Annales de la Fondation Louis de Broglie - Vol. 3, n° 4, 1978

A LA RECHERCHE DU TEMPS PERDU

Première partie : le constat de perte

par M. Augustin BLAQUIERE

Laboratoire d'Automatisme Théorique. Paris VII.
Tour 14 - 24
2, Place Jussieu - 75221 PARIS Cédex 05

(manuscrit reçu le 9 Janvier 1978)

Résumé :
La première partie est consacrée à la Dynamique classique. Nous montrons que les idées de Louis de Broglie qui sont à l'origine de la Mécanique Ondulatoire jettent une vive lumière sur les théories de Hamilton et Jacobi. Ces théories reposent sur un principe de conservation du temps. Par contre ce principe est en défaut dans l'équation d'ondes relativiste.

"Travail exposé devant le Séminaire de la Fondation Louis de Broglie le 6 Mars 1978"

1. Introduction.

Le raisonnement par lequel Louis de Broglie introduit la Mécanique ondulatoire s'appuie sur deux remarques :

1º) Une particule de masse propre m_o, contenant au repos l'énergie interne m_oc^2, est assimilable à une petite horloge de fréquence propre $\nu_o = m_oc^2/h$ (c, vitesse de la lumière, h, constante de Planck).

2º) C'est cette petite horloge qui sert à définir le temps en tous les points du système de référence propre du corpuscule; ce que l'on peut comprendre en imaginant une infinité de petites horloges disposées en tous les points du système propre du corpuscule, synchronisées entre elles et avec l'horloge étalon, et possédant la période $T_o = 1/\nu_o$.

L'association d'une onde à tout corpuscule apparaît alors comme une conséquence directe de la transformation de Lorentz.

Ce raisonnement présente un double intérêt. Comme l'a montré Louis de Broglie il fait voir sous un jour particulièrement clair les liens onde-corpuscule. Mais ce que l'on peut aussi remarquer c'est qu'il permet d'approfondir les lois de la dynamique classique et d'en discuter les limites. Dans cet ordre d'idées, notre propos sera de situer le raisonnement de Louis de Broglie par rapport aux théories de Hamilton et Jacobi, précisant au passage ses liens avec la plus récente théorie de la programmation dynamique, puis d'en proposer une extension en vue de justifier par des arguments rationnels l'équation d'ondes relativiste généralement appelée équation de Klein-Gordon.

Nous rappellerons d'abord, sous une forme légèrement modifiée, le raisonnement de Louis de Broglie de 1923.

2. Le point de départ de la Mécanique ondulatoire.

Considérons un corpuscule de masse propre m_o, animé d'un mouvement rectiligne et uniforme de vitesse $v = (v_1, v_2, v_3)$ dans le système de référence galiléen d'un observateur A, observateur qui emploie un temps t et des coordonnées rectangulaires x_1, x_2, x_3. Soit un observateur B, lié au corpuscule, dont le système de référence galiléen a ses axes parallèles à ceux du système de référence de A et pour vitesse de translation v dans ce système. Dans son repère B emploie un temps t' et des coordonnées x'_1, x'_2, x'_3.

Les espaces-temps respectifs R_4 et R'_4 de A et B sont les ensembles de points (x_1, x_2, x_3, t) et (x'_1, x'_2, x'_3, t'). Nous supposerons qu'ils ont pour origine commune le point O, et nous définirons une famille d'isochrones dans chacun d'eux.

C étant une constante réelle arbitraire, nous appellerons isochrone S(C) le plan formé par l'ensemble des points $(x_1, x_2, x_3,\ t=C)$ de R_4, et isochrone S'(C) le plan formé par l'ensemble des points $(x'_1, x'_2, x'_3,\ t'=C)$ de R'_4.

En faisant varier C on engendre dans R_4 et dans R'_4 une famille de plans parallèles, respectivement $\{S(C)\}$ et $\{S'(C)\}$. Les espaces-temps R_4 et R'_4 ainsi que quelques plans de la famille $\{S'(C)\}$ sont représentés schématiquement à deux dimensions sur la figure 1. D'après les formules de la transformation de Lorentz l'axe Ot' de R'_4 et une isochrone quelconque S'(C) sont définis respectivement dans R_4 par les équations

$$x_\alpha = v_\alpha t \qquad \alpha = 1, 2, 3 \tag{1}$$

$$\frac{t}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{v_\alpha x_\alpha}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}} = C \tag{2}$$

C'est ici qu'interviennent les deux remarques de Louis de Broglie en introduisant une structure périodique dans R_4'. Vues dans R_4', toutes les petites horloges distribuées sur une même isochrone $S'(C)$ et sur les isochrones $S'(C+nT_o)$, $n = 1, 2, \ldots$ sont en phase. Il suffit de se reporter à la figure 1 et de la couper par un plan t = contante, pour constater que, quel que soit t, l'observateur A voit, dans son système de référence propre, les phases des balanciers des petites horloges réparties comme celles d'une onde plane monochromatique de période T. La valeur de T se déduit directement de la formule (2) en y remplaçant C, t et x_α, pour $\alpha=1,2,3$, respectivement par T_o, T et zéro. On trouve

$$T = T_o \sqrt{1 - v^2/c^2} \qquad (3)$$

ou, si on passe aux fréquences

$$\nu = \frac{\nu_o}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad (4)$$

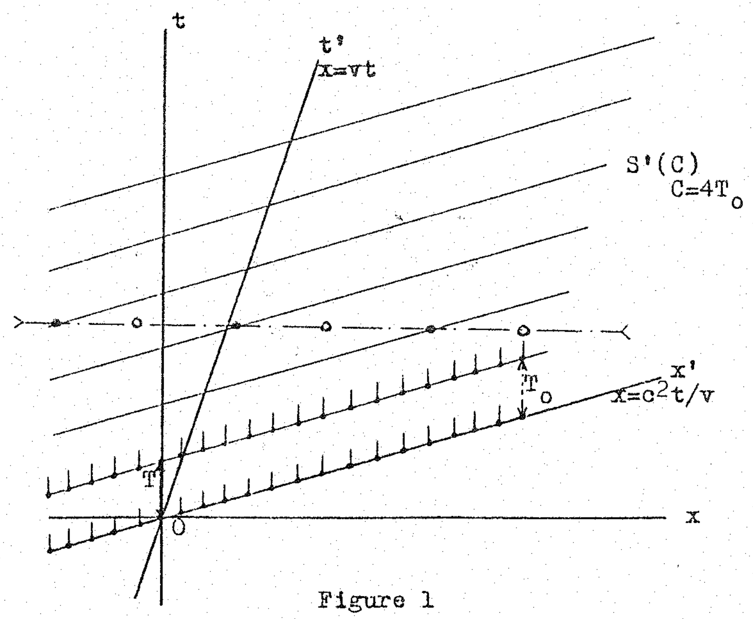

Figure 1

La formule (4) qui est la loi de transformation relativiste de la fréquence d'une onde est différente, comme le remarque Louis de Broglie, de la loi de transformation de la fréquence d'une horloge qui serait ici

$$\nu_H = \nu_o \sqrt{1 - v^2/c^2} \qquad (5)$$

Remarquons que la position du corpuscule, dans le système de référence de A, n'a joué aucun rôle dans le raisonnement précédent, où seule la vitesse v est importante. Ce raisonnement reste donc inchangé que l'on considère un corpuscule unique, ou un ensemble de corpuscules tous identiques à ce dernier, disposés par exemple en tous les points de l'espace, en translation uniforme de vitesse v.

3. Extension de la théorie, forme de Poincaré-Cartan.

Un cas plus général est celui dans lequel le mouvement d'un corpuscule, dans le système de référence de A, est caractérisé par

(i) une position $x = x(t)$, à chaque instant t de A, $x = (x_1, x_2, x_3)$;

(ii) un vecteur vitesse $v = v(x(t),t)$ qui dépend de cette position et du temps t de A, $v = (v_1, v_2, v_3)$;

(iii) une masse propre $m_o = m_o(x(t),t)$ qui dépend aussi de cette position et du temps t de A; rappelons en effet que si il existe une fonction énergie potentielle $U(x,t)$, la théorie de la relativité nous apprend que la masse propre est de la forme $m_o = \underline{m}_o + U(x,t)/c^2$ où $\underline{m}_o$ est une constante caractéristique du corpuscule.

Nous pouvons alors, pour chaque instant t de A, définir un <u>système de référence galiléen tangent</u> comme suit :

ce système a ses axes parallèles à ceux du système de référence de A; son origine est le point $x = x(t)$; sa vitesse de translation par rapport au système de référence de A est $v=v(x(t),t)$.

Il est clair que, sur un intervalle de temps assez court où $v(x(t),t)$ reste pratiquement constant le raisonnement du paragraphe précédent peut être reproduit sans modification. Mais, pour tenir compte des nouveaux aspects du problème, nous devrons le transcrire sous une forme différentielle. Les relations (1) et (2) seront donc remplacées respectivement par

$$dx_\alpha = v_\alpha \, dt \qquad \alpha = 1,\ 2,\ 3 \tag{6}$$

$$\frac{dt}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{v_\alpha \, dx_\alpha}{c^2 \sqrt{1-v^2/c^2}} = dt' \tag{7}$$

avec $\quad v_\alpha = v_\alpha(x(t),t) \qquad \alpha = 1,\ 2,\ 3;$

et, ce qui est très important, <u>l'étalon de temps dans le système propre du corpuscule n'est plus le même aux différents points de la trajectoire</u> $x(t)$. On a en effet maintenant

$$T_0(x(t),t) = \frac{h}{c^2 \, m_0(x(t),t)}$$

Comme c'est cet étalon qui sert à mesurer dt', il apparait nécessaire de remplacer la variable t' par une nouvelle variable $\tilde{t}'$ satisfaisant à la condition locale

$$d\tilde{t}' = dt'/T_0(x(t),t) \tag{8}$$

La relation (7) devient alors

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \, dt - \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{m_0 v_\alpha}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \, dx_\alpha = h \, d\tilde{t}' \tag{9}$$

avec $m_0 = m_0(x(t),t)$, $\quad v_\alpha = v_\alpha(x(t),t), \qquad \alpha = 1,\ 2,\ 3.$

Nous voyons ainsi apparaître, grace à ce raisonnement simple, une forme différentielle linéaire qui a joué un rôle de tout premier plan en Mécanique analytique classique : la <u>forme de Poincaré-Cartan</u>. Arrêtons nous un instant pour préciser ce point.

La forme de Poincaré-Cartan est

$$d\omega = \sum_{\alpha=1}^{3} p_\alpha(x,t) \, dx_\alpha + p_0(x,t) \, dt \tag{10}$$

avec

$$p_\alpha(x,t) = \frac{m_0 v_\alpha}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad\qquad p_0(x,t) = - \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

On a donc

$$d\omega = - h \, d\tilde{t}'$$

et comme h est une constante, il revient au même d'utiliser dans les raisonnements qui vont suivre la forme (9) ou la forme (10).

Sur un intervalle de temps assez court où $v(x(t),t)$ reste pratiquement constant, on peut définir comme au paragraphe précédent deux familles de plans isochrones. En supposant que $x(0)=0$ il est facile de voir que la figure 1 doit être remplacée maintenant par la figure 2.

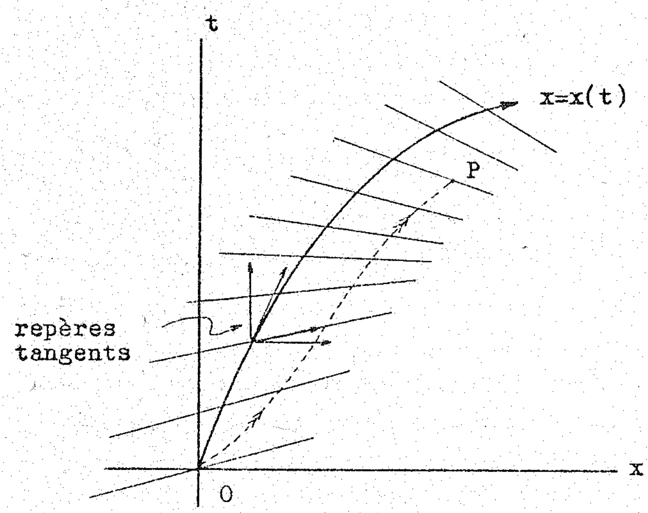

Figure 2

Sur cette figure où est représentée la famille d'isochrones $\{S'(C)\}$ définie par la condition

$$d\tilde{t}' = 0$$

on a tracé un chemin arbitraire joignant le point O au point P dans le voisinage de la trajectoire $x = x(t)$. Celà nous paraît rendre plus claire la signification de la variable $\tilde{t}'$: posant $\tilde{t}' = 0$ au point O, la valeur de $\tilde{t}'$ au point P, soit $\tilde{t}'_P$, est <u>le nombre de cycles compté par un observateur C se déplaçant de O à P en suivant ce chemin, l'heure lui étant indiquée en chaque point de ce chemin par l'horloge locale.</u> Sur la figure on a $\tilde{t}'_P = 7$.

4. L'hypothèse de base de la Dynamique classique.

Un examen un peu plus attentif de la question nous montre que les petites horloges (que l'on peut supposer ponctuelles) introduites par Louis de Broglie en tous les points du système propre du corpuscule ont des trajectoires dans l'espace-temps R_4 de A. Nous sommes ainsi conduits à définir dans cet espace-temps un <u>champ de vecteurs vitesse</u> $v = v(x,t)$, le champ des vitesses de ces petites horloges, de telle sorte que la trajectoire $x = x(t)$ du corpuscule considéré, dans R_4, soit <u>une solution</u> du système d'équations différentielles ordinaires

$$\dot{x} = v(x,t) \quad , \quad x = (x_1,x_2,x_3), \ v = (v_1,v_2,v_3), \qquad (11)$$

Comme il se doit, la vitesse de déplacement suivant l'axe des temps est $dt/dt = 1$. Nous supposerons $v(x,t)$ continûment dérivable.

La discussion du caractère réel ou fictif des autres solutions, qui est évidemment liée à celle du caractère réel ou fictif des petites horloges introduites par Louis de Broglie, ne sera abordée que plus tard. Considérons pour l'instant la méthode comme une commodité d'ordre mathématique.

Il est alors naturel, dans le droit fil du précédent raisonnement, de nous demander si il existe, dans l'espace-temps R_4 de A, une famille de surfaces isochrones $S'(C)$ définie par la condition

$$d\tilde{t}' = 0 \ , \quad \text{c'est-à-dire} \quad \tilde{t}' = C \qquad (12)$$

Si il en est ainsi, la figure 2 n'est qu'un cas particulier de la figure 3.

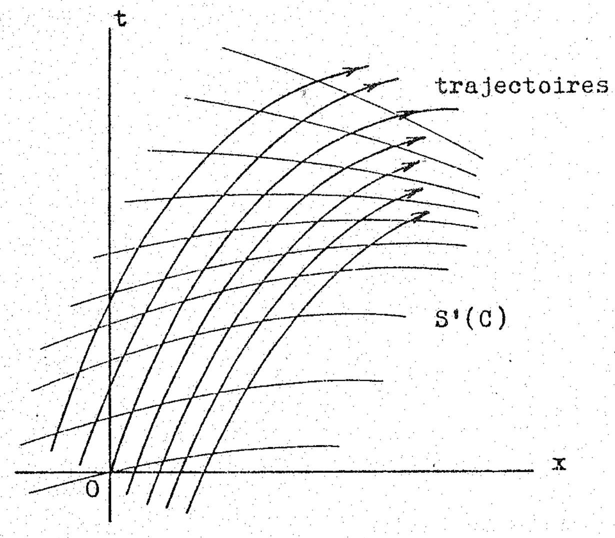

Figure 3

Il est équivalent de nous demander si $d\tilde{t}'$ (ou $d\omega$) est une différentielle totale exacte. Comme il est clair que la réponse à cette question doit être subordonnée à certaines propriétés du champ de vecteurs vitesse, demandons nous plutôt à quelle condition doit satisfaire le champ des vecteurs vitesse pour que $d\omega$ (ou $d\tilde{t}'$) soit une différentielle totale exacte.

La condition nécessaire et suffisante s'écrit

$$\frac{\partial p_\alpha(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial p_0(x,t)}{\partial x_\alpha} \quad , \quad \frac{\partial p_\alpha(x,t)}{\partial x_\beta} = \frac{\partial p_\beta(x,t)}{\partial x_\alpha} \qquad (13)$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, 3$$

Nous allons montrer que les équations d'Euler-Lagrange s'en déduisent. Posons

$$L(x,t,v) = - m_0(x,t)c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} \qquad (14)$$

On a

$$\left.\frac{\partial L}{\partial v_\alpha}\right|_{v=v(x,t)} = \frac{m_0(x,t)\ v_\alpha(x,t)}{\sqrt{1-v^2(x,t)/c^2}} = p_\alpha(x,t) \qquad (15)$$

d'où

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_\alpha}\right) = \frac{\partial p_\alpha(x,t)}{\partial t} + \sum_{\beta=1}^{3} \frac{\partial p_\alpha(x,t)}{\partial x_\beta}\ v_\beta(x,t) \qquad (16)$$

Tenant compte de (13) on obtient

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_\alpha}\right) = \frac{\partial p_0(x,t)}{\partial x_\alpha} + \sum_{\beta=1}^{3} \frac{\partial p_\beta(x,t)}{\partial x_\alpha}\ v_\beta(x,t) \qquad (17)$$

soit

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_\alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(p_0(x,t) + \sum_{\beta=1}^{3} p_\beta(x,t)\ v_\beta\right)\Big|_{v=v(x,t)} \qquad (18)$$

Insistons sur le fait que en effectuant la dérivée, au second membre de (18), on devra considérer x, t et v_β , β=1,2,3, comme des variables indépendantes, ce qui explique notre changement de notations. On vérifiera sans peine que

$$p_0(x,t) + \sum_{\beta=1}^{3} p_\beta(x,t)\ v_\beta = L(x,t,v) \qquad (19)$$

d'où le résultat attendu

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_\alpha} = 0 \qquad \alpha = 1, 2, 3 \qquad (20)$$

Nous arrivons donc au résultat fondamental suivant :

Si le champ de vecteurs vitesse v(x,t) est tel que la forme différentielle $d\tilde{t}'$ (ou $d\omega$) soit une différentielle totale exacte, alors toute courbe intégrale de ce champ dans l'espace-temps R_4 de l'observateur A satisfait aux conditions nécessaires et suffisantes de stationnarité d'Euler-Lagrange, pour le Lagrangien

$$L(x,t,v) = - m_0(x,t)c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

En d'autres termes, toute courbe intégrale du champ v(x,t) est susceptible d'être la trajectoire d'un corpuscule. C'est une trajectoire pour des conditions initiales, position et vitesse, convenablement choisies. Le long d'une telle trajectoire x(t), $t_1 \leq t \leq t_2$, l'intégrale d'action d'Hamilton

$$\int_{t_1}^{t_2} L(x(t),t,v(x(t),t))\ dt$$

est stationnaire.

L'hypothèse d'existence d'une primitive de $d\tilde{t}'$ (ou $d\omega$), c'est-à-dire d'une famille de surfaces isochrones S'(C) apparait donc comme l'hypothèse de base de la Dynamique analytique classique.

Ici une remarque de caractère pédagogique ne nous parait pas hors de propos car le résultat suivant est absent de la plupart des cours de Dynamique analytique. Comme $m_0(x,t) = \underline{m}_0 + U(x,t)/c^2$, où U(x,t) est une fonction énergie potentielle donnée, l'approximation non relativiste de L(x,t,v) est

$$L(x,t,v) \sim -m_0(x,t)c^2(1-v^2/2c^2) \sim \tfrac{1}{2}\underline{m}_0 v^2 - U(x,t) - \underline{m}_0 c^2$$

On retrouve, à une constante près sans intérêt en Mécanique classique, l'expression très mystérieuse L = T - U, en désignant par T l'énergie cinétique classique, non relativiste.

Du point où nous nous trouvons maintenant, nous pouvons observer les deux versants de la théorie : celui de la Mécanique classique et celui de la Mécanique ondulatoire. Ainsi il nous suffit de couper la figure 3 par un plan t = constante pour voir l'onde de Louis de Broglie associée à la famille de trajectoires classiques dont nous venons de parler. Nous sommes donc en mesure de situer le raisonnement de Louis de Broglie par rapport aux théories de Hamilton et Jacobi, d'analyser leurs limites respectives et de trouver, peut-être, dans cette analyse la source de nouveaux prolongements.

5. Programmation dynamique et principe de l'harmonie des phases.

Dans la suite nous utiliserons la forme différentielle linéaire (10), dont nous désignerons une primitive par $V(x,t)$. $V(x,t)$ est reliée à $\tilde{t}'(x,t)$ par la formule

$$V(x,t) = -h\,\tilde{t}'(x,t)$$

(à une constante additive près). Comme h a la dimension d'une action (énergie $\times$ temps), et que $\tilde{t}'$ est un nombre de périodes d'horloge (sans dimension), $V(x,t)$ a la dimension d'une action. Il n'y aura cependant aucun inconvénient à considérer $V(x,t)$ formellement comme un temps, puisque h est une constante, et à l'appeler indifféremment <u>action potentielle</u> ou <u>temps potentiel</u> en (x,t).

Désignons par dV l'expression de la forme différentielle $d\omega$ calculée en suivant le corpuscule le long de sa trajectoire, dans le système de référence de A. On a

$$dV = \left(\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial V(x,t)}{\partial x_\alpha} v_\alpha(x,t) + \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} \right) dt \qquad (21)$$

et comme

$$p_\alpha(x,t) = \frac{\partial V(x,t)}{\partial x_\alpha} = \frac{m_o v_\alpha}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad \alpha = 1,2,3$$
$$p_o(x,t) = \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} = -\frac{m_o c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad (22)$$

on a

$$dV = L(x,t,v(x,t))\,dt$$

d'où la relation

$$-L(x,t,v(x,t)) + \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial V(x,t)}{\partial x_\alpha} v_\alpha(x,t) = 0 \qquad (23)$$

Comme on a d'ailleurs

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x_\alpha} = \left.\frac{\partial L(x,t,v)}{\partial v_\alpha}\right|_{v=v(x,t)} \qquad \alpha=1,2,3 \qquad (24)$$

on voit que le système des deux relations (23) et (24) est équivalent à

$$\operatorname*{stat}_{v}\; H(x,t,v) = 0 \qquad (25)$$

avec

$$H(x,t,v) = -L(x,t,v) + \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial V(x,t)}{\partial x_\alpha} v_\alpha$$

où stat $H(x,t,v) = 0$ signifie que la valeur de $H(x,t,v)$ calculée pour la valeur de v qui rend H stationnaire (en général minimale ou maximale) est nulle.

Nous retrouvons l'équation maintenant classique de la programmation dynamique, ce qui nous permet de rattacher le sujet traité ici aux vastes travaux effectués depuis plusieurs années en théorie de l'optimisation. C'est d'ailleurs cette voie, par une démarche inverse de celle que nous avons adoptée ici, qui nous a conduit de la théorie de l'optimisation à la Mécanique ondulatoire, il y a quelques années.

Quelle est ici la signification de l'équation (25) ? la voici :

Considérons l'observateur B solidaire du corpuscule, se déplaçant avec lui dans le système de référence de A, du point $x^1 = x(t_1)$ au point $x^2 = x(t_2)$, suivant la trajectoire $x(t)$, et transportant l'horloge étalon dont nous avons parlé. La variation de temps qu'elle lui indique pour une petite variation Δt du temps de A est

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - v^2(x,t)/c^2}$$

soit, en nombre de cycles de l'horloge étalon (au facteur -h près)

$$\Delta V = -h \frac{\Delta t'}{T_o(x,t)} = - m_o(x,t)c^2 \sqrt{1 - v^2(x,t)/c^2} \quad \Delta t$$

L'intégration de l'équation (25) <u>le long de la trajectoire</u>, c'est-à-dire de l'équation (23) du point initial (x^1,t_1) au point terminal (x^2,t_2), donne

$$V(x^2,t_2) - V(x^1,t_1) = \int_{(x^1,t_1)}^{(x^2,t_2)} dV \qquad (26)$$

L'équation (26) est une équation de <u>conservation du temps</u>. Elle exprime que <u>le temps de transfert lu à l'horloge de</u> B <u>est la différence entre le temps potentiel terminal</u> $V(x^2,t_2)$ <u>et le temps potentiel initial</u> $V(x^1,t_1)$.

En termes plus imagés, tout se passe comme si le temps de transfert s'était intégralement transformé en temps potentiel. Le temps étant considéré du point de vue de la théorie de l'optimisation comme un quelconque bien consommable, il n'y a eu "perte" de temps en aucun point de la trajectoire.

L'équation (25) contient une autre information. Elle nous apprend qu'un observateur C, suivant un chemin différent de la trajectoire $x(t)$, de (x^1,t_1) à (x^2,t_2), lira à l'horloge qu'il transporte un temps de transfert en général différent

de $V(x^2,t_2) - V(x^1,t_1)$. On ne doit pas en conclure qu'il y a eu dans ce cas "perte" de temps (au sens que nous venons de donner à ce terme) le long du chemin mais, plus simplement, que l'observateur a perdu du temps (au sens usuel) en ne suivant pas le meilleur chemin.

La forme de l'équation (23) est aussi celle d'une équation obtenue par Louis de Broglie dans la théorie du guidage, par exemple l'équation (32) de[(1)] où la fonction V est remplacée par φ, la phase de l'onde associée au corpuscule. Cette équation joue un rôle important en exprimant que le corpuscule assimilé à une petite horloge glisse par rapport à la phase de son onde de façon à rester toujours en phase avec l'onde : c'est le <u>théorème de l'harmonie des phases.</u>

Un examen un peu attentif de cette question montre que la façon dont nous avons expliqué le sens de l'équation (23) n'est pas différente quant au fond de l'explication donnée par Louis de Broglie, bien que cette dernière ait un caractère plus physique.

Le point important est que <u>l'équation de la programmation dynamique obtenue ici est irréductiblement associée à un principe de conservation du temps.</u>

6. Equation d'Hamilton-Jacobi.

En multipliant les deux membres de l'équation (23) par $m(x,t) = m_o(x,t)/\sqrt{1-v^2/c^2}$ elle devient

$$m_o^2(x,t)c^2 + \frac{m_o(x,t)}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial V(x,t)}{\partial x_\alpha} \frac{m_o(x,t)}{\sqrt{1-v^2/c^2}} v_\alpha(x,t) = 0$$

soit, compte tenu de (22)

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} \right)^2 - \sum_{\alpha=1}^{3} \left(\frac{\partial V(x,t)}{\partial x_\alpha} \right)^2 = m_o^2(x,t)c^2 \qquad (27)$$

L'équation (27) est l'équation d'Hamilton-Jacobi.

Remarquons qu'on peut l'obtenir plus directement, à partir de (22), sans faire appel à l'équation (23), en notant que

$$(1/c^2)\ p_0^2(x,t) - \sum_{\alpha=1}^{3} p_\alpha^2(x,t) = m_0^2(x,t)c^2$$

Nous voyons que les surfaces isochrones S'(C) sont les surfaces intégrales de l'équation d'Hamilton-Jacobi.

L'équation d'Hamilton-Jacobi est l'une des expressions, peut-être la plus claire, de l'apparent paradoxe sur lequel débouche la Dynamique analytique classique. Construite pour expliquer la loi d'évolution au cours du temps d'un point matériel le long de sa trajectoire, elle est pratiquement contrainte, dans son évolution en profondeur et en généralité, de sacrifier le phénomène individuel au profit d'un phénomène collectif : plus précisément elle ne peut expliquer la loi d'évolution du corpuscule qu'à partir de celle d'un ensemble de corpuscules tous identiques à celui que l'on se propose d'étudier. Finalement, dans le choix des conditions initiales, il est équivalent du point de vue mathématique de se donner une isochrone particulière S'(C), comme condition aux limites de l'équation d'Hamilton-Jacobi, ou de se donner l'ensemble des positions et des vitesses initiales des corpuscules du "nuage".

On sait quel rôle important ont joué les théories de Hamilton et de Jacobi dans la genèse de la Mécanique ondulatoire, et nous venons de montrer que, si elles ont guidé les réflexions de Louis de Broglie, le raisonnement de 1923 en est le complément nécessaire. Il paraît peu douteux que la nécessité de substituer un champ de vecteurs vitesse dans l'espace-temps R_4 à l'ensemble des vitesses du corpuscule le long d'une trajectoire, n'est pas seulement un subterfuge d'ordre mathématique, mais a une origine physique. Une idée naturelle, mais trop sommaire comme nous le verrons dans la deuxième partie de cet exposé, consisterait à supposer que la trajectoire d'un corpuscule est aléatoire, les fluctuations devenant très petites quand on se rapproche des conditions classiques. Une trajectoire classique serait alors une trajectoire moyenne (dans un

sens à préciser) et le champ de vecteurs vitesse de la théorie un champ de vitesses moyennes (dans un sens également à préciser).

7. Non conservation du temps.

C'est la fonction $V = V(x,t)$, fonction réelle de variables réelles, qui est au centre de la discussion des précédents paragraphes. De sa seule existence, nous l'avons vu, se déduisent les lois fondamentales de la Dynamique analytique classique du point matériel. La Mécanique ondulatoire a aussi sa fonction privilégiée, la fonction d'onde $\psi = \psi(x,t)$, qui obéit, dans le cas relativiste, à l'équation de propagation

$$\Box\,\psi + \frac{4\pi^2}{h^2}\, m_0^2 c^2\, \psi = 0 \qquad (28)$$

où $\Box$ désigne le Dalembertien

$$\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}$$

Proposée simultanément par plusieurs auteurs au début de l'été 1926, tout de suite après les travaux de Schrödinger, elle est connue sous le nom d'équation de Klein-Gordon. A la différence de V, la fonction ψ est essentiellement complexe.

Posons

$$\psi = \exp\,(i\ 2\pi\overline{V}/h) \quad ,\ i = \sqrt{-1}$$

où $\overline{V} = \overline{V}(x,t)$ est une fonction complexe de variables réelles. Portant dans l'équation (28) on obtient la nouvelle équation

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \overline{V}(x,t)}{\partial t}\right)^2 - \sum_{\alpha=1}^{3}\left(\frac{\partial \overline{V}(x,t)}{\partial x_\alpha}\right)^2 = m_0^2(x,t)c^2 + \frac{ih}{2\pi}\,\Box\overline{V}(x,t) \qquad (29)$$

La ressemblance entre l'équation d'Hamilton-Jacobi (27) et l'équation (29) ne peut que conduire à leur attribuer un lien de parenté. C'est ce que fait Louis de Broglie en posant

$$\overline{V}(x,t) = V(x,t) + i\ W(x,t) \qquad (30)$$

puis en séparant les termes réels des termes imaginaires dans (29), ce qui le conduit aux deux équations

$$(J)\quad \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 - \sum_{\alpha=1}^{3}\left(\frac{\partial V}{\partial x_\alpha}\right)^2 = m_o^2c^2 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 - \sum_{\alpha=1}^{3}\left(\frac{\partial W}{\partial x_\alpha}\right)^2 - \frac{h}{2\pi}\Box W$$

$$(C)\quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial W}{\partial t} - \sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial V}{\partial x_\alpha}\frac{\partial W}{\partial x_\alpha} = \frac{h}{4\pi}\Box V$$

En fait les équations (J) et (C) de Louis de Broglie ne sont pas écrites exactement sous cette forme car il y introduit le module a de Ψ en posant

$$a = \exp(-2\pi W/h)$$

Laissant provisoirement de côté l'interprétation de l'équation (C), portons notre attention sur l'équation (J). Si on pose

$$M_o = \sqrt{m_o^2 + \frac{1}{c^4}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\sum_{=1}^{3}\left(\frac{\partial W}{\partial x_\alpha}\right)^2 - \frac{h}{2\pi c^2}\Box W} \qquad (31)$$

elle devient

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 - \sum_{\alpha=1}^{3}\left(\frac{\partial V}{\partial x_\alpha}\right)^2 = M_o^2c^2 \qquad (32)$$

Celà autorise à déduire l'équation (32) de l'équation de la programmation dynamique (23) <u>à condition de remplacer la masse propre</u> $m_o(x,t)$ <u>par la masse propre modifiée</u> $M_o(x,t)$.

Dans le cas non relativiste, la correction relève de la formule

$$M_o(x,t) = m_o(x,t) + Q(x,t)/c^2 \qquad (33)$$

où

$$Q(x,t) = -\frac{1}{2m_o}\sum_{\alpha=1}^{3}\left(\frac{\partial W}{\partial x_\alpha}\right)^2 + \frac{h}{4\pi m_o}\nabla^2 W$$

est le <u>potentiel quantique</u> de la théorie de la double solution.

Il peut être commode d'ailleurs d'écrire $M_o(x,t)$ sous la forme (33) même dans le cas relativiste, avec une expression plus compliquée pour $Q(x,t)$.

Reprenant le raisonnement du paragraphe 5, la relation (26) devient

$$V(x^2,t_2)-V(x^1,t_1) = \int_{(x^1,t_1)}^{(x^2,t_2)} -m_o(x,t)c^2\sqrt{1-v^2(x,t)/c^2}\,dt + \int_{(x^1,t_1)}^{(x^2,t_2)} -Q(x,t)\sqrt{1-v^2(x,t)/c^2}\,dt \qquad (34)$$

De l'équation (34) il ressort que, le long d'une trajectoire $x(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, de point initial $x^1 = x(t_1)$ et de point terminal $x^2 = x(t_2)$, le temps de transfert (au facteur -h près)

$$\int_{(x^1,t_1)}^{(x^2,t_2)} -m_o(x,t)c^2\sqrt{1-v^2(x,t)/c^2}\,dt$$

lu à l'horloge de B n'est pas égal, en général, à la variation du temps potentiel $V(x^2,t_2) - V(x^1,t_1)$. En d'autres termes <u>il n'y a pas conservation du temps.</u>

La défaillance d'un principe de conservation est parfois, en physique, riche de conséquences. Arrêtons-nous un moment sur la relation (34) pour en approfondir le sens.

Sous cette forme stricte, le principe de l'harmonie des phases paraît en défaut : le balancier de la petite horloge qu'est le corpuscule bat trop vite ou trop lentement pour se trouver constamment en phase avec l'onde.

Les voies les plus évidentes qui s'ouvrent alors pour rétablir un principe de conservation sont les suivantes :

1º) garder la définition de l'onde à partir de la fonction $V(x,t)$, solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi, et modifier dans la théorie la fréquence de la petite horloge, en chaque point (x,t) où elle se trouve, par le jeu du potentiel quantique, de façon à lui imposer d'être constamment en phase avec l'onde. C'est ce que fait Louis de Broglie en s'appuyant sur la relation $M_o c^2 = h \nu_o$;

2º) garder la définition de la fréquence de la petite horloge, $\nu_o = m_o c^2/h$, et modifier dans la théorie la définition de l'onde de façon à retrouver l'accord des phases. Le choix de cette deuxième voie nous a été suggéré par la forme que prend l'équation de la programmation dynamique dans le cas d'un processus stochastique.

Dans le cadre de cet exposé, l'intérêt de cette deuxième voie nous paraît essentiellement porter sur trois points :

(i) la justification de la formule (31);

(ii) la justification de la forme de l'équation d'onde relativiste (28);

(iii) l'introduction de deux types d'actions, c'est-à-dire de temps, respectivement associés à deux types de processus: un processus que nous pouvons qualifier d'ordonné, et un processus que nous pouvons qualifier de désordonné.

Ce sont les points que nous nous proposons de discuter dans la deuxième partie de l'article.

Le lecteur aura noté que la grande absente de la théorie que nous venons d'exposer (jusqu'au paragraphe 6 inclus) est l'amplitude de l'onde. Autrement dit c'est une théorie sans W. Comme c'est aussi une théorie conservative du point de vue du temps, il est logique de penser que l'amplitude $a=\exp(-2\pi W/h)$ de l'onde a quelque rapport avec la non conservation du temps, comme celà apparaît d'ailleurs au paragraphe 7.

BIBLIOGRAPHIE

(1) L. DE BROGLIE, Ann. Inst. Henri Poincaré, IX, nº 2, 1968, p. 89-108, section A: Physique théorique.

(2) L. DE BROGLIE, Une tentative d'interprétation causale et non linéaire de la mécanique ondulatoire, Gauthier-Villars, Paris, 1956.

(3) E. CARTAN, Leçons sur les invariants intégraux, Hermann, Paris, 1958.

(4) A. BLAQUIERE, Comptes rendus, 262, série A, 1966, p. 593.

(5) A. BLAQUIERE, Comptes rendus, 262, série A, 1966, p. 721.

(6) A. BLAQUIERE, Comptes rendus, 268, série A, 1969, p. 1304.

(7) A. BLAQUIERE, Comptes rendus, 283, série A, 1976, p. 401.

(8) A. BLAQUIERE, Comptes rendus, 285, série A, 1977, p. 145.

(9) A. BLAQUIERE, Annales de la Fondation Louis de Broglie, 1, nº 4, 1976 et 2, nº 1, 1977.

(10) A. BLAQUIERE, Comptes rendus, 285, série A, séance du 14 novembre 1977.