une approximation puisque, l'équation des ondes u étant non linéaire, les termes non linéaires, bien que très petits en dehors de la région singulière, existent néanmoins *partout* et pourraient redevenir importants aux limites des trains d'ondes. Pour connaître exactement la forme « extérieure » de u, il faudrait pouvoir évaluer exactement l'influence des termes non linéaires. Il paraît possible de concevoir que la relation $u \simeq C\Psi$ pour $r > r_1$ donne une représentation exacte de u dans ce domaine quand Ψ est une superposition de fonctions propres appartenant à un spectre discontinu (comme

c'était le cas dans les exemples du chapitre précédent) tandis qu'elle pourrait donner une représentation erronée, du moins dans certaines régions, quand Ψ est une intégrale de Fourier représentant un groupe d'ondes.

En d'autres termes, tandis que dans le cas d'un système quantifié à spectre discontinu, la partie extérieure de l'onde u pourrait être représentée très sensiblement par $u \simeq C\Psi$ (ce qui conserverait notre interprétation du succès du calcul des valeurs propres par la méthode usuelle), au contraire dans le cas d'un spectre continu et d'un groupe d'ondes Ψ, la partie extérieure de l'onde u ne serait pas bien représentée *partout* par l'intégrale de Fourier correspondante. Cependant, dans la partie centrale du groupe d'ondes, là où l'on ne se trouve pas au voisinage immédiat des bords, la partie extérieure de l'onde u devrait bien coïncider très sensiblement avec la fonction « onde plane monochromatique », car ceci est nécessaire pour conserver l'interprétation des phénomènes d'interférences (genre trous d'Young) que nous avons obtenue dans le dernier chapitre. Ce serait donc *aux limites* des trains d'ondes que l'onde u pourrait n'être pas bien représentée par l'intégrale de Fourier.

Continuons à approfondir ces idées. Tout d'abord, l'existence des termes non linéaires prépondérants dans la région singulière doit avoir pour effet de « souder » ensemble les deux fonctions que nous avons appelées « partie singulière u_0 » et « partie régulière v » de l'onde u. Cette soudure devrait avoir pour effet de rendre l'onde v solidaire de la région singulière et de l'empêcher de se disséminer loin d'elle. Nous retrouvons encore ici la remarque d'Einstein suivant laquelle des termes non linéaires ont pour effet de rendre solidaires une solution régulière et une solution singulière des équations du champ qui seraient indépendantes si ces équations étaient linéaires partout. Il semble donc bien que l'intervention des termes non linéaires dans la région singulière pourrait avoir pour effet que v ne soit pas exactement représenté par une intégrale de Fourier dans le cas du groupe d'ondes puisque cette représentation implique l'indépendance des composantes monochromatiques du groupe d'ondes et, par suite, l'étalement de celui-ci au cours du temps. Mais il faut regarder de près ce qui peut se passer aux limites des trains d'ondes pour empêcher cet étalement.

Nous avons déjà noté que les termes non linéaires de l'équation en u, négligeables dans le corps de la région extérieure du train d'ondes, peuvent redevenir importants sur ses limites. C'est là une circonstance qui peut intervenir pour nous permettre de concevoir des groupes d'ondes sans étalement (¹). Pour voir qu'il en est bien ainsi, écrivons l'équation de Jacobi généralisée pour l'onde u correspondant à l'équation non linéaire (en l'absence de champ) sous la forme

$$\text{(J)} \qquad \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 - (\text{grad}\,\varphi)^2 - m_0^2 c^2 = \frac{h^2}{4\pi^2}\frac{\Box f}{f} + \text{N}\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ldots\right),$$

où N est une expression non linéaire dépendant de u et de ses dérivées qui est sensiblement négligeable en dehors de la région singulière sauf peut-être au bord des trains d'ondes. Posons, en dehors de la région singulière,

$$(9) \qquad u(\mu_0) = \text{F}(v_0 t - x)\, e^{2\pi i(\nu_0 t - \mu_0 x)} = \text{F}(\theta)\, e^{2\pi i(\nu_0 t - \mu_0 x)},$$

avec

$$\frac{\nu_0^2}{c^2} - \mu_0^2 = \frac{m_0^2 c^2}{h^2} \qquad \text{et} \qquad \theta = v_0 t - x.$$

Cette forme de u représente un groupe d'ondes monochromatiques *sans déformation*. Elle sera une solution de l'équation J si

$$(10) \qquad \frac{h^2}{4\pi^2}\frac{\Box \text{F}}{\text{F}} = -\text{N}\left(\nu_0, \mu_0, \text{F}, \frac{\partial \text{F}}{\partial t}, \frac{\partial \text{F}}{\partial x}, \frac{\partial^2 \text{F}}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 \text{F}}{\partial x^2}, \ldots\right),$$

(¹) Il est intéressant de remarquer qu'une circonstance de ce genre est généralement méconnue dans la théorie de la propagation des petites perturbations gravifiques en Relativité généralisée (*voir* VON LAUE. *Die Relativitätstheorie*. t. 2. p. 191 et suiv.). Dans cette théorie, on admet que, dans une petite perturbation gravifique, les g_{ik} sont de la forme $g_{ik} = g_{ik}^{(0)} + \gamma_{ik}$ où les $g_{ik}^{(0)}$ sont les valeurs galiléennes constantes des g_{ik} et où les $\gamma_{ik} \ll g_{ik}^{(0)}$ sont considérées comme des infiniment petits du premier ordre. On écrit ensuite pour les g_{ik} les relations $\text{R}_{ik} = 0$ valables hors de la matière. Dans l'expression des R_{ik}, figurent des produits des grandeurs classiques en Relativité générale $\Gamma_{ik}^r = \left\{ {ik \atop r} \right\}$ qui, elles-mêmes, s'expriment à l'aide des g_{ik} et de leurs dérivées $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^r}$. On considère habituellement ces dérivées comme des infiniment petits du premier ordre et l'on néglige les produits des Γ_{ik}^r comme étant des infiniment petits du second ordre. Les équations non linéaires $\text{R}_{ik} = 0$ se réduisent alors très approximativement (avec un choix convenable des coordonnées) aux équations linéaires $\Box\gamma_{ik} = 0$ et l'on en conclut que les très petites perturbations gravifiques se propagent dans le vide avec la vitesse c.

Mais, comme M. Chazy l'a d'ailleurs souligné (*Théorie de la Relativité*, Gauthier-Villars, t. II, 1928, p. 148), il ne suffit pas dans cette démonstration de supposer les γ_{ik} très petits, il faut aussi supposer très petites les dérivées $\frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x^r}$. Or ces dérivées peuvent devenir très grandes dans des régions étroites de l'espace-temps correspondant aux bords des trains d'ondes si, dans ces régions, les γ_{ik} tombent brutalement à zéro. Dans de telles régions, l'équation linéaire $\Box\gamma_{ik} = 0$ n'est plus valable et doit être remplacée par une équation non linéaire. Donc, même pour les très petites perturbations gravifiques, il peut y avoir des phénomènes non linéaires sur le bord des trains d'ondes.

soit

$$(11) \qquad \frac{h^2}{4\pi^2 \text{F}}\left(\frac{v_0^2}{c^2} - 1\right)\frac{d^2\text{F}}{d\theta^2} = -\text{N}\left(\nu_0, \mu_0, \text{F}, \frac{d\text{F}}{d\theta}, \frac{d^2\text{F}}{d\theta^2}, \ldots\right).$$

Si N était partout négligeable, il faudrait avoir soit $v_0 = c$, ce qui n'est possible que pour des particules de masse propre nulle, soit $\frac{d^2\text{F}}{d\theta^2} = 0$, ce qui ne peut donner une forme acceptable (limitée aux deux extrémités) pour le groupe d'ondes. Mais, en tenant compte des termes non linéaires, on voit apparaître la possibilité de solutions de l'équation (J) qui représenteraient des trains d'ondes limités sans déformation. En particulier, un groupe d'ondes ayant la forme représentée sur la figure 13 pourrait exister en raison de l'intervention des termes N sur les bords des trains d'ondes où les dérivées de F seraient grandes.

Il faut remarquer en passant que F doit aussi satisfaire à l'équation de continuité (C) qui est ici du type

$$(\text{C}) \qquad \frac{\partial \text{F}^2}{\partial t} + v_0\frac{\partial \text{F}^2}{\partial x} + \text{N}'\left(\nu_0, \mu_0, \frac{d\text{F}}{d\theta}, \frac{d^2\text{F}}{d\theta^2}, \ldots\right) = 0,$$

où N′ représente des termes non linéaires inconnus provenant de l'équation de propagation de u. La fonction F étant seulement fonction de $\theta = v_0 t - x$, la somme des deux premiers termes de (C) sera nulle et il restera

$$(12) \qquad \text{N}'\left(\nu_0, \mu_0, \text{F}, \frac{d\text{F}}{d\theta}, \frac{d^2\text{F}}{d\theta^2}, \ldots\right) = 0,$$

ce qui impose à F une condition qui devra être compatible avec (11), c'est-à-dire qu'il devra exister une fonction $\text{F}(\theta)$ satisfaisant à la fois à (10) et à (11).

Il est aisé de se représenter d'une façon intuitive la possibilité de ces solutions représentant des groupes d'ondes sans déformation. Écrivons l'équation des ondes u sous sa forme non linéaire et en l'absence de champ, mais en nous bornant à l'approximation non relativiste.

$$(13) \qquad \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{h^2}{8\pi^2 m}\Delta u + \text{N}(u, \ldots).$$

Là où les termes non linéaires N sont importants, tout se passe comme s'il existait, malgré l'absence de tout champ, une sorte de « barrière de potentiel » représentée par les termes N, barrière qui s'oppose à l'expansion du train d'ondes. Mais cette barrière de potentiel n'est pas imposée par une action extérieure; elle est créée par la variation brusque de l'onde u elle-même sur les bords du train d'ondes. En imaginant des formes simples par les termes N (dont la forme exacte est inconnue), on peut se rendre compte que de telles solutions sans étalement doivent bien exister [1].

Néanmoins, on peut se demander si l'introduction de groupes d'ondes sans étalement du type envisagé ci-dessus est compatible avec les relations d'incertitude d'Heisenberg qui sont intimement reliées à la représentation des trains d'ondes par une intégrale de Fourier. Il ne semble pas qu'il y ait de ce côté une difficulté aussi grande qu'on pourrait le penser tout d'abord. En effet, le groupe d'ondes sans étalement est représenté par l'expression (9) avec

$$v_0 = \left(\frac{\partial \nu}{\partial \mu}\right)_0 = \left(\frac{\partial W}{\partial p}\right)_0 \qquad \text{et} \qquad W = c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}$$

$\left(\simeq \frac{1}{2m} p^2 \text{ à l'approximation newtonienne}\right)$. Or, à un instant donné, on peut toujours développer l'amplitude F en intégrale de Fourier de la forme

$$\text{(14)} \qquad F = \int c(\eta)\, e^{-2\pi i \eta x}\, d\eta,$$

de sorte que l'on peut écrire en posant $\mu = \mu_0 + \eta$,

$$\text{(15)} \qquad u(\mu_0) = \int c(\eta)\, e^{2\pi i(\nu t - \mu x)}\, d\mu, \qquad \text{avec} \quad \nu = \nu_0 + v_0(\mu - \mu_0).$$

A un instant donné, on peut donc en conclure, en appliquant le raisonnement habituel, que, si le train d'ondes u a la longueur Δx, l'intervalle Δp des valeurs de $p = h\mu$ intervenant dans l'intégrale satisfera à l'inégalité

$$\text{(16)} \qquad \Delta x\, \Delta p \geqq h.$$

On retrouve donc ainsi les relations d'Heisenberg relatives aux variables d'espace.

Retrouvera-t-on aussi la quatrième relation d'incertitude d'Heisenberg relative à la variable de temps ? Ce qui pourrait au premier abord en faire douter, c'est que le temps intervient différemment dans l'expression (15) de $u(\mu_0)$ et dans l'expression usuelle du groupe d'ondes linéaires dont la forme mathématique est la même, mais où

$$\text{(17)} \qquad \nu = \nu_0 + v_0(\mu - \mu_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \nu}{\partial \mu^2}\right)_0 (\mu - \mu_0)^2 + \ldots.$$

[1] La théorie de ces groupes d'ondes sans déformation est à comparer avec celle des « ondes solitaires » en Hydrodynamique qui présente avec elle une certaine analogie.

C'est en somme en éliminant, grâce à la non-linéarité de l'équation en u, tous les termes du développement (17) à partir du troisième, c'est-à-dire en nous bornant à poser $\nu = \nu_0 + v_0(\mu - \mu_0)$ que nous avons évité l'étalement du train d'ondes. Or, en tenant compte de la relation entre W et p, on voit que la formule (17) s'écrit

$$\text{(18)} \qquad \begin{aligned} \Delta W = W - W_0 &= v_0 \Delta p + \frac{1}{2}\frac{c^2}{W_0}\left(1 - \frac{p_0^2 c^2}{W_0^2}\right)(\Delta p)^2 + \ldots \\ &= v_0 \Delta p \left[1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)\frac{\Delta p}{p_0} + \ldots\right]. \end{aligned}$$

Comme dans un groupe d'onde Δp est toujours beaucoup plus petit que p_0, on voit que la parenthèse du second membre est sensiblement égale à 1. Quant aux termes non écrits, ils sont négligeables devant $v_0 \Delta p$ (et même exactement nuls à l'approximation newtonienne). Donc, malgré les modifications que nous avons introduites dans l'expression de ν en fonction de $\mu - \mu_0$ en passant du groupe d'ondes avec étalement au groupe d'ondes sans étalement, nous avons toujours le droit de poser

$$\text{(19)} \qquad \Delta W \simeq v_0 \Delta p$$

et, comme la durée Δt du passage d'un groupe d'ondes en un point de l'espace est évidemment donnée par

$$\text{(20)} \qquad \Delta t = \frac{\Delta x}{v_0},$$

on a encore, en tenant compte de (16),

$$\text{(21)} \qquad \Delta W\, \Delta t \simeq \Delta p\, \Delta x \geqq h.$$

C'est bien là la quatrième relation d'incertitude d'Heisenberg avec son interprétation usuelle.

L'analyse que nous venons de faire est d'ailleurs très instructive en ce qui concerne le passage du groupe d'ondes usuel au groupe d'ondes sans déformation. On pourrait objecter à ce passage qu'en supprimant dans la formule (18) tous les termes du second membre à partir du second, nous modifions la relation entre l'énergie et la quantité de mouvement d'une manière qui lui enlève son caractère de covariance relativiste. A cette objection, il nous semble que l'on peut faire la réponse suivante : la covariance relativiste de la relation entre énergie et quantité de mouvement est définie dans le cadre de la Relativité *restreinte*; or, en introduisant des termes non linéaires qui sont du type Relativité généralisée, nous sommes en réalité sortis du cadre de la Relativité restreinte.

Passons maintenant du cas des groupes d'ondes au cas des trains d'onde où $\Delta \mu$ n'est pas très petit devant μ_0. Dans la théorie usuelle de la représentation, par des intégrales de Fourier, des trains d'ondes de la Mécanique ondulatoire, on est amené à introduire la notion de différentielles propres et à remplacer l'intégrale de Fourier par une somme de différentielles propres [1]. Comme l'a remarqué notamment Sommerfeld, le sens physique de la notion de différentielle propre est de représenter un groupe d'ondes de dimensions finies en évitant ainsi d'introduire l'onde plane monochromatique qui est une abstraction et qui d'ailleurs n'est pas normable : en remplaçant l'intégrale de Fourier par une somme de différentielles propres, on exprime donc que les trains d'ondes sont formés par la superposition non pas d'ondes planes monochromatiques, mais de groupes d'ondes limitées. Au point de vue nouveau auquel nous nous plaçons ici en introduisant la non-linéarité et les groupes d'ondes sans étalement, il paraît naturel de définir les trains d'ondes par une superposition de groupes d'ondes sans étalement du type (9), c'est-à-dire de représenter un train d'ondes par le développement

$$u = \sum_{\mu_0} c(\mu_0)\, u(\mu_0), \tag{22}$$

la somme $\sum_{\mu_0}$ étant étendue à une suite de valeurs, généralement extrêmement voisines, de μ_0. Si les bords des groupes d'ondes sont très abrupts, on peut considérer les fonctions $u(\mu_0)$ comme sensiblement orthogonales entre elles. Il semble donc, sous réserve d'une étude plus rigoureuse, que l'on puisse appliquer au développement (22) les raisonnements habituellement faits sur les sommes de différentielles propres et retrouver encore ici les relations d'incertitude d'Heisenberg.

3. Affaiblissement de la liaison jusqu'ici admise entre onde u et onde Ψ. — Nous avons énoncé précédemment le théorème d'existence qui, au début de mes recherches sur la double solution, me paraissait nécessaire pour la justifier. Je le formulais alors ainsi : *A toute onde Ψ considérée par la Mécanique ondulatoire usuelle doit correspondre une onde u de même phase.* Nous sommes maintenant en état de critiquer cet énoncé et de lui donner une forme plus nuancée.

Remarquons d'abord qu'il n'est pas logique de partir de l'onde Ψ

---

[1] *Voir* par exemple L. de Broglie, *Théorie générale des particules à spin*, 2ᵉ éd., Gauthier-Villars, 1953, chap. I, § 4.