

UNE NOUVELLE HYPOTHESE D'IRREVERSIBILITE  
ET SON APPLICATION AUX GAZ DENSES

par M. J. SALMON et M. VALTON

Conservatoire National des Arts et Métiers

Département de physique générale

292 rue Saint-Martin

75141 Paris Cédex 03

(manuscrit reçu le 30 Mai 1978  
texte révisé reçu le 9 Octobre 1978)

*Résumé : Après un bref rappel des méthodes utilisées pour généraliser l'équation de Boltzmann au cas des gaz denses, les auteurs proposent une modification d'une hypothèse d'irréversibilité antérieure basée sur la notion du pseudo-équilibre local. Ils obtiennent ainsi une équation cinétique du type Fokker-Planck - Frey-Salmon. Ils en déduisent une formule simple du coefficient de viscosité bien vérifiée par l'expérience pour l'Argon et l'azote dans le domaine 200 - 500 K - 1 - 500 bars.*

*Ils montrent également qu'en première approximation, le coefficient de viscosité d'un gaz dilué ne dépend que du diamètre des molécules, de l'abscisse du puits de potentiel et de sa profondeur.*

INTRODUCTION

Depuis de nombreuses années les recherches relatives à la théorie des gaz denses se poursuivent dans la voie de la généralisation de l'équation de Boltzmann aux milieux non dilués. Des résultats importants ont été obtenus au moyen de l'équation d'Enskog /1/.

Nous les rappellerons en soulignant la nécessité d'adapter certains paramètres au moyen de l'équation d'état.

Une autre approche utilise un développement en fonction de la densité particulaire. En introduisant des hypothèses sur les corrélations initiales et la forme des opérateurs convectifs, on peut montrer que la fonction de distribution double devient une fonctionnelle de la fonction de distribution simple conformément au modèle de Bogoliubov. On obtient un ensemble d'équations intégrales dont Choch et Uhlenbeck /2//3/ ont déduit la correction du premier ordre des coefficients de transport. Leurs résultats furent confirmés par Melville Green /4/. Malheureusement, des termes divergents surgissent aux ordres supérieurs ainsi que l'ont démontré Cohen et Dorfman /5//6/. J. Weinstock avait également signalé ces divergences /7/.

Après un bref rappel des résultats obtenus par ces deux méthodes, nous proposerons une hypothèse d'irréversibilité tout à fait différente des hypothèses habituelles. Nous introduirons le concept de pseudo-équilibre local et obtiendrons une équation cinétique du type Fokker-Planck - Frey-Salmon /8/. Nous obtiendrons ainsi une expression simple du coefficient de viscosité bien vérifiée par l'expérience /9//10//11//12/.

## II - EQUATIONS ET FORMULES D'ENSKOG.

Désignons par  $t$  le temps, par  $m$  la masse des particules, par  $\vec{x}_i$  et  $\vec{w}_i$  les vecteurs position et vitesse de la particule de numéro  $i$ , et par  $\vec{X}_i$  la force d'origine extérieure qui lui est appliquée. La fonction de distribution simple attachée à cette particule est  $F(t, \vec{x}_i, \vec{w}_i)$ .

Lors d'une collision caractérisée par un paramètre d'impact  $b$  et par un angle  $\xi$  les vecteurs vitesse et position finale sont  $\vec{w}_i', \vec{x}_i'$ , les vecteurs vitesse et position initiale  $\vec{w}_i, \vec{x}_i$ . A ces derniers est attachée la fonction de distribution  $F(t, \vec{x}_i, \vec{w}_i)$ .

L'équation de Boltzmann pour un gaz dilué est établie en supposant les collisions locales et instantanées et en introduisant

l'hypothèse du chaos moléculaire, soit

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + \vec{w}_1 \cdot \frac{\partial F_1}{\partial \vec{x}_1} + \frac{\vec{X}_1}{m} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial \vec{w}_1} = \iiint [ F_2'(t, \vec{x}_1, \vec{w}_2') F_1'(t, \vec{x}_1, \vec{w}_1') - F(t, \vec{x}_1, \vec{w}_2) F(t, \vec{x}_1, \vec{w}_1) ] g b db d\varepsilon d\vec{w}_2 \quad (1)$$

la résolution de cette équation avec un potentiel interparticulaire réaliste, soit par exemple Lennard-Jones, Sutherland ou Hanley-Klein /13/, conduit à un bon accord avec l'expérience pour les coefficients de transport et notamment le coefficient de viscosité  $\mu_0$  aux faibles pressions.

Pour des gaz modérément denses, l'hypothèse des collisions locales n'est plus acceptable. Considérons deux sphères rigides de diamètre  $\sigma$ . Désignons par  $\vec{K}$  le vecteur unitaire joignant les centres des sphères, par  $\vec{x}_1$  et  $\vec{x}_2$  leurs vecteurs position lorsqu'elles sont en contact. On a (figure 1) :

$$\vec{x}_2 = \vec{x}_1 + \sigma \vec{K} \quad (2)$$

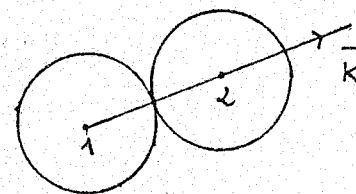


Figure 1.

et il faut tenir compte de cette relation dans l'établissement du terme de collision de l'équation cinétique.

En outre, la probabilité de collision est accrue par l'augmentation de densité d'un facteur  $\chi$  fonction du point de contact  $\vec{x}_1 + \frac{\sigma}{2} \vec{K}$  ou  $\vec{x}_1 - \frac{\sigma}{2} \vec{K}$  selon que la collision est directe ou inverse.

Enskog établit ainsi l'équation suivante dans laquelle  $\vec{g}$  désigne le vecteur vitesse relative  $\vec{w}_2 - \vec{w}_1$ .

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + \vec{w}_1 \cdot \frac{\partial F_1}{\partial \vec{x}_1} + \frac{\vec{x}_1}{m} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial \vec{w}_1} = \iiint [ \chi (\vec{x}_1 + \frac{\sigma}{2} \vec{K}) F_1' (t, \vec{x}_1, \vec{w}_1') - F_2' (t, \vec{x}_1 + \sigma \vec{K}, \vec{w}_2') - \chi (\vec{x}_1 - \frac{\sigma}{2} \vec{K}) F_1 (t, \vec{x}_1, \vec{w}_1) F_2 (t, \vec{x}_1 - \sigma \vec{K}, \vec{w}_2) ] \sigma^2 \vec{g} \cdot \vec{K} \frac{dK}{4\pi} d\vec{w}_2 \quad (3)$$

Après de longs calculs qui sont totalement explicités dans /1/, on obtient pour un gaz à densité particulaire uniforme  $n$ , pour lequel le facteur  $\chi$  ne dépend plus de la position, les expressions suivantes de la pression scalaire  $p$  et du coefficient de viscosité  $\mu$ .

$$p = n k_0 T \left( 1 + \frac{2}{3} \pi m \sigma^3 \chi \right) \quad (4)$$

$$\mu = \frac{k_0}{\chi} \left[ 1 + \frac{4}{5} \left( \frac{2}{3} \pi m \sigma^3 \chi \right) + 0,7614 \left( \frac{2}{3} \pi m \sigma^3 \chi \right)^2 \right] \quad (5)$$

$k_0$  désignant la constante de Boltzmann et  $T$  la température.

Pour la comparaison avec l'expérience il faut choisir  $\sigma$  et  $\chi$ . Une première possibilité consiste à utiliser les expressions de  $\mu_0$  et de  $\frac{p}{n k_0 T}$  correspondant au modèles des sphères dures, soit

$$\mu_0(\tau) = \frac{5}{16 \sqrt{\pi}} \frac{(m k_0 T)^{1/2}}{\sigma^2} \quad (6)$$

$$\frac{\mu}{n k_0 T} = 1 + \frac{2}{3} \pi m \sigma^3 + 0,625 \left( \frac{2}{3} \pi m \sigma^3 \right)^2 + 0,2869 \left( \frac{2}{3} \pi m \sigma^3 \right)^3 \quad (7)$$

$$= 1 + \frac{2}{3} \pi m \sigma^3 \chi \quad (8)$$

$\sigma$  est une fonction de la température déduite de (6) et  $\chi$  est obtenu en égalant (7) et (8).

Ce procédé utilisé par Sengers /14/ convient jusqu'à une limite de l'ordre de

$$\frac{2}{3} \pi m \sigma^3 = 0,4 \quad (9)$$

pour les gaz nobles.

Une autre méthode introduite par Michels et Gibson /15/ et inspirée par la formule (8) consiste à écrire :

$$\frac{2}{3} \pi m \sigma^3 \chi = \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\mu}{n k_0} \right) - 1 \quad (10)$$

L'équation d'état s'écrit d'autre part en utilisant le développement usuel :

$$\frac{p}{m K_0 T} = 1 + a_2(T) \frac{2}{3} \pi m \sigma^3 + a_3(T) \left( \frac{2}{3} \pi m \sigma^3 \right)^2 \quad (11)$$

d'où :

$$\frac{2}{3} \pi \sigma^3 \chi = \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial T} \left[ \frac{2}{3} \pi m \sigma^3 T a_2(T) + \left( \frac{2}{3} \pi m \sigma^3 \right)^2 T a_3(T) \right] \quad (12)$$

soit en passant à la limite  $n = 0$  :

$$\chi = \frac{\partial}{\partial T} (T a_2(T)) \quad (13)$$

on peut également écrire :

$$\frac{2}{3} \pi m \sigma^3 \chi = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial T} (pV) - 1 \quad (14)$$

$$\frac{pV}{RT} = 1 + \frac{B(T)}{V} + \frac{C(T)}{V^2} \quad (15)$$

d'où :

$$\frac{2}{3} \pi \sigma^3 = \frac{d}{dT} [TB(T)] \quad (16)$$

et  $\sigma$  étant ainsi déterminé, l'équation (14) donne  $\chi$

Les résultats obtenus sont satisfaisants jusqu'à  $\frac{2}{3} \pi m \sigma^3 \approx 0,6$

La méthode d'Enskog représente un remarquable effort de généralisation de l'équation de Boltzmann en dépit des difficultés liées à la détermination des quantités  $\sigma$  et  $\chi$ .

### III - THEORIE GENERALE DES GAZ DENSES /16/.

Le sujet mérite de larges développements. Nous tenterons de dégager quelques idées. Considérons un gaz de N molécules numérotées de 1 à N. La particule de numéro i est soumise à une force d'origine extérieure  $\vec{X}_i$  dérivant d'un potentiel  $\varphi_i$  et à des forces centrales d'interaction  $X_{ij}$  dérivant de potentiels  $\varphi_{ij}$ .

L'Hamiltonien des N particules est  $H_N$  avec :

$$H_N = \sum_{i=1}^{i=N} \left[ \frac{m \dot{w}_i^2}{2} + \varphi_i(\vec{x}_i) \right] + \sum_{1 \leq i < j \leq N} \varphi_{ij}(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|) \quad (17)$$

L'opérateur Hamiltonien associé  $\hat{H}_N$  est :

$$\hat{H}_N = \sum_{i=1}^{i=N} \left[ \vec{w}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}_i} + \frac{\vec{X}_i}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{w}_i} \right] + \sum_{1 \leq i < j \leq N} \left[ \frac{\vec{X}_{ij}}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{w}_i} + \frac{\vec{X}_{ij}}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{w}_j} \right] \quad (18)$$

$$\vec{X}_{ij} = - \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial \vec{x}_i} \quad (19)$$

$$\vec{X}_{ji} = - \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial \vec{x}_j} \quad (20)$$

La densité en phase est  $D_N(\vec{x}_1, \vec{w}_1, \dots, \vec{x}_1, \vec{w}_1, \dots, \vec{x}_N, \vec{w}_N)$ .

Elle satisfait à l'équation de Liouville qui prend l'une ou l'autre des deux formes condensées :

$$\frac{\partial D_N}{\partial t} = [H_N, D_N] \quad (21)$$

$$\frac{\partial D_N}{\partial t} = - \hat{H}_N D_N \quad (22)$$

$[H_N, D_N]$  désignant le crochet de Poisson de  $H_N$  et  $D_N$ .

Nous utiliserons deux types de fonction de distribution, les fonctions  $f_s$  et  $F_{12\dots s}$ .

Les premières sont définies par :

$$f_s = \frac{1}{V^{N-s}} \int D_N \frac{dw_{s+1}}{V} \frac{dx_{s+1}}{V} \dots \frac{dw_N}{V} \frac{dx_N}{V} \quad (23)$$

et satisfont au système B.B.G.K.Y. de la forme :

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} = [H_s, f_s] + \frac{N-s}{V} \int \left[ \sum_{i=1}^{s+1} \varphi_{i, s+1}, f_{s+1} \right] \frac{dw_{s+1}}{V} \frac{dx_{s+1}}{V}$$

Lorsque le nombre de particules est très élevé et la densité particulière  $n$  uniforme, la quantité  $\frac{N-s}{V}$  peut pour un volume grand être remplacée par  $n$ , d'où par exemple :

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \vec{w}_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{x}_1} + \frac{\vec{X}_2}{m} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{w}_1} = n \int \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial \vec{x}_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \vec{w}_1} \frac{d\vec{x}_2}{V} \frac{d\vec{w}_2}{V} \quad (25)$$

Les fonctions  $F_{12\dots s}$  seront définies au paragraphe suivant.

Considérons maintenant un essaim de  $s$  particules isolées et introduisons la fonction auxiliaire  $D_s(t, \vec{x}_1, \vec{w}_1, \dots, \vec{x}_s, \vec{w}_s)$  satisfaisant à l'équation :

$$\frac{\partial D_s}{\partial t} = - \hat{H}_s D_s \quad (26)$$

et à la condition :

$$\int D_s \frac{d\vec{x}_1}{V} \frac{d\vec{w}_1}{V} \dots \frac{d\vec{x}_s}{V} \frac{d\vec{w}_s}{V} = V^s \quad (27)$$

Introduisons l'opérateur déplacement :

$$\hat{S}_t^s = \exp [t \hat{H}_s] \quad (28)$$

Une autre forme de l'équation (26) est :

$$D_s(t) = \hat{S}_{-t}^s D_s(0) \quad (29)$$

Nous pouvons caractériser les corrélations initiales par une fonction  $\Gamma(0)$  telle que :

$$D_A(0) = \Gamma_A(0) \prod_{i=1}^A D_i(0, \vec{\alpha}_i, \vec{w}_i) \quad (30)$$

Nous définissons maintenant l'opérateur  $\hat{G}_S(t)$  :

$$\hat{G}_t^A = \hat{S}_{-t}^A \Gamma(0) \prod_{i=1}^A \hat{S}_t^i(\vec{\alpha}_i, \vec{w}_i) \quad (31)$$

Développons  $f_2(t)$  en fonction de la densité particulaire  $n$ , soit au premier ordre :

$$f_2(t) = f_2^0(t) + n f_2^1(t) \quad (32)$$

Utilisant l'opérateur  $\hat{G}_t^2$  et l'opérateur auxiliaire  $\hat{L}_t^3$  tel que :

$$\hat{L}_t^3 = \hat{G}_t^3(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3) - [\hat{G}_t^2(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{w}_1, \vec{w}_2)]$$

$$\begin{aligned} & \hat{G}_t^2(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_3, \vec{w}_1, \vec{w}_3) - [\hat{G}_t^2(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{w}_1, \vec{w}_2) \hat{G}_t^2(\vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \vec{w}_2, \vec{w}_3) \\ & + \hat{G}_t^2(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{w}_1, \vec{w}_2)] \end{aligned} \quad (33)$$

Ferziger et Kiper établissent les importantes équations /1/ :

$$f_2^0(t) = \hat{G}_t^2 f_1(t, \vec{\alpha}_1, \vec{w}_1) f_1(t, \vec{\alpha}_2, \vec{w}_2) \quad (34)$$

$$f_2^1(t) = \int \hat{L}_t^3 f_1(t, \vec{\alpha}_1, \vec{w}_1) f_1(t, \vec{\alpha}_2, \vec{w}_2) f_1(t, \vec{\alpha}_3, \vec{w}_3) d\vec{\alpha}_3 d\vec{w}_3 \quad (35)$$

A ce stade deux hypothèses sont introduites.

A partir d'un temps  $t$  supérieur au temps moyen d'une collision  $\tau$  l'influence des corrélations initiales s'est effacée. Il est donc loisible de prendre  $\Gamma_S(0)$  égal à l'unité.

Pour  $s$  égal ou supérieur à deux, l'opérateur  $\hat{G}_t^s$  peut être remplacé par  $\hat{G}_\infty^s$  avec une bonne approximation.

En utilisant les formules (34) et (35) la fonction  $f_2$  devient une fonctionnelle de  $f_1$  conformément aux idées de Bogoliubov /17/. Soit :

$$f_2(t, \vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{w}_1, \vec{w}_2) = \hat{G}_\infty^2(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{w}_1, \vec{w}_2) [f_1(t, \vec{\alpha}_1, \vec{w}_1)$$

$$f_1(t, \vec{\alpha}_2, \vec{w}_2)] + n \int [\hat{L}_\infty^3(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)]$$

$$f_1(t, \vec{\alpha}_1, \vec{w}_1) f_1(t, \vec{\alpha}_2, \vec{w}_2) f_1(t, \vec{\alpha}_3, \vec{w}_3) d\vec{\alpha}_3 d\vec{w}_3 \quad (36)$$

En reportant cette expression dans l'équation (25) une équation cinétique est obtenue. Au moyen de celle-ci Choch et Ullénbeck /2/ /3/ ont obtenu les deux premiers termes du développement du coefficient de viscosité en fonction de la densité particulaire  $n$  :

$$\mu = \mu^0 + n \mu^1 \quad (37)$$

Malheureusement, l'extension de la méthode à l'ordre supérieur conduit à des termes infinis ainsi que l'ont démontré Cohen et Dorfman /5//6/.

Aussi nous allons proposer une autre voie basée sur la relaxation linéaire autour du pseudo-équilibre local.

#### IV - LES METHODES DE RELAXATION.

Le caractère commun aux méthodes de généralisation de l'équation de Boltzmann est l'application à un certain instant de l'hypothèse du chaos moléculaire. Nous pensons que cette hypothèse est mal adaptée au cas des gaz denses et qu'elle n'est pas la seule valable pour les gaz dilués. Aussi avec J. Frey, nous avons proposé une nouvelle méthode basée sur une hypothèse de relaxation. En appliquant celle-ci à la première équation de BBGKY nous obtenons une équation cinétique contenant le terme réversible de Vlasov et le terme irréversible de BGK. En l'appliquant à la seconde équation de BBGKY nous obtenons une expression approchée de la fonction de distribution double. En reportant dans la première équation nous obtenons encore le terme réversible de Vlasov mais en outre un terme irréversible du type Fokker - Planck.

Ces méthodes nécessitent l'introduction de la notion de pseudo-équilibre local. Considérons un fluide à l'équilibre de densité particulière  $n$  et de température  $T$ . Il existe des fonctions de corrélation dépendant de  $n$  et de  $T$  dont des approximations peuvent être obtenues en résolvant des équations intégrales adaptées, par exemple, l'équation BGK ou l'équation P.Y.

Imaginons qu'on perturbe très légèrement le fluide pour obtenir un écoulement visqueux et cela sans modifier  $n$  et  $T$ .

Utilisons maintenant non plus les fonctions de distribution  $f_s$  mais les fonctions de distribution simple, double et triple  $F_1$ ,  $F_{12}$  et  $F_{123}$  définies par les relations :

$$F_1 = N \int D_N \frac{dx_2}{\omega_2} \frac{dw_2}{\omega_2} \dots \dots \frac{dx_N}{\omega_N} \frac{dw_N}{\omega_N} \quad (38)$$

$$F_{12} = N(N-1) \int D_N \frac{dx_3}{\omega_3} \frac{dw_3}{\omega_3} \dots \dots \frac{dx_N}{\omega_N} \frac{dw_N}{\omega_N} \quad (39)$$

$$F_{123} = N(N-1)(N-2) \int D_N \frac{dx_4}{\omega_4} \frac{dw_4}{\omega_4} \dots \dots \frac{dx_N}{\omega_N} \frac{dw_N}{\omega_N} \quad (40)$$

Ces fonctions satisfont aux deux premières équations de BBGKY :

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + \vec{\omega}_1 \cdot \frac{\partial F_1}{\partial \vec{x}_1} + \frac{\vec{X}_1}{m} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial \vec{\omega}_1} + \int \frac{\vec{X}_{12}}{m} \cdot \frac{\partial F_{12}}{\partial \vec{\omega}_1} \frac{dx_2}{\omega_2} \frac{dw_2}{\omega_2} = 0 \quad (41)$$

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial t} + \vec{\omega}_1 \cdot \frac{\partial F_{12}}{\partial \vec{x}_1} + \vec{\omega}_2 \cdot \frac{\partial F_{12}}{\partial \vec{x}_2} + \frac{(\vec{X}_1 + \vec{X}_{12})}{m} \cdot \frac{\partial F_{12}}{\partial \vec{\omega}_1} + \frac{(\vec{X}_2 + \vec{X}_{21})}{m} \cdot$$

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial \vec{\omega}_2} + \int \left[ \frac{\vec{X}_{13}}{m} \cdot \frac{\partial F_{123}}{\partial \vec{\omega}_1} + \frac{\vec{X}_{23}}{m} \cdot \frac{\partial F_{123}}{\partial \vec{\omega}_2} \right] \frac{dx_3}{\omega_3} \frac{dw_3}{\omega_3} = 0 \quad (42)$$

L'équilibre est caractérisé par les solutions suivantes dans lesquelles  $F^M$  désigne la distribution Maxwellienne,  $\Psi_{12}$  et  $\Psi_{123}$  les fonctions de corrélation de position double et triple.

$$F_1^0 = F^M \quad (43)$$

$$F_{12}^0 = F_1^M F_2^M \Psi_{12} \quad (44)$$

$$F_{123}^0 = F_1^M F_2^M F_3^M \Psi_{123} \quad (45)$$

$\Psi_{12}$  et  $\Psi_{123}$  sont liées par l'équation :

$$K_0 T \frac{\partial \Psi_{12}}{\partial x_1} = \overrightarrow{X}_{12} \Psi_{12} + m \int \overrightarrow{X}_{13} \Psi_{123} \frac{dx_3}{3} \quad (46)$$

Aux densités particulières faibles le dernier terme est négligeable d'où :

$$\Psi_{12} = e^{-\frac{\varphi_{12}}{K_0 T}} \quad (47)$$

Lorsqu'il n'en est plus ainsi pour obtenir une solution explicite approchée, on peut adopter l'hypothèse de Kirkwood :

$$\Psi_{123} = \Psi_{12} \Psi_{23} \Psi_{13} \quad (48)$$

puis remplacer  $\Psi_{23}$  et  $\Psi_{13}$  par les approximations (47).

Il vient après quelques calculs :

$$\Psi_{12} = \exp \left[ -\frac{\varphi_{12}}{K_0 T} + \frac{2\pi m}{x_{12}} \int_0^\infty \left[ e^{-\frac{\varphi_{13}}{K_0 T}} - 1 \right] \right. \\ \left. \int_{|x_{12} - x_{13}|}^{|x_{12} + x_{13}|} \left( e^{-\frac{\varphi_{23}}{K_0 T}} - 1 \right) x_{23} \frac{dx_{23}}{23} \right] x_{13} \frac{dx_{13}}{13} \quad (49)$$

Il nous paraît nécessaire qu'après une légère perturbation qui écarte le fluide de l'équilibre les fonctions  $F_{12}$  et  $F_{123}$  gardent la trace de cet équilibre et se mettent sous la forme d'un terme prin-

cipal de pseudo-équilibre local et d'un terme d'écart à ce pseudo-équilibre, soit :

$$F_{12} = F_1 F_2 \Psi_{12} + \chi_{12} \quad (50)$$

$$F_{123} = F_1 F_2 F_3 \Psi_{123} + \chi_{123} \quad (51)$$

L'irréversibilité est introduite en substituant à l'action des opérateurs intégraux du système BBGKY sur les fonctions  $\chi$  des termes de relaxation autour du pseudo-équilibre local. Ceux-ci contiennent des temps caractéristiques, soit  $\tau_1$  l'intervalle de temps moyen entre deux collisions pour BBGKY.1 et  $\tau_2$  la durée moyenne d'une collision pour BBGKY.2.

Ainsi est brisée la symétrie par rapport au temps de la dynamique Hamiltonienne. Toutefois, le calcul de  $\tau_1$  et de  $\tau_2$  est phénoménologique.

Aussi avec J.Frey et M. Valton /19/ nous avons proposé une hypothèse de fermeture plus générale exprimant  $F_{123}$  en fonction de  $F_i$  et de  $F_{jk}$ . Cette hypothèse d'une part introduit l'irréversibilité et d'autre part détermine  $\tau$  à partir du potentiel d'interaction.

Nous allons maintenant la reprendre et après un examen critique proposer une version modifiée.



V - HYPOTHESE F.S.V.

Elle ferme le système BBGKY au moyen de la relation :

$$F_{123} = F_{12} F_{13} \Psi_{123} + \left[ \frac{F_3}{m^3 \sigma^3} \left[ F_{12} - F_{12} F_{13} \Psi_{12} \right] \left[ \Psi_{13} \Psi_{23} m \sigma^3 + \alpha_0 \left( \frac{m}{K_0 T} \right)^{1/2} \right. \right. \\ \left. \left. \left( \frac{\vec{w}_1 - \vec{w}_3}{X_m} \cdot X_{13} + \frac{\vec{w}_2 - \vec{w}_3}{X_m} \cdot X_{23} \right) \right] \right] + \left[ \begin{array}{c} 1 \longrightarrow 2 \\ 2 \longrightarrow 3 \\ 3 \longrightarrow 1 \end{array} \right] + \\ \left[ \begin{array}{c} 2 \longrightarrow 3 \\ 3 \longrightarrow 1 \\ 1 \longrightarrow 2 \end{array} \right] \quad (52)$$

dans laquelle  $n_1$  désigne la densité particulière au point  $\vec{x}_1$ ,  $X_m$  la valeur moyenne de la force d'interaction et  $\alpha_0$  une constante de couplage.

Après de longs calculs, nous aboutissons pour le coefficient de viscosité  $\mu$  à l'expression :

$$\mu = \alpha_0 \frac{(m K_0 T)^{1/2}}{\sigma^2} \frac{\left[ \int_0^\infty \left( \frac{d\psi}{dx} \right)^2 x^2 dx \right]}{X_m \sigma \left[ - \int_0^\infty \frac{d\psi}{dx} \frac{d\psi}{dx} x^2 dx \right]} \quad (53)$$

$$x = x_{12} = |\vec{x}_2 - \vec{x}_1|$$

Le premier intérêt de cette formule est de donner pour un gaz dilué et un potentiel d'interaction de Sutherland, la formule très simple et bien vérifiée par l'expérience :

$$\mu_0 = \alpha_0 \frac{(m K_0 T)^{1/2}}{3 \sigma^2} e^{-\frac{T_i}{T}} \quad (54)$$

En outre, en choisissant pour  $\Psi_{12}$  l'expression approchée (49) il vient pour un gaz dense et à condition d'introduire un facteur de covolume  $\frac{1}{(1 - \frac{\pi}{2} m \sigma^3)}$  la formule suivante :

$$\mu = \mu_0 \frac{e^{\frac{5}{12} \pi m \sigma^3 (\beta_1 \frac{T_i}{T} - 1)}}{1 - \frac{\pi}{2} m \sigma^3} \quad (55)$$

$\beta_1$  est un coefficient obtenu au moyen d'une intégrale portant sur la partie attractive du potentiel de Sutherland. Elle est bien vérifiée par l'expérience (18) pour l'Argon dans le domaine 200 - 500 K - 1 - 500 bars.

Toutefois, les critiques suivantes peuvent être adressées à l'hypothèse F.S.V. :

a) La quantité  $X_m$  représente la valeur moyenne de la force d'interaction mais cette définition est impécise sauf pour un potentiel de Sutherland pour lequel la partie répulsive est considérée comme la limite d'un potentiel linéaire dont la pente tend vers l'infini. (Figure 2).

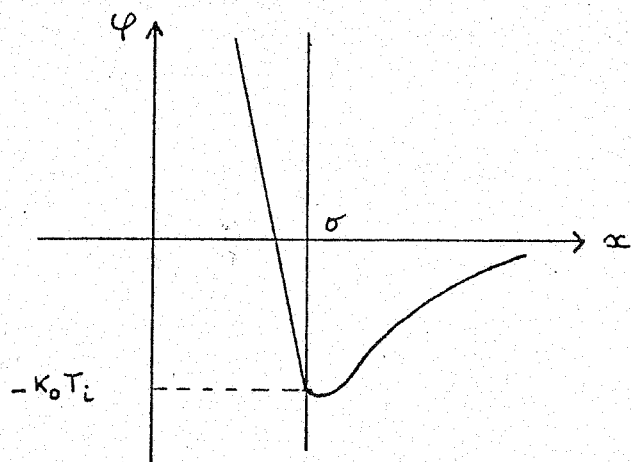


Figure 2.

$$0 \leq x \leq \sigma \quad \varphi = -E_m \left( \frac{x}{\sigma} - 1 \right) - K_0 T_i \quad (56)$$

$$\sigma \leq x \quad \varphi = -K_0 T_i h \left( \frac{x}{\sigma} \right) \quad h(1) = 1$$

$X_m$  est alors égal à  $\frac{E_m}{\sigma}$ . En revanche, dans le cas d'un potentiel de Lennard-Jones, la définition de  $X_m$  n'apparaît pas clairement. Le numérateur de l'expression (53) est infini pour ce même potentiel d'où la nécessité de lever la divergence pour une énergie correspondant à l'énergie d'excitation.

b) le facteur de covolume est introduit de manière phénoménologique. Aussi, nous allons proposer une version améliorée. En premier lieu, celle-ci n'est plus liée au choix du potentiel de Sutherland. En second lieu, la fonction de corrélation des vitesses est justifiée. Enfin, le coefficient  $B_1$  est lié à la température de Boyle du fluide.

## VI - L'HYPOTHESE F-S-V MODIFIÉE.

Le développement  $F_{123}$  exige un terme en  $F_1 F_2 F_3 C_{123}(\vec{x})$  puisque cette forme est celle de l'équilibre. Les autres termes doivent alors s'annuler ce qui est assuré par la présence de facteurs en  $[F_{ij} - F_i F_j C_{ij}(\vec{x})] C_{ij}(\vec{x})$  se confondant avec  $\Psi_{ij}(\vec{x})$  à l'équilibre et désignant hors d'équilibre les fonctions de corrélation de position.

Hors de l'équilibre et pour une faible perturbation de celui-ci, la quantité  $[F_{ij} - F_i F_j C_{ij}]$  peut être considérée comme petite devant  $F_i F_j C_{ij}$ . Il en est de même de  $n \sigma^3$  devant l'unité lorsque le gaz est peu dense. Il est évidemment nécessaire que lorsque la particule de numéro 3 s'éloigne beaucoup des particules de numéro un et deux on ait :

$$F_{123} = F_{12} F_3 \quad (57)$$

Ceci est assuré par la mise en facteur du terme  $F_3 C_{13} C_{23} n \sigma^3$ . En effet dans de telles conditions :

$$C_{13} = C_{23} = 1 \quad (58)$$

$$C_{13} = F_1 F_3 \quad (59)$$

$$C_{23} = F_2 F_3 \quad (60)$$

Dans une expression du type (52) il subsiste puisque  $X_{13}$  et  $X_{23}$  sont négligeables :

$$F_{123} = F_1 F_2 F_3 C_{123} + F_{12} F_3 - F_1 F_2 F_3 C_{12} \quad (61)$$

Mais dans cette situation :

$$C_{123} = C_{12} \quad (62)$$

La corrélation de position entre les particules de numéro un et deux est en effet indépendante de la position de la particule 3. Ceci est d'ailleurs bien traduit par l'hypothèse de Kirkwood à l'équilibre :

$$C_{123} = C_{12} C_{23} C_{13} \quad (63)$$

avec :

$$C_{13} = C_{23} = 1 \quad (64)$$

Il est également nécessaire d'introduire des corrélations de vitesse. Celles-ci sont liées aux vitesses relatives et aux forces d'interaction. En première approximation, il convient d'utiliser une forme linéaire. Nous choisissons pour celle-ci l'expression  $C_{ij}(\vec{x}_{ij}) \vec{x}_{ij} \cdot (\vec{w}_i - \vec{w}_j)$  soit le produit de la puissance mise en jeu par la force d'interaction  $\vec{x}_{ij} \cdot (\vec{w}_i - \vec{w}_j)$  par la corrélation de position correspondante  $C_{ij}$ . Il semble raisonnable que cette puissance corrélée intervienne.

Afin de rendre sans dimensions l'expression de ces corrélations de vitesse, nous divisons par le produit des valeurs moyennes, soit  $(\frac{k_0 T}{m})^{1/2} C X_2$ .

Mais cette valeur moyenne ne doit être calculée que sur la partie intense de l'interaction, c'est-à-dire la partie répulsive. En effet d'une part, ce point de vue est en accord avec les diverses hypothèses qui aboutissent à une équation du type Fokker-Planck et donnent un rôle privilégié aux collisions fortes et d'autre part l'expression  $C X_2$  n'a pas de sens si elle est prise sur une grande étendue.

Un exemple simple est obtenu avec l'expression  $C = e^{-\frac{\varphi}{k_0 T}}$ . En effet, pour une portée L grande, la valeur moyenne :

$$\left| \frac{1}{L} \int_0^\infty C_{12} X_{12} dx_{12} \right| = \left| \frac{1}{L} \int_0^\infty \frac{d\varphi_{12}}{dx_{12}} e^{-\frac{\varphi_{12}}{k_0 T}} dx_{12} \right| = \frac{k_0 T}{L}$$

En revanche,  $l_r$  désignant l'étendue de la zone répulsive, la quantité

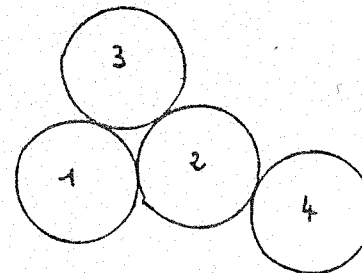
$$\left| \frac{1}{l_r} \int_0^{l_r} C_{12} X_{12} dx_{12} \right| = \frac{k_0 T}{l_r} \quad (66)$$

a une signification physique précise.

Nous avons choisi un terme de corrélation de vitesse linéaire en  $X_{12}$ . Il semble que celui-ci soit adapté au cas d'un gaz ni très dense ni très chaud pour lequel la notion de collision binaire garde un sens. Lorsque des interactions multiples entrent en jeu, il faudrait prolonger le développement ce qui conduirait à des calculs inextricables.

Aussi nous introduirons un facteur de densité  $(1 - \frac{\pi}{2} n \sigma^3)$  que nous pouvons justifier ainsi.

Considérons trois sphères dures en interaction afin que le développement en  $F_{123}$  relatif aux corrélations de vitesse joue un rôle. En toute rigueur, il faut ajouter un terme intégral portant sur la quatrième particule. Ce terme n'intervient que



lorsque la particule 4 est au contact d'une des trois autres et son expression est très complexe. Nous allons proposer une approximation. Le centre de la particule 4 est à la distance  $\sigma/2$  de la particule en interaction et à une distance moyenne  $\ell = \frac{1}{\pi n \sigma^2}$  d'une particule du fluide éloignée de l'essaim. Le rapport  $\frac{\sigma}{2\ell} = \frac{\pi}{2} n \sigma^3$  est représentatif de l'influence de cette

particule de numéro 4. Nous multiplions le développement de  $F_{123}$  par  $1 + \pi/2 n \sigma^3$ . La particule de numéro 5 multiplie  $\pi/2 n \sigma^3$  par  $1 + \pi/2 n \sigma^3$  d'où une progression géométrique de raison  $\pi/2 n \sigma^3$  et de somme  $\frac{1}{1 - \pi/2 n \sigma^3}$ .

Il faudra conforter ce terme par une analyse plus fine des facteurs d'occupation, mais face à un problème à n corps inextricable, il apporte une solution approximative mais simple et raisonnable.

Nous multiplions enfin par  $\frac{16}{15\sqrt{\pi}}$  pour retrouver dans le cas d'un gaz dilué de sphères dures, le résultat obtenu au moyen de l'équation de Boltzmann pour la viscosité.

L'hypothèse de fermeture F-S-V prend ainsi la forme :

$$F_{123} = F_1 F_2 F_3 C_{123} + \left[ C_{ik} C_{jk} F_k (F_{ij} - F_i F_j C_{ij}) \right] + \frac{16}{15\sqrt{\pi}} \left[ \frac{F_k (F_{ij} - F_i F_j C_{ij})}{m_k \sigma^3} \left( \frac{(\vec{w}_i - \vec{w}_k) \cdot \vec{X}_{ik} C_{ik} + (\vec{w}_j - \vec{w}_k) \cdot \vec{X}_{jk} C_{jk}}{\left(\frac{k_B T}{m}\right)^{1/2} \bar{X} C_2 (1 - \frac{\pi}{2} n_k \sigma^3)} \right) \right]_{ijk} \quad (67)$$

les crochets du genre  $\langle \quad \quad \quad \rangle_{ijk}$  signifiant qu'on effectue les mêmes permutations que dans l'équation (52).

#### VII - PSEUDO-EQUILIBRE LOCAL ET CONDITIONS D'ADIABATICITE.

Nous supposons le fluide isotherme et peu écarté de l'équilibre. Cela signifie que la fonction de distribution peut être convenablement approximée par un développement de Grad et que les fonctions de corrélation de position  $C_{ij}$  et  $C_{ijk}$  sont très proches des fonctions  $\Psi_{ij}$  et  $\Psi_{ijk}$  correspondant à un équilibre à la température T et à la densité particulière  $n = \frac{n_1 + n_2 + n_3}{3}$

$$C_{ij} = \Psi_{ij} (1 + \varepsilon_{ij}) \quad (68)$$

$$C_{ijk} = \Psi_{ijk} (1 + \varepsilon_{ijk}) \quad (69)$$

avec en moyenne quadratique :

$$\overline{\varepsilon_{ij}}, \overline{\varepsilon_{ijk}} \ll 1 \quad (70)$$

Le système des deux premières équations de B.B.G.K.Y. s'écrit en utilisant la condition de fermeture (67) au premier ordre :

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + \omega_{1p} \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_{1p}} + \frac{X_{1p}}{m} \frac{\partial F_1}{\partial \omega_{1p}} + \left( \frac{X_{12p}}{m} \frac{\partial F_{12}}{\partial \omega_{1p}} \frac{dx_2 d\omega_2}{\dots} \right) = 0 \quad (71)$$

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial t} + \omega_{1p} \frac{\partial F_{12}}{\partial \alpha_{1p}} + \omega_{2p} \frac{\partial F_{12}}{\partial \alpha_{2p}} + \frac{(X_{1p} + X_{12p})}{m} \frac{\partial F_{12}}{\partial \omega_{1p}} +$$

$$\frac{(X_{2p} + X_{21p})}{m} \frac{\partial F_{12}}{\partial \omega_{2p}} + \left[ \frac{X_{13p}}{m} \frac{\partial}{\partial \omega_{1p}} + \frac{X_{23p}}{m} \frac{\partial}{\partial \omega_{2p}} \right]$$

$$\left[ F_1 F_2 F_3 \Psi_{123} + \left[ \Psi_{ik} \Psi_{jk} F_k (F_{ij} - F_i F_j \Psi_{ij}) \right]_{ijk} \right] +$$

$$\frac{16}{15\sqrt{\pi}} \left[ \frac{F_k (F_{ij} - F_i F_j \Psi_{ij})}{m_k \sigma^3} \left( \frac{(\vec{\omega}_i - \vec{\omega}_k) \cdot \vec{X}_{ik} \Psi_{ik} + (\vec{\omega}_j - \vec{\omega}_k) \cdot \vec{X}_{jk} \Psi_{jk}}{(k_0 T)^{1/2} \overline{X C}_2 (1 - \frac{\pi}{2} m_k \sigma^3)} \right) \right] \frac{dx_2 d\omega_2}{\dots}$$

$$= 0 \quad (72)$$

Posons :

$$\hat{D}_{12} = \frac{\partial}{\partial t} + \omega_{1p} \frac{\partial}{\partial \alpha_{1p}} + \omega_{2p} \frac{\partial}{\partial \alpha_{2p}} + \frac{(X_{1p} + X_{12p})}{m} \frac{\partial}{\partial \omega_{1p}} +$$

$$\frac{(X_{2p} + X_{21p})}{m} \frac{\partial}{\partial \omega_{2p}} \quad (73)$$

$$\hat{I}_3 = \int \left[ \frac{X_{13p}}{m} \frac{\partial}{\partial \omega_{1p}} + \frac{X_{23p}}{m} \frac{\partial}{\partial \omega_{2p}} \right] \dots \frac{dx_3 d\omega_3}{\dots} \quad (74)$$

$$F_{ij} - F_i F_j \Psi_{ij} = g_{ij} \quad (75)$$

L'équation (72) s'écrit :

$$\hat{D}_{12} F_1 F_2 \Psi_{12} + \hat{D}_{12} g_{12} + \hat{I}_3 \left[ F_1 F_2 F_3 \Psi_{123} + \left[ \Psi_{ik} \Psi_{jk} g_{jk} F_k \right]_{ijk} \right]$$

$$+ \frac{16}{15\sqrt{\pi}} \left( \frac{m}{k_0 T} \right)^{1/2} \frac{1}{\overline{X C}_2} \hat{I}_3 \left[ \frac{g_{12} F_3}{m_3 \sigma^3} \left( \frac{(\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_3) \cdot \vec{X}_{13} \Psi_{13} + (\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_3) \cdot \vec{X}_{23} \Psi_{23}}{1 - \frac{\pi}{2} m_3 \sigma^3} \right) \right]$$

$$+ \frac{16}{15\sqrt{\pi}} \left( \frac{m}{k_0 T} \right)^{1/2} \frac{1}{\overline{X C}_2} \hat{I}_3 \left[ \frac{g_{23} F_1}{m_1 \sigma^3} \left( \frac{(\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1) \cdot \vec{X}_{21} \Psi_{12} + (\vec{\omega}_3 - \vec{\omega}_1) \cdot \vec{X}_{31} \Psi_{13}}{1 - \frac{\pi}{2} m_1 \sigma^3} \right) \right]$$

$$+ \frac{16}{15\sqrt{\pi}} \left( \frac{m}{k_0 T} \right)^{1/2} \frac{1}{\overline{X C}_2} \hat{I}_3 \left[ \frac{g_{31} F_2}{m_2 \sigma^3} \left( \frac{(\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2) \cdot \vec{X}_{12} \Psi_{12} + (\vec{\omega}_3 - \vec{\omega}_2) \cdot \vec{X}_{32} \Psi_{23}}{1 - \frac{\pi}{2} m_2 \sigma^3} \right) \right] \quad (76)$$

Nous remarquons que :

$$\hat{I}_3 g_{12} F(\vec{w}_1 - \vec{w}_3) \cdot \vec{X}_{13} \Psi_{13} = \int \left[ \frac{X_{13f}}{m} \frac{\partial}{\partial w_{1f}} + \frac{X_{23f}}{m} \frac{\partial}{\partial w_{2f}} \right] \left[ (\vec{w}_{1q} - \vec{w}_{3q}) \cdot \vec{X}_{13} \Psi_{13} \right] F_3 g_{12} \frac{dx_3}{-3} \frac{dw_3}{-3} \quad (77)$$

$$= g_{12} \int \frac{X_{13}^2}{m} \Psi_{13} F_3 \frac{dx_3}{-3} \frac{dw_3}{-3} + \int \left[ (\vec{w}_{1q} - \vec{w}_{3q}) \cdot \vec{X}_{13} \Psi_{13} \right] F_3 g_{12} \frac{dx_3}{-3} \frac{dw_3}{-3} \quad (78)$$

$$= g_{12} \left[ \frac{X_{13}^2}{m} \Psi_{13} F_3 \frac{dx_3}{-3} \frac{dw_3}{-3} \right] + \hat{I}_3 g_{12} \quad (79)$$

$$\hat{I}_3 = \int \left[ (\vec{w}_{1q} - \vec{w}_{3q}) \cdot \vec{X}_{13} \Psi_{13} \right] \left[ \frac{X_{13f}}{m} \frac{\partial}{\partial w_{1f}} + \frac{X_{23f}}{m} \frac{\partial}{\partial w_{2f}} \right] \dots F_3 \frac{dx_3}{-3} \frac{dw_3}{-3} \quad (80)$$

Posons :

$$\frac{16}{15\sqrt{\pi}} \left( \frac{m}{k_0 T} \right)^{1/2} \frac{1}{X C_2} \int \frac{X_{13}^2 \Psi_{13} F_3 \frac{dx_3}{-3} \frac{dw_3}{-3}}{m m_3 \sigma^3 \left( 1 - \frac{\pi}{2} m_3 \sigma^3 \right)} = \frac{1}{\tau_2} \quad (81)$$

$\tau_2$  a les dimensions d'un temps.

L'équation (76) s'écrit en isolant le terme en  $g_{12}$  :

$$g_{12} = -\tau_2 \left[ \hat{D}_{12} F F \Psi_{12} + \hat{I}_3 F F F \Psi_{123} + \hat{D}_{12} g_{12} + \hat{D}_{12} \left[ \Psi_{ik} \Psi_{jk} g_{ij} F_k \right]_{ij} + \frac{16}{15\sqrt{\pi}} \left( \frac{m}{k_0 T} \right)^{1/2} \frac{1}{X C_2} \left[ \frac{1}{m_3 \sigma^3 \left( 1 - \frac{\pi}{2} m_3 \sigma^3 \right)} \right] \hat{I}_3 g_{12} + \frac{16}{15\sqrt{\pi}} \left( \frac{m}{k_0 T} \right)^{1/2} \frac{1}{X C_2} \hat{I}_3 \left[ \frac{g_{23} F_1 \left( (\vec{w}_2 - \vec{w}_1) \cdot \vec{X}_{21} \Psi_{12} + (\vec{w}_3 - \vec{w}_1) \cdot \vec{X}_{31} \Psi_{13} \right)}{m_1 \sigma^3 \left( 1 - \frac{\pi}{2} m_1 \sigma^3 \right)} \right] + \frac{16}{15\sqrt{\pi}} \left( \frac{m}{k_0 T} \right)^{1/2} \frac{1}{X C_2} \hat{I}_3 \left[ \frac{g_{31} F_2 \left( (\vec{w}_1 - \vec{w}_2) \cdot \vec{X}_{12} \Psi_{12} + (\vec{w}_3 - \vec{w}_2) \cdot \vec{X}_{32} \Psi_{23} \right)}{m_2 \sigma^3 \left( 1 - \frac{\pi}{2} m_2 \sigma^3 \right)} \right] \right] \quad (82)$$

Il a été montré dans /9/ que  $\tau_2$  est un temps de l'ordre de la durée d'une collision au sens de la durée moyenne de passage dans la zone répulsive du potentiel d'interaction.

Désignons par  $\tau_1$  l'intervalle de temps moyen entre deux collisions. On a :

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} \lll 1 \quad (83)$$

Utilisons la variable sans dimensions :

$$\tilde{t} = \frac{t}{\tau_1} \quad (84)$$

et cherchons pour  $g_{12}$  un développement du type :

$$g_{12} = \frac{\tau_2}{\tau_1} \left[ g_{12}^0 + \frac{\tau_2}{\tau_1} g_{12}^1 + \dots \right] \quad (85)$$

Il vient au premier ordre :

$$g_{12} = F_{12} - F_1 F_2 \Psi_{12} = -\tau_2 \left[ \hat{D}_{12} F_1 F_2 \Psi_{12} + \hat{I}_3 F_1 F_2 F_3 \Psi_{123} \right] \quad (86)$$

Nous constatons que  $g_{12}$  et par suite  $F_{12}$  sont devenus des fonctionnelles de  $F_i$ . On dit encore que la condition d'adiabaticité est satisfaite mais la structure de  $F_{12}$  est profondément différente des formes obtenues en essayant de généraliser l'équation de Boltzmann.

Posons :

$$\hat{D}_i = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{w}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}_i} + \frac{\vec{X}_i}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{w}_i} \quad (87)$$

$$\hat{I}_{ij} = \int \frac{\vec{X}_{ij}}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{w}_i} \dots \frac{dx_j}{m} \frac{dw_j}{m} \quad (88)$$

Il vient :

$$F_{12} = F_1 F_2 \Psi_{12} - \tau_2 \Psi_{12} \left[ F_2 \hat{D}_1 F_1 + F_1 \hat{D}_2 F_2 + \frac{\vec{X}_{12}}{m} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial \vec{w}_1} F_2 + \frac{\vec{X}_{21}}{m} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial \vec{w}_2} F_1 + \hat{I}_3 F_1 F_2 F_3 \Psi_{123} \right] \quad (89)$$

soit encore :

$$F_{12} = F_1 F_2 \Psi_{12} - \tau_2 \Psi_{12} \left[ F_2 \hat{D}_1 F_1 + F_1 \hat{D}_2 F_2 \right] - \tau_2 F_2 \frac{\partial F_1}{\partial \vec{w}_1} \cdot \left[ \frac{\vec{X}_{12}}{m} + \int \frac{\vec{X}_{13}}{m} F_3 \Psi_{123} \frac{dx_3}{m} \frac{dw_3}{m} \right] - \tau_2 F_1 \frac{\partial F_2}{\partial \vec{w}_2} \cdot \left[ \frac{\vec{X}_{21}}{m} + \int \frac{\vec{X}_{23}}{m} F_3 \Psi_{123} \frac{dx_3}{m} \frac{dw_3}{m} \right] - \tau_2 F_1 F_2 \left[ \frac{\partial \Psi_{12}}{\partial t} + \vec{w}_1 \cdot \frac{\partial \Psi_{12}}{\partial \vec{x}_1} + \vec{w}_2 \cdot \frac{\partial \Psi_{12}}{\partial \vec{x}_2} \right] \quad (90)$$

Comme d'après (46) :

$$k_0 T \frac{\partial \Psi_{12}}{\partial \vec{w}_1} = \vec{X}_{12} \Psi_{12} + \int \vec{X}_{13} F_3 \Psi_{123} \frac{dx_3}{m} \quad (91)$$

$F_{12}$  prend la forme finale :

$$F_{12} = F_1 F_2 \Psi_{12} - \tau_2 \Psi_{12} \left[ F_2 \hat{D}_1 F_1 + F_1 \hat{D}_2 F_2 \right] - \tau_2 F_1 F_2 \frac{\partial \Psi_{12}}{\partial t} - \tau_2 F_2 \frac{\partial \Psi_{12}}{\partial \vec{x}_1} \cdot \left[ \vec{w}_1 F_1 + \frac{k_0 T}{m} \frac{\partial F_1}{\partial \vec{w}_1} \right] - \tau_2 F_1 \frac{\partial \Psi_{12}}{\partial \vec{x}_2} \cdot \left[ \vec{w}_2 F_2 + \frac{k_0 T}{m} \frac{\partial F_2}{\partial \vec{w}_2} \right] \quad (92)$$

L'équation cinétique gouvernant  $F_1$  s'écrit :

$$\hat{D}_1 F_1 + \hat{I}_{12} F_{12} = 0 \quad (93)$$

soit en explicitant :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F_1}{\partial t} + \vec{w}_1 \cdot \frac{\partial F_1}{\partial \vec{\alpha}_1} + \frac{\vec{X}_1}{m} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial \vec{w}_1} + \int \frac{\vec{X}_{12}}{m} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial \vec{w}_1} m_2 \Psi_{12} d\vec{x}_{12} = \\ & \tau_2 \int \frac{\vec{X}_{12}}{m} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial \vec{w}_1} m_2 \frac{\partial \Psi_{12}}{\partial t} d\vec{x}_{12} + \tau_2 \int \frac{\vec{X}_{12}}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{w}_1} \\ & \left[ \frac{\partial F_1}{\partial t} + \vec{w}_1 \cdot \frac{\partial F_1}{\partial \vec{\alpha}_1} + \frac{\vec{X}_1}{m} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial \vec{w}_1} \right] \Psi_{12} m_2 d\vec{x}_{12} + \tau_2 \int \frac{\vec{X}_{12}}{m} \cdot \\ & \frac{\partial F_1}{\partial \vec{w}_1} \Psi_{12} \left[ \frac{\partial m_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{\alpha}_2} (m_2 \vec{v}_2) \right] d\vec{x}_{12} + \tau_2 \int m_2 \frac{\vec{X}_{12}}{m} \cdot \\ & \frac{\partial}{\partial \vec{w}_1} \left[ \frac{\partial \Psi_{12}}{\partial \vec{\alpha}_1} \cdot (\vec{w}_1 F_1 + \frac{k_0 T}{m} \frac{\partial F_1}{\partial \vec{w}_1}) \right] d\vec{x}_{12} + \tau_2 \\ & \int \left( \frac{\vec{X}_{12}}{m} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial \vec{w}_1} \right) \left( \frac{\partial \Psi_{12}}{\partial \vec{\alpha}_2} \cdot m_2 \vec{v}_2 \right) d\vec{x}_{12} \end{aligned} \quad (94)$$

La conservation des particules entraîne :

$$\frac{\partial m_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{\alpha}_2} (m_2 \vec{v}_2) = 0 \quad (95)$$

En outre, nous pouvons faire apparaître la quantité

$$\int \frac{\vec{X}_{12}}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{w}_1} \left[ F_1 - \tau_2 \left( \frac{\partial F_1}{\partial t} + \vec{w}_1 \cdot \frac{\partial F_1}{\partial \vec{\alpha}_1} + \frac{\vec{X}_1}{m} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial \vec{w}_1} \right) \right] m_2 \Psi_{12} d\vec{x}_{12}$$

puis effectuer le changement de variable  $t = \tau_1 \tilde{t}$  afin de montrer que le terme  $F_1$  est d'un ordre supérieur aux autres.

Nous obtenons ainsi l'équation cinétique :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F_1}{\partial t} + \vec{w}_1 \cdot \frac{\partial F_1}{\partial \vec{\alpha}_1} + \left[ \frac{\vec{X}_1}{m} + \int \frac{\vec{X}_{12}}{m} \Psi_{12} m_2 d\vec{x}_{12} \right] \cdot \frac{\partial F_1}{\partial \vec{w}_1} = \\ & \tau_2 \int \frac{\vec{X}_{12}}{m} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial \vec{w}_1} m_2 \left[ \frac{\partial \Psi_{12}}{\partial t} + \vec{v}_2 \cdot \frac{\partial \Psi_{12}}{\partial \vec{\alpha}_2} \right] d\vec{x}_{12} + \\ & \tau_2 \int m_2 \frac{\vec{X}_{12}}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{w}_1} \left[ \frac{\partial \Psi_{12}}{\partial \vec{\alpha}_1} \cdot (\vec{w}_1 F_1 + \frac{k_0 T}{m} \frac{\partial F_1}{\partial \vec{w}_1}) \right] d\vec{x}_{12} \end{aligned} \quad (96)$$

Lorsque les quantités macroscopiques  $n_2$  et  $\vec{v}_2$  varient peu à l'échelle de la zone d'interaction, il est possible de ne conserver que le premier terme du développement Taylorien autour de  $n_1$  et  $\vec{v}_1$ .  $\Psi_{12}$  peut également être considéré comme une fonction de  $|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|$



L'équation (96) se simplifie et prend la forme Fokker-Planck - Frey-Salmon :

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + \vec{w}_1 \cdot \frac{\partial F_1}{\partial \vec{x}_1} + \frac{\vec{X}_1}{m} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial \vec{w}_1} = \frac{m k_0 T}{m} \zeta_2 B \left[ 3 F_1 + (\vec{w}_1 - \vec{v}_1) \right]$$

$$\left[ \frac{\partial F_1}{\partial \vec{w}_1} + \frac{k_0 T}{m} \Delta_1 F_1 \right] \quad (97)$$

avec :

$$B = - \frac{8\pi}{3k_0 T} \int_0^\infty \frac{d\psi}{dx} \frac{d\psi}{dx} x^2 dx \quad (98)$$

Cette équation cinétique apporte pour le coefficient de viscosité l'expression suivante :

$$\mu = \frac{m}{\zeta_2 B} = - \frac{5}{16\sqrt{\pi}} \frac{(m k_0 T)^{1/2}}{\sigma^2} \frac{\left[ \int_0^\infty \psi(x) \left( \frac{d\psi}{dx} \right)^2 x^2 dx \right]}{\overline{X C_2} \sigma \left[ \int_0^\infty x^2 \frac{d\psi}{dx} \frac{d\psi}{dx} dx \right] \left[ 1 - \frac{\pi}{2} m \sigma^3 \right]} \quad (99)$$

Les intégrales sont maintenant convergentes pour les potentiels usuels.

### III - APPLICATION AUX GAZ DILUES.

La fonction  $\Psi_{12}$  prend la forme simple :

$$\Psi = e^{-\frac{\psi}{k_0 T}} \quad (100)$$

d'où pour le coefficient de viscosité, l'expression

$$\mu = \mu_0 = \frac{5}{16\sqrt{\pi} \sigma^2} \frac{(m k_0 T)^{1/2}}{\left( \overline{X C_2} \frac{\sigma}{k_0 T} \right)} \quad (101)$$

Désignons par  $x_m$  l'abscisse du fonds du puits de potentiel et par  $-k_0 T_i$  la valeur de celui-ci en ce point :

$$\overline{X C_2} = \left| \frac{1}{x_m} \int_0^{x_m} e^{-\frac{\psi}{k_0 T}} \frac{d\psi}{dx_{12}} dx_{12} \right| = \frac{k_0 T}{x_m} e^{-\frac{T_i}{T}} \quad (102)$$

d'où l'expression finale :

$$\mu = \frac{5}{16\sqrt{\pi} \sigma^2} (m k_0 T)^{1/2} \frac{x_m}{\sigma} e^{-\frac{T_i}{T}} \quad (103)$$

Ce résultat montre que le coefficient de viscosité d'un gaz dilué ne dépend pas de manière fine de la forme du potentiel d'interaction, mais seulement du diamètre  $\sigma$  de la molécule, du rapport entre l'abscisse du fonds du puits de potentiel  $x_m$  et  $\sigma$ , enfin de la valeur du potentiel en  $x_m$ . Il est donc aisé de trouver des lois réduites. /20/.

### IX - APPLICATION AUX GAZ DENSES.

L'application de la formule (99) exige qu'on ait préalablement résolu une équation intégrale donnant  $\Psi_{12}(x = x_{12}, n, T)$ .

On peut obtenir une première approximation en utilisant la formule (49) :

$$\Psi(x = x_{12}, n, T) = \left[ \exp - \frac{\varphi_{12}}{k_0 T} + \frac{2\pi n}{\alpha_{12}} \int_0^\infty \left[ e^{-\frac{\varphi_{13}}{k_0 T}} - 1 \right] \right. \\ \left. \int_{|x_{13} - x_{12}|}^{|x_{13} + x_{12}|} \left( e^{-\frac{\varphi_{23}}{k_0 T}} - 1 \right) \alpha_{23} \frac{dx_{23}}{\alpha_{23}} \right] \alpha_{13} \frac{dx_{13}}{\alpha_{13}} \quad (49)$$

La détermination de  $\mu$  exige le calcul d'intégrales triples pour un potentiel réaliste.

Il existe toutefois un potentiel qui représente assez bien l'interaction et conduit à de grandes simplifications. Il s'agit du potentiel de Sutherland (figure 4) dont la partie répulsive peut être considérée comme la limite d'un potentiel oblique linéaire.

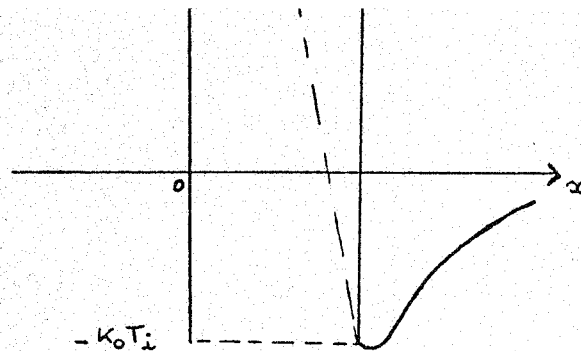


Figure 4.

$$x \leq \sigma \quad \varphi = -E_m \left( \frac{x}{\sigma} - 1 \right) - k_0 T_i$$

$$x \gg \sigma \quad \varphi = -k_0 T_i h(x) \quad x = \sigma \quad h = 1 \quad x > \sigma \quad (104)$$

Dans les diverses intégrales de la formule (99) la partie répulsive est dominante et dans la formule (49) à l'intérieur de cette partie répulsive, le terme  $\varphi_{12}$  est dominant.

D'où :

$$\frac{1}{k_0^2 T^2} \int_0^\infty \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 \Psi(x) \alpha^2 dx = \frac{1}{k_0^2 T^2} \left[ \int_0^\sigma \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 \Psi(x) \alpha^2 dx + \int_\sigma^\infty \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 \Psi(x) \alpha^2 dx \right] \\ = \frac{1}{k_0^2 T^2} \int_0^\sigma \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 e^{-\frac{\varphi}{k_0 T}} \alpha^2 dx \\ = \frac{k_0 T \sigma}{E_m} e^{-\frac{(E_m - k_0 T_i)}{k_0 T}} \left[ e^{\frac{E_m}{k_0 T}} \left( \frac{E_m^2}{k_0^2 T^2} - 2 \frac{E_m}{k_0 T} + 2 \right) - 2 \right] \\ = \frac{E_m \sigma}{k_0 T} e^{\frac{T_i}{T}} \quad E_m \rightarrow \infty \quad (105)$$

La quantité  $\overline{XC_n}$  est calculée sur la partie répulsive et nous avons montré que :

$$\overline{XC_n} = \frac{k_0 T}{\sigma} e^{-\frac{T_i}{T}} \quad (106)$$

D'autre part, décomposons l'intégrale suivante en trois parties :

$$\int_0^{\infty} x^2 \frac{d\psi}{dx} \frac{d\psi}{dx} dx = \left[ \int_0^{\sigma-\epsilon} + \int_{\sigma-\epsilon}^{\sigma+\epsilon} + \int_{\sigma+\epsilon}^{\infty} \right] \quad (107)$$

$$= E_m \sigma \Psi(\sigma) \quad (108)$$

L'expression du coefficient de viscosité devient :

$$\mu = \frac{5}{16 \sqrt{\pi}} \frac{(m k_0 T)^{1/2}}{\sigma^2} \left[ \frac{1}{\Psi(\sigma) (1 - \frac{\pi}{2} m \sigma^3)} \right] \quad (109)$$

Pour  $\Psi(\sigma)$  nous allons utiliser la formule approchée (49) avec :

$$\tilde{x} = \frac{x}{\sigma} \quad \tilde{x}_{13} = \frac{x_{13}}{\sigma} \quad \tilde{x}_{23} = \frac{x_{23}}{\sigma} \quad x > \sigma$$

$$\psi = \psi_a = -k_0 T_i h(\tilde{x})$$

Il vient :

$$\Psi(\sigma) = \exp \left[ \frac{T_i}{T} + 2\pi m \sigma^3 \int_0^{\infty} \left[ e^{-\frac{\psi_{13}}{k_0 T}} - 1 \right] \right. \\ \left. \left[ \frac{|1 + \tilde{x}_{13}|}{|1 - \tilde{x}_{13}|} \left( e^{-\frac{\psi_{23}}{k_0 T}} - 1 \right) \tilde{x}_{23} d\tilde{x}_{23} \right] \tilde{x}_{13} d\tilde{x}_{13} \right] \quad (111)$$

Au premier ordre en  $\frac{T_i}{T}$  nous obtenons :

$$\Psi(\sigma) = \exp \left[ \frac{T_i}{T} + 2\pi m \sigma^3 \left[ \frac{5}{24} - \frac{T_i}{T} \left( \int_0^1 \left( \int_1^{1+\tilde{x}_{13}} h(\tilde{x}_{23}) \right. \right. \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. \tilde{x}_{23} d\tilde{x}_{23} \right) \tilde{x}_{13} d\tilde{x}_{13} + \int_{-1}^2 \left( \int_{\tilde{x}_{13}^{-1}}^1 \tilde{x}_{23} d\tilde{x}_{23} \right) h(\tilde{x}_{13}) \tilde{x}_{13} \right. \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. \left. \tilde{x}_{13} d\tilde{x}_{13} \right) \right] \right] \quad (112)$$

$$\Psi(\sigma) = \exp \left[ \frac{T_i}{T} + \frac{5}{12\pi m \sigma^3} \left( 1 - \beta_1 \frac{T_i}{T} \right) \right] \quad (113)$$

Il est naturel que ce terme ne joue aucun rôle à la température de Boyle  $T_B$  pour laquelle le gaz est proche de l'état parfait. La partie attractive du potentiel peut donc être choisie de telle manière que :

$$\beta_1 T_i = T_B \quad (114)$$

La formule du coefficient de viscosité prend la forme simple :

$$\mu = \frac{5}{16\sqrt{\pi}} \frac{(m k_0 T)^{1/2}}{\sigma^2} e^{-\frac{T_i}{T}} \left[ e^{\frac{\frac{5}{12} \pi m \sigma^3 (\frac{T_B}{T} - 1)}{1 - \frac{\pi}{2} m \sigma^3}} \right]$$

(115)

La comparaison avec l'expérience est faite à partir des données de H.J.M. Hanley, R.D. Mc. Carty, W.M. Haynes.\*

Aux faibles pressions, l'écart entre la théorie et l'expérience est en moyenne meilleur que 1% - 200 à 550 K. On retrouve une loi en  $\sqrt{T} e^{-\frac{T_i}{T}}$  qui conduit pour des températures très supérieures à  $T_1$  à des formules de Sutherland. Au voisinage de la température de Boyle, l'écart est de l'ordre de 1 à 2% pour l'Argon jusqu'à 500 bars et pour l'azote atteint 3% à 200 bars et 5% à 350 bars. Au delà de 200 bars pour l'Argon et de 250 bars pour l'azote,  $\mu$  présente un minimum en fonction de la température dont la théorie rend compte. L'écart relatif moyen total est de 1,2% pour l'Argon et de 1,9% pour l'azote.

\* Cryogenics Division, National Bureau of Standards, Boulder, Colorado 80302.

"The viscosity and Thermal Conductivity Coefficients for dense, gaseous and liquid Argon, Krypton, Xenon, Nitrogen, and Oxygen. J. of Phys. and Chem. Ref. Data., 1974, Vol.3, n°4, pp.979 - 1017.

## CONCLUSION.

Nous avons introduit l'irréversibilité en imposant à  $F_{123}$  un développement en fonction de  $F_1, F_{ij}$  et de termes exprimant les corrélations de position et de vitesse entre particules. Nous avons choisi comme petit paramètre le rapport entre la durée d'une collision et l'intervalle de temps entre deux collisions et nous avons obtenu au premier ordre une expression de  $F_{12}$  en fonction de  $F_1$  et de  $F_2$  qui conduit à une équation cinétique contenant entre autres un terme du type Vlasov et un terme du type Fokker-Planck.

Nous en avons déduit une expression du coefficient de viscosité qui se présente comme un rapport d'intégrales simples fonction du potentiel interparticulaire  $\varphi$  et de la fonction de corrélation de position  $\Psi_{12}$ . Celle-ci ne peut être obtenue (sauf pour les pressions faibles) qu'en résolvant une équation intégrale adaptée.

En revanche, pour un potentiel de Sutherland et une certaine forme approchée de  $\Psi_{12}$  de remarquables simplifications s'introduisent et mènent à une formule explicite d'une application très aisée ne dépendant que du diamètre des molécules  $\sigma$ , de la profondeur du puits de potentiel  $-K_0 T_1$ , de la température de Boyle  $T_B$  et bien entendu de la température  $T$  et de la densité particulaire  $n$ . L'écart moyen entre la théorie et l'expérience est dans le domaine 200-500 K et 1-500 bars de 1,5% pour l'Argon et dans le domaine 250-550 K et 1-350 bars de 2% pour l'azote.

Nous remercions Monsieur Laigle pour l'exécution des calculs et d'utiles discussions.

BIBLIOGRAPHIE

---

- /1/ FERZIGER -KIPER; Mathematical theory of transport processus in gases - Ed. North-Holland Publishing Company 1972.
- /2/ S.T. CHOCH , The kinetic theory of phenomena in dense gases, - PHD Dissertation University of Michigan, 1958.
- /3/ S.T. CHOCH et G.E. UHLENBECK, US Government Technical report, document number PB 138 502.
- /4/ M.S. GREEN, Physica 24-393, 1958.
- /5/ E.G.D. COHEN et J.R. DORFMAN, On the density expansion of the pair distribution function for a dense gas, Physics Letters, 16-124, 1965.
- /6/ E.G.D. COHEN et J.R. DORFMAN, Difficulties in the kinetic theory of dense gases, J. Math. Phys. 8 - 282, 1967.
- /7/ J. WEINSTOCK, Phys. Rev. /2/, 132-454, 1963.
- /8/ J. FREY et J. SALMON, Nuovo Cimento, t-51 B, X, p.437, 1967.
- /9/ J. FREY, Etablissement d'une nouvelle équation cinétique, Thèse, Paris, Février 1970.
- /10/ J. FREY et J. SALMON, Modern Developments in Thermodynamics, John Wiley, 1974, p.391.
- /11/ M. VALTON, Thèse, Orsay, 1974.
- /12/ P. HOFFMANN, Thèse de troisième cycle, Orsay, 1974.
- /13/ H.J.M. HANLEY, M. KLEIN, On the utility of the m-6-8 potential function, NBS (USA), technical note 628, Nov.72.
- /14/ J.V. SENGERS, Thermal conductivity and viscosity of simple fluids. Heat and Mass Transfer. 8, 1103.1116.  
Density expansion of the viscosity of a moderately dense gas, Phys.Rev.Letters 15, 515-517.
- /15/ A. MICHELS, R.O. GIBSON, 1931, The viscosity of N<sub>2</sub> to 1000 Atm., Proc. Roy. Soc. A 134, 288-307.
- /16/ S.G. BRUSCH, Kinetic theory, Volume 3, Pergamon Press, 1972.
- /17/ BOGOLIUBOV, 1946, Problems of a dynamical theory in statistical physics (Russian). Ed. J de Boer and G.E. Uhlenbeck . English translation in : Studies in statistical mechanics.1.
- /18/ D. BHATNAGAR, F. GROSS and M. KROOK, Phys. Rev. t.94, 1954, p.511.
- /19/ J. FREY, J. SALMON et M. VALTON, Journal of Statistical Physics, 11, n°6, 1974
- /20/ J. KESTIN, S. T. RO and W. WKAHAM, Physica 58, 165, (1972).

VISCOSITE DE L'ARGON

$m = 6.6334 \cdot 10^{-26}$   $n$  en  $10^{21} m^{-3}$   $D = 310 \cdot 10^{-10}$   $K = 1.3805 \cdot 10^{-23}$   
 $T_B = 4.44 K$   $\mu$  en  $10^{-5}$  Decapoise  $T_i = 105 K$   $\epsilon$  Coef. de dilatation = 0.012937

T	1 REF	10 BAR	50 BAR	100 BAR	200 BAR	300 BAR	500 BAR
250	$\mu$	1.3727	2.12667	5.138611	10.54212	12.59588	15.41734
	$\mu_{exp}$	1.45833	2.48276	2.417207	4.272498	5.672949	8.027118
	$\Delta\mu/\mu$	0.05673	0.22576	0.05524	0.21261	0.04467	0.02150
250	$\mu$	1.27358	1.54538	3.426374	6.72507	9.63972	12.81525
	$\mu_{exp}$	1.28534	2.45977	2.434768	3.129602	4.022630	5.581729
	$\Delta\mu/\mu$	0.02267	0.58000	0.00000	0.14337	0.12592	0.22335
300	$\mu$	1.24287	1.24076	2.52777	5.66560	7.27320	10.44714
	$\mu_{exp}$	2.31934	2.43474	2.649023	3.113617	3.640576	4.709937
	$\Delta\mu/\mu$	0.05508	0.21079	0.02951	0.04600	0.06200	0.08700
350	$\mu$	1.62670	1.64359	2.09465	4.13226	5.37039	6.86778
	$\mu_{exp}$	2.60864	2.736099	2.888541	3.231550	3.67949	4.15577
	$\Delta\mu/\mu$	0.00075	0.01572	0.02382	0.01832	0.06785	0.02678
400	$\mu$	1.8141	1.9048	1.80067	3.52307	5.02815	7.71411
	$\mu_{exp}$	2.85965	3.05442	3.127624	3.401421	3.657521	4.317451
	$\Delta\mu/\mu$	0.02624	0.11476	0.01745	0.01456	0.00906	0.01924
450	$\mu$	1.9169	1.9279	1.58520	3.15279	4.46938	6.83774
	$\mu_{exp}$	3.16920	3.251759	3.359797	3.589550	3.82887	4.344853
	$\Delta\mu/\mu$	0.05025	0.00000	0.011547	0.01077	0.08059	0.04260
500	$\mu$	1.01448	1.7187	1.41951	2.75201	3.59661	6.15818
	$\mu_{exp}$	3.359401	3.685791	3.523402	3.781955	3.959755	4.424286
	$\Delta\mu/\mu$	0.00836	0.00513	0.05974	0.09507	0.00000	0.04700

Avec  $\mu = \frac{5}{16\sqrt{\pi}} \left( m k_B T \right)^{1/2} e^{-\left( \frac{1}{T} + \frac{5}{12} \pi m \sigma^3 \left( 1 - \frac{T_B}{T} \right) \right)}$   $\gamma \Rightarrow TB = 411 K$   
 $\gamma = \frac{1}{1 - 5/12 \pi m \sigma^3} \Rightarrow \gamma = 1$   $T_i = 105 K$

VISCOSITE DE L'AZOTE NOIF 648

$m = 6.65 \cdot 10^{-26}$   $n$  en  $10^{21}$   $D = 3.160 \cdot 10^{-10}$   $K = 1.3805 \cdot 10^{-23}$   
 $T_B = 326 K$   $\mu$  en  $10^{-5}$   $T_i = 95.8 K$   $\epsilon$  Coef. de dilatation = 0.0190

T	1 REF	10.342 BAR	51.710 BAR	103.421 BAR	206.842 BAR	275.789 BAR	364.737 BAR
250.00	$\mu$	0.302029	1.547505	3.125312	5.929602	7.369071	9.512310
	$\mu_{exp}$	1.527860	1.684156	1.876826	2.326801	2.635540	2.946727
	$\Delta\mu/\mu$	0.02733	0.015019	0.016785	0.059827	0.051346	0.021654
277.78	$\mu$	0.026432	1.366377	2.724834	5.168680	6.501311	7.603228
	$\mu_{exp}$	1.572881	1.809326	1.869265	2.306645	2.582122	2.930719
	$\Delta\mu/\mu$	1.696507	1.711380	1.934613	0.048523	0.054813	0.063191
305.56	$\mu$	0.026022	1.245457	2.528350	4.603968	5.826387	6.873280
	$\mu_{exp}$	1.830642	1.831171	2.068881	2.372128	2.502931	2.794270
	$\Delta\mu/\mu$	0.01327	0.007729	0.017522	0.040168	0.055109	0.052013
333.33	$\mu$	0.027018	1.116035	2.192202	4.163181	5.292646	6.277684
	$\mu_{exp}$	1.960104	1.959642	2.170855	2.532697	2.614633	2.797409
	$\Delta\mu/\mu$	0.004860	0.002518	0.002067	0.012908	0.012908	0.012908
368.89	$\mu$	0.018867	0.922112	1.643009	3.061244	4.075580	4.714139
	$\mu_{exp}$	2.102807	2.100185	2.274130	2.567642	2.740278	2.979029
	$\Delta\mu/\mu$	2.410824	0.001974	0.000292	0.003116	0.017204	0.026689
500.00	$\mu$	0.016673	0.732775	1.431659	2.710081	3.495163	4.211390
	$\mu_{exp}$	2.613574	2.682276	2.754657	2.803385	3.006775	3.107642
	$\Delta\mu/\mu$	0.002140	0.003067	0.004103	0.015881	0.019373	0.027823
555.56	$\mu$	0.013206	0.655084	1.287521	2.451077	3.158714	3.815308
	$\mu_{exp}$	2.807998	2.819129	2.932960	3.066048	3.153154	3.243167
	$\Delta\mu/\mu$	0.001650	0.002073	0.002636	0.004636	0.005381	0.005969