

LA DESCRIPTION D'UN SYSTÈME PHYSIQUE ET  
LE PRÉSUPPOSÉ DE LA THÉORIE CLASSIQUE

par M. C. PIRON

Département de Physique Théorique

Université de Genève

CH-1211 GENEVE 4 - Suisse

(manuscrit reçu le 17 Janvier 1978)

*Abstract : We discuss the notion of a property of a physical system on the basis of realism. In this way, we explicit the tacit assumptions underlying the classical formalism, and make the quantum theory appear as a generalization.*

*Résumé : Considérant le point de vue réaliste, on discute la notion de propriété d'un système physique. On met ainsi en évidence le présupposé qui conduit au formalisme classique. Le formalisme quantique apparaît alors comme une généralisation.*

Un système physique est une partie de la réalité conçue comme extérieure au physicien, qui a été isolée dans l'espace-temps du reste de l'univers. Le but de la physique est double : d'une part, décrire le système tel qu'il est dans sa réalité, réalité qui est conçue comme étant ce qu'elle est indépendamment de ce qu'en pense ou de ce qu'en connaît l'observateur; d'autre part, prévoir les possibilités de mouvements soit propres, soit dus aux actions exercées de l'extérieur (1). On cherche à atteindre ce but en élaborant une théorie. Celle-ci doit être suffisamment précise pour permettre de décrire tout ce qu'on désire, mais aussi suffisamment simple pour donner une vision globale des possibilités du système et pour permettre ainsi des calculs explicites. C'est pourquoi, toute théorie est en fait un modèle, c'est-à-dire une idéalisation qui est précise et conforme à la réalité sur certains points, mais quelquefois grossière sur d'autres. On est ainsi conduit à définir toute une hiérarchie de modèles de plus en plus précis. Tout modèle est basé sur une description du système physique considéré. Cette description se fait en termes de propriétés. Parmi les propriétés définies pour un système donné, il y a celles que le système possède actuellement, c'est-à-dire en actes, et celles qu'il pourrait acquérir, soit de lui-même, soit sous des contraintes extérieures, et qui, pour cette raison, sont dites potentielles. L'ensemble de toutes les propriétés actuelles du système physique est ce qu'on appelle son état.

Au cours de l'évolution, l'état change, certaines propriétés potentielles se réalisent en acte, alors que d'autres disparaissent pour n'être plus que potentielles (2). Après avoir précisé, puis discuté la notion de propriété, nous élaborons une structure mathématique permettant de décrire en toute généralité l'ensemble des propriétés d'un système physique. Ce faisant, nous mettrons en évidence le présupposé du physicien classique qui, restreignant le cas général, élimine arbitrairement les particularités des systèmes physiques quantiques.

Lorsque le physicien affirme que le système considéré possède actuellement une certaine propriété, il peut, pour appuyer son affirmation, proposer un test sous la forme d'une expérience au résultat bien précisé à l'avance. Mis en demeure, il doit l'exécuter et s'il obtient le résultat escompté, ses dires sont confirmés, mais dans le cas contraire, il doit reconnaître son erreur et reviser sa théorie (3). En règle générale, une telle expérience perturbe profondément l'état du système et même si ce dernier avait avant la propriété testée, il ne la possèdera plus après. En d'autres termes, affirmer qu'un système physique présente actuellement telle ou telle propriété signifie qu'une certaine expérience, que l'on pourrait éventuellement effectuer, donnerait avec certitude tel ou tel résultat si on l'effectuait pour de bon.

Définition : On appelle question toute expérience conduisant à une alternative dont les termes sont "oui" ou "non". Plus schématiquement, pour définir une question, il faut se donner :

- 1) Le ou les appareils.
- 2) Leurs modes d'emploi.
- 3) Une règle univoque permettant d'interpréter le résultat quel qu'il soit : le "oui" correspondant au résultat cherché, le "non" à tous les autres.

On peut définir beaucoup de questions applicables à un système physique donné. En fait, étant donné un ensemble de questions, on peut en définir de nouvelles. Si  $\alpha$  est une question, on peut définir  $\alpha^{\sim}$  la question opposée obtenue en échangeant le rôle du "oui" et du "non". Si  $\alpha_i, i \in J$  est une famille de questions, on peut définir  $\prod_J \alpha_i$ , la question produit obtenue de la manière suivante :

- 1) On se donne l'ensemble des appareils.
- 2) On se donne leurs modes d'emploi. Pour exécuter l'expérience correspondant à  $\prod_J \alpha_i$ , on doit, par définition, procéder ainsi : on choisit librement (ou au hasard) l'une des questions  $\alpha_i$  et on exécute l'expérience correspondante.
- 3) On attribue à  $\prod_J \alpha_i$  la réponse "oui" ou "non" ainsi obtenue.

Soit un ensemble de questions, on peut fermer cet ensemble vis-à-vis des opérations opposé et produit en y ajoutant toutes les questions opposées et ensuite toutes les questions produits possibles. Il faut remarquer que  $(\prod_J \alpha_i)^{\sim}$ , l'opposé de la question produit, n'est rien d'autre que  $\prod_J (\alpha_i)^{\sim}$  la question produit des opposés. Soit  $Q$  l'ensemble fermé de toutes les questions que l'on peut définir pour un système physique donné.

Définition : Si le système physique est tel que si on effectuait la question  $\alpha$  ( $\alpha \in Q$ ), la réponse "oui" serait certaine, on dit que la question  $\alpha$  est vraie actuellement pour ce système et ceci même si effectivement on n'a pas du tout l'intention d'exécuter actuellement l'expérience correspondante.

Définition : On dit qu'une question  $\alpha$  est plus forte qu'une question  $\beta$  et on note  $\alpha < \beta$  si la réponse "oui" pour  $\beta$  est certaine chaque fois que la réponse "oui" pour  $\alpha$  est certaine, c'est-à-dire si  $\beta$  est vrai chaque fois que  $\alpha$  est vrai.

Il s'agit là de l'expression d'une loi physique relative au système considéré. Une telle relation est transitive :

$$\alpha < \beta \text{ et } \beta < \gamma \rightarrow \alpha < \gamma .$$

Elle permet de définir une relation d'équivalence sur  $Q$  notée  $\sim$  :

$$\alpha \sim \beta \text{ si, et seulement si, } \alpha < \beta \text{ et } \beta < \alpha .$$

Définition : On appelle proposition une classe d'équivalence de questions. On note  $a$ , la classe d'équivalence définie par la question  $\alpha$ .

Si  $\alpha$  est vrai, alors par définition, il en est de même pour toutes les questions équivalentes et on dit que la proposition  $a$  est vraie (4).

A chaque proposition qui est définie pour le système physique considéré est associée une propriété (physique) de ce même système. Cette propriété est actuelle si la proposition correspondante est vraie, sinon, elle est seulement potentielle.

Soit  $\mathcal{L}$  l'ensemble des propositions définies pour un système physique donné.  $\mathcal{L}$  est muni d'une relation d'ordre partiel :

$a < b$  signifiant  $\alpha < \beta \quad \forall \alpha \in a \text{ et } \forall \beta \in b$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des questions appartenant respectivement aux propositions  $a$  et  $b \in \mathcal{L}$ . En effet, une telle relation est bien transitive et de plus, en vertu de la définition même d'une proposition comme une classe d'équivalence de questions, on a bien :

$$a < b \text{ et } b < a \leftrightarrow a = b$$

Théorème : L'ensemble de propositions  $\mathcal{L}$  muni de cette relation d'ordre est un treillis complet (5).

Démonstration : Il faut montrer que tout sous-ensemble de  $\mathcal{L}$  admet une borne inférieure (c'est-à-dire un plus grand minorant) et une borne supérieure (c'est-à-dire un plus petit majorant). Soit  $a_i, i \in J$ , des propositions de  $\mathcal{L}$ . Choisissons dans chaque  $a_i$  une question  $\alpha_i$  et considérons la question produite  $\prod_{J} \alpha_i$ . Cette question appartient aussi à  $\mathcal{Q}$  car  $\mathcal{Q}$  est, par hypothèse, fermé pour l'opération produit. La proposition correspondante, notée  $\Lambda_{J} a_i$ , est bien le plus grand minorant des  $a_i$ , en effet

1) C'est un minorant :

$$\Lambda_{J} a_i < a_i \quad \forall i \in J$$

car, en vertu de la définition du produit :

$$\prod_{J} \alpha_i < \alpha_i \quad \forall i \in J$$

2) C'est le plus grand des minorants :

$$b < a_i \quad \forall i \in J \rightarrow b < \Lambda_{J} a_i$$

car, toujours en vertu de la définition du produit :

$$\beta < \alpha_i \quad \forall i \in J \rightarrow \beta < \prod_{J} \alpha_i$$

Ayant montré l'existence d'un plus grand minorant, il est alors facile de montrer l'existence d'un plus petit majorant. En effet, on peut définir un tel élément, noté  $\bigvee_J a_i$ , comme le plus grand des minorants de  $M$ , l'ensemble des  $x$  majorant les  $a_i$  :

$$\bigvee_J a_i = \bigwedge_M x$$

Cette construction a bien un sens car il existe toujours au moins un majorant des  $a_i$ , c'est  $I$  la proposition triviale qui par définition est toujours vraie quel que soit l'état du système. (On peut la définir par la question suivante : Faire n'importe quoi sur le système et énoncer la réponse "oui" à chaque coup). Q.C.F.D.

Il est important de remarquer que, comme nous venons de le voir dans la démonstration, on a

$$"a_i \text{ vrai} \quad \forall i \in J \leftrightarrow "\bigwedge_J a_i \text{ vrai} \text{ " .}$$

En d'autres termes, la borne inférieure joue le même rôle que le "et" en logique, la propriété correspondant à  $a \wedge b$  n'étant rien d'autre que : la propriété correspondant à  $a$  et la propriété correspondant à  $b$ . Par contre, la borne supérieure ne joue pas le même rôle que le "ou" en logique, on peut seulement à priori affirmer que :

$$"a \text{ vrai} \text{ " ou } "b \text{ vrai} \text{ " } \rightarrow "a \vee b \text{ vrai} \text{ "}$$

Si cette implication était aussi valable dans l'autre sens, le treillis des propositions  $\mathcal{L}$  serait distributif comme l'est d'ailleurs celui des propositions logiques. On aurait :

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \quad \forall a, b, c \in \mathcal{L}$$

En résumé, l'ensemble des propriétés d'un système physique, en comprenant aussi bien les actuelles que <sup>les</sup> potentielles, forme, en vertu même des définitions, un treillis complet. Nous voulons maintenant préciser plus à fond la structure d'un tel treillis. Nous procéderons d'une manière axiomatique, car c'est là la seule façon rigoureuse d'utiliser les techniques mathématiques. Bien qu'il ne soit pas possible en toute logique de justifier des axiomes quels qu'ils soient, nous donnerons pour chacun d'eux une interprétation physique qui peut jusqu'à un certain point servir de justification.

Nous avons défini l'état d'un système comme l'ensemble de ses propriétés actuelles. Ainsi l'état est donné par le sous-ensemble  $\mathcal{E}$  des propositions vraies pour le système tel qu'il est actuellement. Un tel état est caractérisé entièrement par une seule proposition, la borne inférieure des propositions de  $\mathcal{E}$  :

$$p = \bigwedge_{\mathcal{E}} x$$

En effet, en vertu de l'interprétation logique de la borne inférieure, la proposition  $p$  elle-même est vraie, c'est-à-dire

$p \in \mathcal{E}$ , d'autre part si  $p < y$ ,  $y \in \mathcal{L}$ , alors  $y$  est également vrai et donc  $y \in \mathcal{E}$ . Ainsi  $\mathcal{E}$  est bien caractérisé par  $p$  car :

$$\mathcal{E} = \{x \mid p < x, x \in \mathcal{L}\}$$

N'importe quelle proposition  $p \in \mathcal{L}$  ne définit pas nécessairement un état, on a l'axiome suivant :

Axiome de maximalité : Si  $p$  définit un état, alors  $p$  est un atome de  $\mathcal{L}$ , c'est-à-dire est tel que :

$$a < p \text{ et } a \in \mathcal{L} \rightarrow a = 0 \text{ ou } a = p$$

où  $0$  est la proposition absurde, celle qui est définie comme n'étant jamais vraie. Si  $p$  représentant un état n'était pas un atome, il existerait une proposition  $a$  différente de  $0$  et  $p$  telle que  $a < p$ . Il existerait alors un autre état pour lequel  $a$  serait vrai, ce qui serait possible puisque  $a \neq 0$ . Cet autre état, en tant qu'ensemble de propriétés actuelles, serait plus grand que le sous-ensemble  $\mathcal{E}$  défini par  $p$  et ainsi le système pourrait passer dans ce nouvel état en acquérant de nouvelles propriétés, sans que disparaisse aucune de ses propriétés actuelles, c'est-à-dire en fait sans compensation. Ceci paraît inadmissible. D'où l'énoncé de cet axiome qui exprime le caractère maximal de chaque sous-ensemble  $\mathcal{E}$  représentant un état. Ainsi, il y a une correspondance biunivoque entre les atomes de  $\mathcal{L}$  et les états possibles du système, chaque

atome de  $\mathcal{L}$  correspondant à un état, car chaque proposition différente de  $0$  est par définition vraie dans certains cas. De plus, cet axiome entraîne une propriété importante pour la structure du treillis des propositions.

Théorème : Le treillis des propositions d'un système physique satisfaisant l'axiome de maximalité est toujours atomique (6).

Démonstration : On dit qu'un treillis  $\mathcal{L}$  possédant un élément minimal est atomique si pour tout élément  $x \in \mathcal{L}$  différent de  $0$ , il existe au moins un atome  $p \in \mathcal{L}$  tel que  $p < x$ . Si  $x$  est une proposition d'un système physique satisfaisant l'axiome de maximalité, alors si  $x$  est différent de la proposition absurde,  $x$  est vrai pour certains états et il existe au moins une proposition atomique  $p < x$ . C.Q.F.D.

Définition : On dit que deux propositions  $a$  et  $b$  sont des compléments compatibles ou encore que  $b$  est un complément compatible pour  $a$  si :

1)  $a$  et  $b$  sont des compléments :

$$a \wedge b = 0 \text{ et } a \vee b = I$$

2) et s'il existe une question  $a$  telle que :

$$a \in a \text{ et } a^c \in b$$

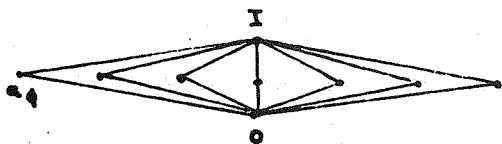
Axiome C : Pour chaque proposition d'un système physique, on peut trouver au moins un complément compatible.

Cet axiome est basé sur une foule de cas particuliers; nous nous contenterons ici de discuter un seul exemple :

Exemple : Le système physique considéré est un photon polarisé linéairement se déplaçant sur une droite. Une question  $\alpha_\phi$  est définie par

- 1) L'appareil : un polariseur d'angle  $\phi$  et un compteur placé derrière.
- 2) Le mode d'emploi : On place le polariseur et son compteur sur le passage du photon.
- 3) Si on enregistre le passage du photon à travers le polariseur, la réponse est "oui", sinon la réponse est "non".

L'expérience montre que si un photon a déjà traversé un polariseur d'angle  $\phi$ , il possède alors la propriété correspondant à " $\alpha_\phi$  est vrai". De plus, on ne peut jamais affirmer avec certitude qu'un même photon traverserait aussi bien un polariseur d'angle  $\phi$  qu'un autre d'angle  $\phi'$  si  $|\phi' - \phi| \neq 0$  ou  $\pi$ . Plus précisément on a le treillis suivant :



Sur cette figure, les propositions sont représentées par des points (en fait, nous n'avons représenté ici qu'un nombre fini de propositions au lieu d'une infinité), une proposition est plus forte qu'une autre si on peut joindre les points correspondants en allant du bas vers le haut de la figure en suivant les lignes.

Si  $a_\phi$  désigne la proposition contenant la question  $\alpha_\phi$  alors  $a_\phi \wedge a_{\phi'} = 0$  et  $a_\phi \vee a_{\phi'} = I$  sauf si  $|\phi' - \phi| = 0$  ou  $\pi$  auquel cas  $a_\phi = a_{\phi'}$ . Mais  $a_\phi$  et  $a_{\phi'}$  ne sont des compléments compatibles que si  $\phi' = \phi \pm \frac{\pi}{2}$ , car, comme le montre l'expérience, pour de tels angles on a :

$$(\alpha_\phi)^\sim = \alpha_{\phi'}$$

Nous sommes maintenant en mesure d'expliquer le présupposé du physicien classique, présupposé que nous formulerons comme une hypothèse :

Hypothèse classique : Si les propositions  $a$  et  $b$  sont des compléments compatibles alors quel que soit l'état du système, on a soit " $a$  est vrai" soit " $b$  est vrai".

Pour justifier à priori une telle hypothèse, on pourrait penser argumenter ainsi, et c'est d'ailleurs ce que fait le physicien classique :

Si on fait l'expérience correspondant à la question  $a$  qui est telle que  $a \in a$  et  $\bar{a} \in b$  alors l'une des deux réponses "oui" ou "non" est certaine à priori car, selon le principe de causalité, l'évolution globale du système et des appareils est complètement déterminée. On en déduit alors que nécessairement "a est vrai" ou "b est vrai". Un tel raisonnement est faux, on ne peut pas ainsi en déduire que l'une des deux réponses est certaine car l'expérience est purement hypothétique et le principe de causalité ne s'applique que si l'expérience est déjà en route.

En fait, l'hypothèse classique n'est pas toujours vérifiée comme en témoigne l'exemple précédent du photon linéairement polarisé.

Théorème : Si  $\mathcal{L}$  le treillis des propositions d'un système physique satisfait l'axiome de maximalité, l'axiome C et l'hypothèse classique, alors  $\mathcal{L}$  est identique au treillis des parties de  $\Omega$ , l'ensemble des états possibles du système considéré. Réciproquement, si  $\mathcal{L}$  est identique au treillis des parties d'un ensemble  $\Omega$  et si l'axiome de maximalité et l'axiome C sont satisfaits, alors  $\mathcal{L}$  vérifie également l'hypothèse classique.

Démonstration : Supposons l'axiome de maximalité satisfait, alors à chaque proposition  $b \in \mathcal{L}$  on peut associer le sous-ensemble  $\mu(b)$  formé des atomes  $p < b$ .  $\mu(b)$  est contenu

dans  $\Omega$  l'ensemble des états possibles et définit ainsi une application  $\mu$  de  $\mathcal{L}$  dans  $P(\Omega)$ , les parties de  $\Omega$ . Cette application est injective et respecte la borne inférieure :

$$\mu(a) \neq \mu(b) \text{ si, et seulement si, } a \neq b$$

$$\mu(\bigwedge_J a_i) = \bigcap_J \mu(a_i)$$

Si de plus l'axiome C est satisfait, à chaque proposition  $a$  est associé au moins un complément compatible noté  $a'$  et  $\mu(a')$  est par définition contenu dans le sous-ensemble complémentaire à  $\mu(a)$ .

Si enfin, de plus, l'hypothèse classique est satisfaite, alors  $\mu(a')$  est non seulement contenu mais identique au sous-ensemble complémentaire à  $\mu(a)$ . De ce fait, le complément compatible est unique et, finalement  $\mu$  est surjective car chaque sous-ensemble  $X \subset \Omega$  est l'image d'une proposition : la borne inférieure des compléments compatibles  $p'$  associés aux atomes  $p$  qui appartiennent à  $CX$  le sous-ensemble complémentaire de  $X$ . On peut en effet écrire successivement :

$$\mu(\bigwedge p') = \bigcap (\mu(p')) = \bigcap (Cp)$$

$$= C(\cup p) = C(CX) = X$$

Réciproquement : Soit  $P(\Omega)$  le treillis des parties de  $\Omega$ . Si  $\mathcal{L}$  est identique à  $P(\Omega)$  et satisfait à l'axiome de maxi-



malité, alors l'ensemble des états possibles est l'ensemble des atomes de  $P(\Omega)$ , c'est-à-dire l'ensemble  $\Omega$ . Si de plus  $\mathcal{L}$  satisfait à l'axiome C, alors  $C_a$ , le complémentaire de  $a$ , un sous-ensemble de  $\Omega$ , s'identifie au complément compatible associé à  $a$  et  $P(\Omega)$  vérifie l'hypothèse classique car quel que soit alors l'état du système on a bien soit "a est vrai" soit "a' est vrai".

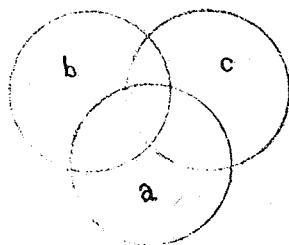
C.Q.F.D.

En fait l'hypothèse classique caractérise les treillis de propositions des systèmes physiques classiques. En mécanique, par exemple, on représente l'état du système par un point dans un certain espace, l'espace de phase. Les propriétés de ce système sont alors représentées par les sous-ensembles de l'espace de phase. Ainsi, l'espace de phase joue en mécanique classique exactement le rôle de l'ensemble  $\Omega$  du théorème précédent et il en est de même de tous les autres systèmes physiques classiques.

Le treillis  $P(\Omega)$  des parties de  $\Omega$  est un treillis distributif :

$$a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c) \quad \forall a, b, c \in P(\Omega)$$

c'est là un théorème bien connu de la théorie des ensembles:



Mais il y a un théorème réciproque :

Théorème : Si le treillis des propositions d'un système physique, satisfaisant à l'axiome de maximalité et à l'axiome C, est distributif, alors il satisfait aussi à l'hypothèse classique.

Démonstration : Il faut montrer que si les propositions  $a$  et  $b$  sont des compléments compatibles alors, quel que soit l'état du système, "a est vrai" ou "b est vrai". Soit  $p$  l'atome correspondant à l'état donné, le treillis étant distributif, on a :

$$p = p \wedge I = p \wedge (a \vee b) = (p \wedge a) \vee (p \wedge b)$$

Mais  $p$  étant un atome  $p \wedge a = p$  ou  $p \wedge a = 0$ . Ainsi, si  $a$  n'est pas vrai pour l'état  $p$ ,  $p \wedge a = 0$  et d'après ce que nous venons de montrer  $p = p \wedge b$ , c'est-à-dire "b est vrai".

C.Q.F.D.

Comme nous l'avons dit, l'hypothèse classique n'est pas toujours vérifiée, aussi pour tenir compte de l'existence des systèmes physiques quantiques, on remplace cette hypothèse par les deux axiomes suivants :

Axiome P : Le treillis des propositions d'un système physique est tel que

$$a < b \rightarrow b' \vee (a' \wedge b) = a'$$

où  $a'$  et  $b'$  sont respectivement des compléments compatibles pour  $a$  et  $b$ .

Axiome A : Dans le treillis des propositions d'un système physique si  $a$  et  $a'$  sont des compléments compatibles et si  $p$  est un atome tel que  $p \wedge a' = 0$  alors  $(p \vee a') \wedge a$  est également un atome.

Le treillis des propositions du photon de notre exemple vérifie bien ces deux axiomes, ceux-ci ont donc un contenu différent de l'hypothèse classique, en fait ils sont moins forts, comme le montre le théorème suivant :

Théorème : Si le treillis des propositions d'un système physique vérifie l'axiome de maximalité, l'axiome C et l'hypothèse classique, alors il vérifie aussi l'axiome P et l'axiome A .

Démonstration : Soit  $a'$  et  $b'$  des compléments compatibles pour  $a$  et  $b$  des propositions de  $\mathcal{L}$  . Si  $\mathcal{L}$  est un treillis satisfaisant aux hypothèses, alors d'après l'hypothèse classique  $a < b$  entraîne  $b' < a'$  ou encore  $b' = a' \wedge b'$  . Or, comme nous l'avons montré sous ces conditions,  $\mathcal{L}$  est distributif, nous pouvons donc écrire :

$$\begin{aligned} b' \vee (a' \wedge b) &= (a' \wedge b') \vee (a' \wedge b) \\ &= (a' \wedge (b' \vee b)) = a' \end{aligned}$$

ce qui démontre l'axiome P .

Enfin, toujours en vertu de la distributivité, si  $a$  et  $b$  sont des compléments compatibles, on a

$$(p \vee b) \wedge a = (p \wedge a) \vee (b \wedge a) = p \wedge a$$

Mais d'après l'hypothèse classique, si  $p \wedge b = 0$  , alors  $p \wedge a = p$  , ce qui démontre l'axiome A . C.Q.F.D.

L'axiome P impose au treillis des propositions une structure très particulière, l'orthomodularité :

Définition : On dit qu'un treillis  $\mathcal{L}$  est orthomodulaire si on s'est donné sur  $\mathcal{L}$  une orthocomplémentation, c'est-à-dire une application qui, à chaque  $a \in \mathcal{L}$ , fait correspondre un complément de  $a$  noté  $a'$  , qui renverse l'ordre :

$$a < b \rightarrow b' < a'$$

et qui est une involution :

$$(a')' = a \quad \forall a \in \mathcal{L}$$

et si de plus  $\mathcal{L}$  est faiblement modulaire :

$$a < b \rightarrow a \vee (b \wedge a') = b$$

Pour démontrer que le treillis des propositions d'un système physique satisfaisant à l'axiome P est orthomodulaire, il suffit de remarquer, qu'en vertu même de cet axiome, le complément compatible pour une proposition donnée est unique, ce qui permet de définir une orthocomplémentation en faisant correspondre à chaque proposition  $a \in \mathcal{L}$  son complément compatible. Réciproquement, si dans un treillis orthomodulaire  $\mathcal{L}$  on interprète l'orthocomplément comme un complément compatible

alors  $\mathcal{L}$  vérifie l'axiome C et l'axiome P. Finalement, on peut encore montrer que l'axiome P est équivalent au suivant, apparemment plus fort :

Pour tout couple de propositions  $a$  et  $b$  tel que  $a < b$ , le sous-treillis engendré par  $a$ ,  $b$  et leurs compléments compatibles  $a'$  et  $b'$ , est distributif comme le treillis des propositions d'un système classique (7). C'est cette dernière interprétation qui rend à priori très plausible un tel axiome.

Le dernier axiome, l'axiome A, est d'une interprétation plus difficile, néanmoins on peut montrer que le système étant dans l'état  $p$ , si on mesure la propriété  $a$  en "perturbant le moins possible" le système, l'état final est donné en cas de réponse affirmative justement par l'atome  $(p \vee a') \wedge a$  (8).

Un treillis complet atomique orthomodulaire dans lequel on interprète les atomes comme des états, les orthocompléments comme des compléments compatibles et, qui enfin satisfait à l'axiome A, est appelé un système de propositions. Le treillis des propositions d'un système physique, qu'il soit classique ou quantique, est toujours en pratique un système de propositions dans ce sens, en particulier le treillis des sous-espaces fermés d'un espace d'Hilbert est un système de propositions (9). Ainsi se trouve justifié l'emploi d'un tel espace en mécanique quantique et son rôle en microphysique.

Cet article est dédié au Professeur Günther Ludwig à l'occasion de son 60<sup>me</sup> anniversaire. Qu'il trouve ici l'expression de notre admiration.

#### Références et notes :

- (1) Ainsi, le physicien dans son explication de la nature ne peut se contenter du "comment", il doit aborder le "pourquoi" afin de pouvoir créer du nouveau.
- (2) Nous avons adopté ici non seulement la terminologie mais aussi le point de vue réaliste d'Aristote. La propriété pour l'électron, d'être "localisé dans une région de l'espace", doit être comparée à la qualité pour l'homme d'être "lettré" comme le définit Aristote dans Physique I chapitre 7, 189b 30 et suivants.
- (3) C'est cette soumission à l'expérience qui caractérise la méthode scientifique et non le type d'expériences considérés. De plus, il faut remarquer que la théorie précède toujours l'expérience et que cette dernière ne peut pas en toute logique prouver la théorie mais seulement l'infirmier.
- (4) Le terme de "proposition" est employé ici dans un sens bien précis, c'est le terme consacré par l'usage quoiqu'il prête souvent à confusion même dans le domaine de l'axiomatique quantique.
- (5) Ainsi, l'ensemble des propositions est un treillis et non simplement un poset (un ensemble ordonné dans lequel les bornes inférieures et supérieures n'existent que pour certaines paires d'éléments, les paires compatibles) comme le postulent certains sur la base d'une idéalisation de la notion de filtre, notion beaucoup plus restrictive que celle de question utilisée ici dans la construction de l'ensemble des propositions. Voir par exemple Varadaraja: Geometry of Quantum Theory, Vol. 1, D. Van Nostrand Company Inc., Princeton, New-Jersey, U.S.A. (1968).

- (6) Ce résultat est en parfait accord avec ceux de W. Ochs, Commun. Math. Phys. 25, p. 245-252 (1972), malgré l'apparence d'un désaccord dans l'article cité, désaccord entièrement créé par une faute sur la photocopie de notre article "On the Structure of Quantal Proposition Systems", Helv. Phys. Acta 42, p. 842 (1969) utilisée par l'auteur (communication privée de W. Ochs).
- (7) Voir paragraphe 2.2, p. 25 dans "Foundations of Quantum Physics" by C. Piron, W.A. Benjamin, Inc., Advanced Book Program, Reading, Massachusetts, U.S.A. (1976). Pour une discussion de cette axiome, voir aussi B. Malnik, Theory of Filters, Comm. Math. Phys. 15, p. 1-46 (1969).
- (8) Voir Foundations of Quantum Physics, loc. cit. Theorem 4.3, p. 68.
- (9) Réciproquement, tout système de propositions (à part une exception en dimension 3) peut être réalisé à l'aide des sous-espaces fermés d'espaces vectoriels de ce type. Voir Foundations of Quantum Physics, loc. cit. p. 57.

