

SUR LA THÉORIE QUANTIQUE DU RAYONNEMENT <sup>(1)</sup>

par M. Albert EINSTEIN

La ressemblance formelle de la courbe de répartition spectrale du rayonnement thermique avec la loi de répartition des vitesses de Maxwell est trop frappante pour qu'elle ait pu rester longtemps cachée. En fait Wien, déjà, dans l'important travail théorique dans lequel il a établi sa loi de déplacement

$$(1) \quad \rho = \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right)$$

avait été conduit par cette similitude à une meilleure détermination de la formule du rayonnement. On sait qu'il a trouvé en même temps la formule

$$(2) \quad \rho = \alpha \nu^3 e^{-\frac{h\nu}{kT}}$$

qui est encore considérée aujourd'hui comme exacte en tant que loi limite pour les grandes valeurs de  $\frac{\nu}{T}$  (formule du rayonnement de Wien). Aujourd'hui nous savons qu'aucune considération fondée sur la mécanique et l'électrodynamique classiques ne peut fournir une formule de rayonnement utilisable, mais que la théorie classique conduit nécessairement à la formule de Rayleigh

$$(3) \quad \rho = \frac{k\alpha}{h} \nu^2 T$$

(1) Publié en premier dans les "Mitteilungen der Physikalischen Gesellschaft Zürich". N° 18, 1916, puis dans le "Physikalische Zeitschrift", 18, 121(1917).

La traduction française est de MM. Michel Dembno-Tchaïkovsky et Daniel Fargue. Elle est publiée avec l'aimable autorisation de M. Otto Nathan, exécuteur testamentaire d'Einstein.

Lorsqu'ensuite Planck, dans son étude fondamentale, a fondé sa formule du rayonnement

$$(4) \quad \rho = \alpha \nu^3 \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

sur l'hypothèse d'éléments d'énergie discrets, dont est sortie rapidement la théorie des quanta, toutes les considérations de Wien qui avaient conduit à la formule (2) sont naturellement retombées dans l'oubli.

Il y a peu, j'ai trouvé une démonstration de la formule du rayonnement de Planck, apparentée aux considérations initiales de Wien (1), et s'appuyant sur l'hypothèse fondamentale de la théorie des quanta ; dans cette démonstration ressort clairement la liaison entre la courbe de Maxwell et celle de la répartition spectrale. Cette démonstration mérite attention, non seulement par sa simplicité, mais aussi et surtout parce qu'elle paraît nous apporter une certaine clarté sur le phénomène, qui est pour nous encore si obscur, de l'émission et de l'absorption du rayonnement par la matière. En prenant pour bases quelques hypothèses, voisines au point de vue de la théorie quantique, sur l'émission et l'absorption du rayonnement par les molécules, j'ai montré que des molécules, dont les états étaient distribués selon l'équilibre thermique au sens de la théorie quantique, sont en équilibre dynamique avec le rayonnement de Planck ; cela conduit à la formule de Planck (4) d'une manière étonnamment simple et générale. Cette formule résulte alors de la condition que la répartition des états de l'énergie interne des molécules, exigée par la théorie quantique, ne doit s'établir que par l'absorption et l'émission du rayonnement.

Si les hypothèses introduites sur les interactions entre rayonnement et matière sont justes, alors elles doivent fournir encore plus que la répartition statistique exacte de l'énergie interne des molécules. En même temps que l'absorption et l'émission

(1) Verh. d. Deutschen physikal. Gesellschaft N° 13/14, 1916, p. 318  
Dans la présente étude les réflexions données dans le mémoire précédent sont reprises.

de rayonnement, a lieu aussi un transfert d'impulsion à la molécule ; ceci signifie que, grâce à la seule interaction entre rayonnement et molécules, s'instaure une distribution de vitesses précise de ces dernières. Celle-ci doit manifestement être la même que celle que les molécules acquièrent par la seule action de leurs collisions mutuelles, c'est-à-dire qu'elle doit être en accord avec la distribution de Maxwell. Il faudra exiger que l'énergie cinétique moyenne qu'une molécule acquiert (par degré de liberté) dans un champ de rayonnement de Planck à la température T soit égale à  $kT/2$  ; ceci doit être vrai indépendamment de la nature de la molécule considérée et des fréquences absorbées ou émises par elle. Dans ce mémoire, nous allons montrer qu'en fait on satisfera tout-à-fait généralement à cette importante exigence. Ceci apporte un nouveau soutien aux hypothèses simples que nous faisons sur les processus élémentaires d'émission et d'absorption.

Afin d'arriver au résultat dont nous parlons, il faut compléter un peu les hypothèses posées précédemment, qui se rapportent exclusivement à un échange d'énergie. D'où la question : la molécule reçoit-elle une poussée quand l'énergie  $\epsilon$  est absorbée ou émise ? Considérons, du point de vue de l'électrodynamique classique, par exemple l'émission de rayonnement. Quant un corps rayonne une énergie  $\epsilon$ , il reçoit une poussée de recul (impulsion)  $\epsilon/c$ , si tout le rayonnement  $\epsilon$  est émis dans la même direction. Mais si le rayonnement résulte d'un processus symétrique dans l'espace, par exemple une onde sphérique, alors aucun recul ne se fait sentir. Cette alternative joue aussi un rôle dans la théorie quantique du rayonnement. Si une molécule reçoit ou émet une énergie  $\epsilon$  sous forme de rayonnement lors d'une transition d'un état quantiquement admissible à un autre, on peut concevoir un tel processus élémentaire comme étant partiellement ou complètement orienté dans l'espace, ou aussi comme symétrique (non orienté). Il se trouve que nous ne parviendrons à une théorie sans contradiction que si chaque processus élémentaire est compris comme étant complètement orienté ; c'est en cela que consiste le principal résultat des considérations qui suivent.

## I - Hypothèse fondamentale de la théorie quantique

### Distribution canonique des états

D'après la théorie des quanta, une molécule d'une nature déterminée, abstraction faite de son orientation et de son mouvement de translation, ne peut avoir qu'une suite discrète d'états

$Z_1, Z_2 \dots Z_n \dots$  dont l'énergie (interne) est  $\epsilon_1, \epsilon_2 \dots \epsilon_n \dots$ . Si

des molécules de cette sorte appartiennent à un gaz à une température  $T$ , alors la fréquence relative  $W_n$  de ces états  $Z_n$  est donnée

par la formule correspondant à la répartition canonique des états de la mécanique statistique

$$(5) \quad W_n = p_n e^{-\frac{\epsilon_n}{kT}}$$

Dans cette formule  $k = \frac{R}{N}$  est la constante bien connue de Boltzmann,

$p_n$  est un nombre indépendant de  $T$  caractéristique de la molécule et de son  $n$ -ième état quantique et qu'on peut considérer comme le "poids" statistique de cet état. La formule (5) peut être obtenue à partir du principe de Boltzmann ou par un chemin purement thermodynamique. L'égalité (5) est l'expression de la plus grande généralisation de la loi de distribution des vitesses de Maxwell.

Les derniers progrès se rapportant aux principes de la théorie quantique concernent la découverte théorique des états quantiques possibles  $Z_n$  et de leurs poids  $p_n$ . Pour la présente étude de principe, une détermination plus précise des états quantiques n'est pas nécessaire.

## II - Hypothèses sur l'échange d'énergie par rayonnement

Soient  $Z_n$  et  $Z_m$  deux états, possibles au sens de la théorie quantique, d'une molécule d'un gaz dont les énergies  $\epsilon_n$  et  $\epsilon_m$  satisfont l'inégalité  $\epsilon_m > \epsilon_n$ . Supposons que la molécule soit susceptible de passer de l'état  $Z_n$  à l'état  $Z_m$  par absorption de l'énergie de rayonnement  $\epsilon_m - \epsilon_n$ ; de même supposons qu'une

transition de l'état  $Z_m$  à l'état  $Z_n$  soit possible par émission de cette énergie. Soit alors  $\nu$  la fréquence, caractéristique de la combinaison d'indices  $(m, n)$  considérée, du rayonnement reçu ou émis par la molécule.

Nous introduisons quelques hypothèses sur les lois valables pour ces transitions, hypothèses que nous avons réussi à établir par transposition des rapports connus d'après la théorie classique pour un résonateur de Planck, à ceux encore inconnus de la théorie quantique.

### a) Emission spontanée (Ausstrahlung)

Comme on sait, selon Hertz, un résonateur de Planck se trouvant en vibration rayonne de l'énergie, indépendamment du fait qu'il soit ou non excité par un champ extérieur. Conformément à cela supposons qu'une molécule puisse passer de l'état  $Z_m$  à l'état  $Z_n$  par émission de l'énergie rayonnante  $\epsilon_m - \epsilon_n$  de fréquence  $\nu$ , sans excitation par une cause externe. La probabilité  $dW$  pour que cela ait vraiment lieu pendant l'élément de temps  $dt$  est :

$$(A) \quad dW = A_m^n dt$$

où  $A_m^n$  représente une constante caractéristique de la combinaison d'indices considérée.

La loi statistique ainsi proposée correspond à celle d'une réaction radioactive, et le processus élémentaire supposé, à celui d'une telle réaction, dans laquelle seuls des rayons  $\gamma$  sont émis. Il n'est pas nécessaire d'admettre que la durée de cette transition est nulle; cette durée doit seulement être négligeable devant celle pendant laquelle la molécule reste dans les états  $Z_1, Z_2$  etc..

### b) Processus induits (Einstrahlung)

Si un résonateur de Planck se trouve dans un champ de rayonnement, alors l'énergie du résonateur change du fait d'un transfert de travail du champ électromagnétique du rayonnement au résonateur; suivant les phases du résonateur et du champ oscillant, ce travail peut être positif ou négatif. En conséquence

nous introduisons l'hypothèse quantique suivante. Sous l'action de la densité de rayonnement  $\rho$  à la fréquence  $\nu$ , une molécule peut passer de l'état  $Z_n$  à l'état  $Z_m$  en même temps qu'elle absorbe l'énergie rayonnante  $\epsilon_m - \epsilon_n$  selon la loi de probabilité :

$$(B) \quad dW = B_n^m \rho dt .$$

De même un passage  $Z_m \rightarrow Z_n$  peut se produire sous l'influence du rayonnement, à l'occasion de quoi l'énergie rayonnante  $\epsilon_m - \epsilon_n$  est libérée, conformément à la loi de probabilité :

$$(B') \quad dW = B_m^n \rho dt .$$

$B_n^m$  et  $B_m^n$  sont des constantes. Nous appelons ces deux processus "changements d'état induits (Einstrahlung) par le rayonnement".

On peut alors se demander quelle impulsion est transférée à la molécule par cette modification d'état. Commençons par les processus induits par le rayonnement (Einstrahlung). Si un faisceau de rayons venant d'une direction déterminée fournit du travail à un résonateur de Planck, l'énergie correspondante sera retirée au faisceau. A ce transfert d'énergie correspond aussi, d'après la loi de conservation de l'impulsion, un transfert d'impulsion du faisceau de rayons au résonateur. Ce dernier subit de la sorte l'action d'une force dans la direction du rayon du faisceau. Si l'énergie transférée est négative, l'action sur le résonateur est de sens contraire. Dans le cas de l'hypothèse quantique, ceci signifie manifestement ce qui suit. Si l'irradiation par un faisceau de rayons produit le passage  $Z_n \rightarrow Z_m$ , alors une impulsion  $\frac{\epsilon_m - \epsilon_n}{c}$  est transférée à la molécule dans le sens de la propagation du faisceau. Pour le processus  $Z_m \rightarrow Z_n$  l'impulsion transférée est de même valeur mais de direction opposée. Dans le cas où la molécule est exposée simultanément à plusieurs faisceaux de rayons, nous supposons que l'énergie totale  $\epsilon_m - \epsilon_n$  d'un processus élémentaire sera prise ou ajoutée à l'un de ces faisceaux de rayons, de sorte que dans ce cas également l'impulsion  $\frac{\epsilon_m - \epsilon_n}{c}$  sera transférée à la molécule.

Lors d'une cession d'énergie par émission spontanée (Ausstrahlung), dans le cas d'un résonateur de Planck, aucune impulsion n'est transmise au résonateur dans l'ensemble, car, d'après la théorie classique, le rayonnement a lieu sous forme d'onde sphérique. Mais nous avons déjà remarqué que nous ne pouvons aboutir à une théorie sans contradiction que si nous supposons que le processus d'émission est un processus orienté. Alors, dans tout processus élémentaire d'émission spontanée (Ausstrahlung)

$Z_m \rightarrow Z_n$  une impulsion de valeur  $\frac{\epsilon_m - \epsilon_n}{c}$  est transférée à la molécule. Si la molécule est isotrope, nous devons considérer toutes les directions d'émission comme également probables. Si la molécule n'est pas isotrope, nous arrivons à la même conclusion si au cours du temps l'orientation change suivant les lois du hasard. Une telle supposition doit par ailleurs être également faite pour les lois statistiques (B) et (B') des processus induits car sinon les constantes  $B_n^m$  et  $B_m^n$  devraient dépendre de la direction, ce que nous pouvons éviter par cette hypothèse de l'isotropie ou de la pseudo-isotropie (par la formation d'une moyenne temporelle) de la molécule.

### III - Démonstration de la loi de rayonnement de Planck

Nous cherchons maintenant la densité effective de rayonnement qui doit régner afin que l'échange d'énergie entre le rayonnement et les molécules, régi par les lois statistiques (A), (B) et (B'), ne dérange pas la distribution des états de la molécule, donnée par (5). Pour cela il faut et il suffit que, par unité de temps, il y ait en moyenne autant de processus élémentaires du type (B) que des types (A) et (B'). En vertu de (5), (A), (B) et (B'), cette condition fournit, pour les processus élémentaires correspondant aux combinaisons d'indices  $m$  et  $n$ , l'égalité :

$$p_n e^{-\frac{\epsilon_n}{kT}} B_n^m \rho = p_m e^{-\frac{\epsilon_m}{kT}} \left( B_m^n \rho + A_m^n \right)$$

Si nous voulons en outre que  $\rho$  croisse indéfiniment avec  $T$ , ce que nous supposons, alors, entre les constantes

$B_n^m$  et  $B_m^n$  doit exister la relation :

$$(6) \quad p_n B_n^m = p_m B_m^n$$

Nous obtenons alors comme condition de l'équilibre dynamique, à partir de notre égalité :

$$(7) \quad \rho = \frac{\frac{A_m^n}{B_m^n}}{e^{\frac{\epsilon_m - \epsilon_n}{kT}} - 1}$$

C'est la façon dont la densité de rayonnement doit dépendre de la température, d'après la loi de Planck. De la loi de déplacement de Wien (1), on déduit alors immédiatement qu'on doit avoir

$$(8) \quad \frac{A_m^n}{B_m^n} = \alpha \nu^3$$

et

$$(9) \quad \epsilon_m - \epsilon_n = h \nu$$

où  $\alpha$  et  $h$  sont des constantes universelles. Pour trouver la valeur numérique de la constante  $\alpha$  il faudrait avoir une théorie exacte des processus électrodynamiques et mécaniques ; on en est réduit pour le moment à utiliser le cas limite de Rayleigh des hautes températures, pour lesquelles la théorie classique est valable à la limite.

L'égalité (9) constitue, on le sait, la deuxième règle principale de la théorie spectrale de Bohr, dont on peut déjà affirmer, après sa généralisation par Sommerfeld et Epstein, qu'elle fait partie des acquisitions sûres de notre science. Elle contient aussi implicitement, comme je l'ai montré, la loi d'équivalence photochimique.

#### IV - Méthode de calcul du mouvement des molécules dans le champ de rayonnement

Nous nous tournons maintenant vers l'étude des mouvements

que nos molécules accomplissent sous l'influence du rayonnement. Nous nous servons pour cela d'une méthode bien connue en théorie du mouvement brownien et que j'ai utilisée maintes fois pour l'examen des mouvements dans un espace avec rayonnement. Pour simplifier le calcul, nous l'appliquerons seulement dans le cas où les mouvements ne se font que dans une direction, celle de la coordonnée X. En outre nous nous contenterons de calculer la valeur moyenne de l'énergie cinétique du mouvement de translation et renoncerons aussi à faire la preuve que ces vitesses  $v$  se répartissent d'après la loi de Maxwell. Supposons la masse  $M$  des molécules suffisamment grande pour que les puissances élevées de  $\frac{v}{c}$  puissent être négligées devant celles qui sont plus faibles ; nous pouvons alors appliquer à la molécule la mécanique habituelle. Nous pourrions en outre, sans vraiment restreindre la généralité, raisonner comme si les états d'indices  $m$  et  $n$  étaient les seuls que puisse prendre la molécule.

L'impulsion  $M v$  d'une molécule subit, pendant une courte durée  $\tau$ , deux sortes de modifications. Bien que le rayonnement soit homogène dans toutes les directions, la molécule subira du fait de son mouvement une force venant du rayonnement et agissant en sens contraire de son mouvement. Soit  $R v$  cette force, où  $R$  est une constante qui sera calculée plus loin. Cette force amènerait la molécule au repos si l'irrégularité de l'influence du rayonnement n'avait pour conséquence que, dans l'intervalle du temps  $\tau$ , une impulsion  $\Delta$ , de signe et de valeur variables, est transférée à la molécule ; cette influence non systématique maintiendra, à l'encontre de la précédente, un certain mouvement de la molécule. A la fin de l'intervalle de temps  $\tau$  considéré, la valeur de l'impulsion de la molécule sera

$$M v - R v \tau + \Delta$$

Comme la répartition des vitesses doit rester constante dans le temps, cette grandeur doit être, en ce qui concerne la moyenne de sa valeur absolue, aussi grande que la grandeur  $M v$  ; les valeurs moyennes des carrés des deux grandeurs, étendues à une longue durée ou à un grand nombre de molécules, doivent être alors égales :

$$(M v - R v \tau + \Delta)^2 = (M v)^2$$

Comme nous n'avons pris en compte que l'influence systématique de  $v$  sur l'impulsion de la molécule, nous devons négliger la valeur moyenne  $\overline{v\Delta}$ . En développant le membre de gauche de l'égalité, on obtient alors :

$$(10) \quad \overline{\Delta^2} = 2 R M \overline{v^2} \tau .$$

La valeur moyenne  $\overline{v^2}$ , que le rayonnement à la température  $T$  engendre chez les molécules par son interaction avec elles, doit

être la même que la valeur moyenne  $\overline{v^2}$  que possède une molécule du gaz d'après les lois de la théorie cinétique des gaz, à la température  $T$ . Car sinon la présence de nos molécules troublerait l'équilibre thermique entre le rayonnement calorifique et un gaz quelconque à la même température. On a donc

$$(11) \quad \frac{M \overline{v^2}}{2} = \frac{kT}{2}$$

L'égalité (10) devient ainsi :

$$(12) \quad \frac{\overline{\Delta^2}}{\tau} = 2 R k T .$$

L'étude devra être conduite maintenant de la façon suivante.

Pour un rayonnement  $[\rho(v)]$  donné,  $\overline{\Delta^2}$  et  $R$  sont calculables grâce à nos hypothèses sur l'interaction entre le rayonnement et les molécules. Introduisant les résultats dans (12), cette relation doit être identiquement vérifiée quand  $\rho$  est exprimée en fonction de  $v$  et de  $T$  suivant la relation de Planck.

#### V - Calcul de R

Soit une molécule de l'espèce considérée qui se déplace uniformément le long de l'axe des  $X$  du système de coordonnées  $K$  avec la vitesse  $v$ . Nous nous demandons quelle sera l'impulsion transférée en moyenne par unité de temps à la molécule par le rayonnement. Pour pouvoir la calculer, nous devons considérer le rayonnement à partir d'un système de coordonnées  $K'$  qui est au repos par rapport à la molécule considérée. Car nos hypothèses sur l'émission et l'absorption ont été formulées seulement pour des molécules au repos. Le passage au système  $K'$  a été maintes fois

donné dans la littérature, en particulier dans la thèse de Mosengeil soutenue à Berlin. Pour être complet, je vais néanmoins en répéter ici les raisonnements fondamentaux.

Relativement à  $K$ , le rayonnement est isotrope, c'est-à-dire que le rayonnement associé à un certain angle solide  $d\kappa$ , autour de la direction de rayonnement, dans le domaine de fréquence  $dv$  est, par unité de volume :

$$(13) \quad \rho dv \frac{d\kappa}{4\pi} ,$$

où  $\rho$  dépend seulement de la fréquence  $v$  et non de la direction. A ce rayonnement particulier correspond, relativement au système de coordonnées  $K'$ , un rayonnement caractérisé de même par un domaine de fréquences  $dv'$  et par un certain angle solide  $d\kappa'$ . La densité en volume de ce rayonnement est :

$$(13') \quad \rho'(v', \phi') dv' \frac{d\kappa'}{4\pi} .$$

Ceci définit  $\rho'$ . Cette densité dépend de la direction, définie comme d'habitude par l'angle  $\phi'$  avec l'axe  $X'$  et par l'angle  $\psi'$  de la projection  $Y' - Z'$  avec l'axe  $Y'$ . A ces angles correspondent les angles  $\phi$  et  $\psi$ , qui d'une façon analogue déterminent la direction de  $d\kappa$  relativement à  $K$ .

En premier lieu il est clair qu'entre (13) et (13') la même loi de transformation doit être valable que pour les carrés des amplitudes  $A^2$  et  $A'^2$  d'une onde plane de direction correspondante. Pour cette raison, on a, à l'approximation convenable :

$$(14) \quad \frac{\rho'(v', \phi') dv' d\kappa'}{\rho(v) dv d\kappa} = 1 - 2 \frac{v}{c} \cos\phi$$

ou

$$(14') \quad \rho'(v', \phi') = \rho(v) \frac{dv}{dv'} \frac{d\kappa}{d\kappa'} \left( 1 - 2 \frac{v}{c} \cos\phi \right) .$$

La théorie de la relativité donne ensuite les formules, variables à l'approximation considérée :

$$(15) \quad v' = v \left( 1 - \frac{v}{c} \cos^2\phi \right)$$

$$(16) \quad \cos \phi' = \cos \phi - \frac{v}{c} + \frac{v}{c} \cos^2 \phi$$

$$(17) \quad \psi' = \psi$$

A la même approximation, (15) entraîne :

$$v = v' \left( 1 + \frac{v}{c} \cos \phi' \right)$$

Toujours à la même approximation, on a :

$$\rho(v) = \rho \left( v' + \frac{v}{c} v' \cos \phi' \right),$$

ou :

$$(18) \quad \rho(v) = \rho(v') + \frac{\partial \rho}{\partial v} (v') \cdot \frac{v}{c} v' \cos \phi'$$

et d'après (15), (16), (17) :

$$\frac{dv}{dv'} = 1 + \frac{v}{c} \cos \phi'$$

$$\frac{d\kappa}{d\kappa'} = \frac{\sin \phi}{\sin \phi'} \frac{d\phi}{d\phi'} \frac{d\psi}{d\psi'} = \frac{d(\cos \phi)}{d(\cos \phi')} = 1 - 2 \frac{v}{c} \cos \phi'$$

Grâce à ces deux relations et à (18), (14') devient :

$$(19) \quad \rho'(v', \phi') = \left[ (\rho)_{v'} + \frac{v}{c} v' \cos \phi' \left( \frac{\partial \rho}{\partial v} \right)_{v'} \right] \left( 1 - 3 \frac{v}{c} \cos \phi' \right)$$

A l'aide de (19) et de notre hypothèse sur les processus induits et spontanés (Aus und Einstrahlung) nous pouvons facilement calculer l'impulsion transférée en moyenne à la molécule, par unité de temps. Mais, avant de le faire, nous devons encore dire quelque chose pour justifier la voie ainsi choisie. On peut objecter que les égalités (14), (15) et (16) sont fondées sur la théorie maxwellienne du champ électromagnétique, incompatible avec la théorie des quanta. Cette objection touche cependant plus la forme que la nature des choses. Car, de quelque manière que

l'on formule la théorie des processus électromagnétiques, de toutes façons, le principe de Doppler et la loi de l'aberration doivent rester vrais, donc aussi les égalités (15) et (16). En outre la validité de la relation énergétique (14) va certainement plus loin que celle de la théorie ondulatoire ; cette loi de transformation est aussi valable, d'après la théorie de la relativité, par exemple pour la densité d'énergie d'une masse se déplaçant (presque) à la vitesse de la lumière et de densité au repos infiniment petite. La relation (19) peut donc être considérée comme vraie dans toute théorie du rayonnement.

Le rayonnement dans l'angle solide  $d\kappa'$  provoquerait par seconde, selon (B)

$$B_n^m \rho'(v', \phi') \frac{d\kappa'}{4\pi}$$

processus élémentaires induits (Einstrahlung) du type  $Z_n \rightarrow Z_m$ , si la molécule était ramenée aussitôt à l'état  $Z_n$  après chaque processus élémentaire de ce type. En réalité la durée de séjour dans l'état  $Z_n$  est, par seconde, conformément à (5) :

$$\frac{1}{S} p_n e^{-\frac{\epsilon_n}{kT}},$$

où, pour abrégé, on a posé :

$$(20) \quad S = p_n e^{-\frac{\epsilon_n}{kT}} + p_m e^{-\frac{\epsilon_m}{kT}}$$

Le nombre de ces processus est donc en réalité

$$\frac{1}{S} p_n e^{-\frac{\epsilon_n}{kT}} B_n^m \rho'(v', \phi') \frac{d\kappa'}{4\pi}$$

Dans chaque processus élémentaire de cette sorte, une impulsion  $\frac{\epsilon_m - \epsilon_n}{c} \cos \phi'$  sera transférée à l'atome dans la direction des  $X'$  positifs. De même nous avons trouvé, d'après (B), que le nombre correspondant de processus élémentaires induits (Einstrahlung) du

type  $Z_m \rightarrow Z_n$  est, par seconde :

$$\frac{1}{S} p_m e^{-\frac{\epsilon_m}{kT}} B_m^n \rho'(v', \phi') \frac{d\kappa'}{4\pi}$$

et une impulsion  $-\frac{\epsilon_m - \epsilon_n}{c} \cos\phi'$  est transférée à la molécule dans chacun de ces processus élémentaires. Au total l'impulsion transférée par unité de temps par les processus induits (Einstrahlung) est, en tenant compte de (6) et (9) :

$$\frac{hv}{cS} p_n B_n^m \left( e^{-\frac{\epsilon_n}{kT}} - e^{-\frac{\epsilon_m}{kT}} \right) \int \rho'(v', \phi') \cos\phi' \frac{d\kappa'}{4\pi},$$

où l'intégration doit être étendue à tous les angles solides. Si on effectue cette intégration, on trouve, en vertu de (19) la valeur

$$-\frac{hv}{c^2S} \left( \rho - \frac{1}{3} v \frac{\partial \rho}{\partial v} \right) p_n B_n^m \left( e^{-\frac{\epsilon_n}{kT}} - e^{-\frac{\epsilon_m}{kT}} \right) v$$

où la fréquence active est de nouveau désignée par  $v$  (et non  $v'$ ).

Cette expression représente l'impulsion totale transférée en moyenne par unité de temps à la molécule en mouvement à la vitesse  $v$ . Car il est clair que les processus élémentaires de l'émission spontanée (Ausstrahlung) se produisant sans influence du rayonnement, ne possèdent aucune direction privilégiée, quand ils sont vus du système  $K'$ , et donc ne peuvent transférer en moyenne aucune impulsion à la molécule. Nous obtenons donc comme résultat final de cette étude :

$$(21) \quad R = \frac{hv}{c^2S} \left( \rho - \frac{1}{3} v \frac{\partial \rho}{\partial v} \right) p_n B_n^m e^{-\frac{\epsilon_n}{kT}} \left( 1 - e^{-\frac{hv}{kT}} \right)$$

#### VI - Calcul de $\overline{\Delta^2}$

Il est beaucoup plus simple de calculer l'action de l'irrégularité des processus élémentaires sur le comportement mécanique

de la molécule. Car on peut prendre comme base de ce calcul une molécule immobile, au degré d'approximation dont nous nous contentons depuis le début.

Soit un événement quelconque qui entraîne le transfert à la molécule d'une impulsion  $\lambda$  dans la direction  $X$ . Supposons que, dans les différents cas, cette impulsion soit de signes différents et de valeurs différentes. Supposons que  $\lambda$  obéisse à une loi statistique telle que la valeur moyenne de  $\lambda$  s'annule. Soient ensuite  $\lambda_1, \lambda_2 \dots$  les valeurs des impulsions que transfèrent à la molécule dans la direction  $X$  plusieurs causes agissant indépendamment les unes des autres, de sorte que l'impulsion  $\Delta$  résultante transférée soit donnée par :

$$\Delta = \sum \lambda_v.$$

Alors on a, si la valeur moyenne  $\overline{\lambda_v}$  des différents  $\lambda_v$  s'annule :

$$(22) \quad \overline{\Delta^2} = \sum \overline{\lambda_v^2}.$$

Si les valeurs moyennes  $\overline{\lambda_v^2}$  des différentes impulsions sont égales les unes aux autres ( $= \lambda^2$ ) et si  $l$  est le nombre total des événements qui fournissent les impulsions, alors on a la relation :

$$(22a) \quad \overline{\Delta^2} = l \overline{\lambda^2}.$$

D'après nos hypothèses, l'impulsion

$$\lambda = \frac{hv}{c} \cos\phi$$

sera transférée à la molécule par chaque processus induit ou spontané (Ein und Ausstrahlung), où  $\phi$  est l'angle formé par la direction des  $X$  et une direction choisie au hasard. Il en résulte que :

$$(23) \quad \overline{\lambda^2} = \frac{1}{3} \left( \frac{hv}{c} \right)^2.$$



Comme nous supposons que tous les processus élémentaires qui ont lieu sont à considérer comme des évènements indépendants les uns des autres, alors nous avons le droit d'utiliser (22a).  $\lambda$  est alors le nombre de processus élémentaires qui se produisent en tout pendant la durée  $\tau$ . Ceci est le double du nombre de processus induits (Einstrahlung)  $Z_n \rightarrow Z_m$  dans le temps  $\tau$ . Il vient alors

$$(24) \quad \lambda = \frac{2}{S} p_n B_n^m e^{-\frac{\epsilon_n}{kT}} \rho \tau$$

Il résulte de (23), (24) et (22) :

$$(25) \quad \frac{\Delta^2}{\tau} = \frac{2}{3S} \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 p_n B_n^m e^{-\frac{\epsilon_n}{kT}} \rho$$

### VII Résultats

Pour montrer maintenant que les impulsions exercées par le rayonnement sur les molécules d'après nos hypothèses fondamentales ne perturbent jamais l'équilibre thermodynamique, nous avons seulement besoin d'introduire les valeurs de  $\frac{\Delta^2}{\tau}$  et de R, calculées d'après (25) et (26), après que dans (21) la grandeur

$$\left(\rho - \frac{1}{3} v \frac{\partial \rho}{\partial v}\right) \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right)$$

aura été remplacée par  $\frac{\rho h\nu}{3kT}$  en vertu de (4). Il apparaît alors immédiatement que notre égalité fondamentale (12) est identiquement vérifiée.

Ces considérations, qui sont maintenant terminées, fournissent un solide appui aux hypothèses posées au §II sur l'interaction entre la matière et le rayonnement dans les processus d'émission et d'absorption respectivement induits et spontanés (Ein und Ausstrahlung). J'ai été conduit à ces hypothèses par le désir de postuler de la façon la plus simple possible un comportement des molécules qui soit en accord avec la théorie quantique et analogue à celui d'un résonateur de Planck de la théorie classique. L'hypothèse quantique générale faite sur la matière

a donné tout naturellement la deuxième règle de Bohr (égalité (9)) ainsi que la formule du rayonnement de Planck.

Mais le plus important me paraît être le résultat relatif aux impulsions transférées à la molécule par les processus induits et spontanés (Ein und Ausstrahlung). Si l'une de nos hypothèses sur ces dernières était modifiée, il s'ensuivrait que l'égalité (12) serait violée ; il apparaît à peine possible de rester en accord avec cette relation, exigée par la théorie de la chaleur autrement que sur la base de nos hypothèses. C'est pourquoi nous pouvons considérer ce qui suit comme étant prouvé d'une façon assez sûre.

Si un faisceau de rayons agit de sorte que l'une des molécules rencontrées par lui reçoit ou cède l'énergie  $h\nu$  sous forme de rayonnement à partir d'un processus élémentaire induit (Einstrahlung), alors une impulsion  $\frac{h\nu}{c}$  est toujours transférée à la molécule, et ceci dans la direction de propagation du faisceau si c'est une absorption d'énergie, dans le sens contraire si c'est une émission. Si la molécule se trouve sous l'influence de plusieurs faisceaux de rayons, un seul de ceux-ci participera à un évènement élémentaire induit (Einstrahlung) ; ce faisceau détermine alors seul la direction de l'impulsion transférée à la molécule.

Si la molécule subit une perte d'énergie de grandeur  $h\nu$  sans excitation extérieure, sous forme d'émission spontanée (Ausstrahlung), alors ce processus est également directionnel. Il n'y a pas d'émission spontanée sous forme d'onde sphérique. Dans le processus élémentaire d'émission spontanée, la molécule subit une poussée en retour de grandeur  $\frac{h\nu}{c}$ , dans une direction qui est déterminée, dans l'état actuel de la théorie, seulement par le "hasard".

Ces propriétés des processus élémentaires, qui sont exigées par l'équation (12), font paraître l'élaboration d'une théorie proprement quantique du rayonnement comme presque inévitable. La faiblesse de la théorie réside, d'une part dans le fait qu'elle ne nous fait pas mieux comprendre la connexion avec la théorie ondulatoire, et d'autre part qu'elle abandonne l'instant et la direction des processus élémentaires au "hasard" ; malgré cela

je garde une pleine confiance dans la sûreté du chemin suivi.

Une remarque générale doit encore trouver sa place ici. Presque toutes les théories du rayonnement thermique reposent sur la considération des interactions entre le rayonnement et les molécules. Mais, en général on se contente de la considération de l'échange d'énergie sans tenir compte de l'échange d'impulsion. On se sent facilement en droit de le faire à cause de la petite-  
se des impulsions transférées par le rayonnement, qui fait que, dans la réalité, les impulsions sont presque toujours négligeables devant les autres causes du mouvement. Mais, dans un raisonnement théorique, ces petites actions doivent être considérées comme tout aussi importantes que celles qui sautent aux yeux et produisent le transfert d'énergie par rayonnement, parce que l'énergie et l'impulsion sont liées de la façon la plus étroite l'une à l'autre ; c'est pourquoi une théorie ne peut être considérée comme justifiée que lorsqu'il est démontré que les impulsions qui, d'après elle, sont transmises du rayonnement à la matière, conduisent à des mouvements identiques à ceux exigés par la théorie de la chaleur.

Manuscrit reçu par les Annalen der Physik  
le 3 Mars 1917