Annales de la Fondation Louis de Broglie - Vol. 4, n° 2, 1979

A LA RECHERCHE DU TEMPS PERDU

Deuxième partie : théorie à deux temps

par M. Augustin BLAQUIERE

Laboratoire d'Automatique Théorique. Paris VII.

Tour 14 - 24

2, Place Jussieu - 75221 PARIS Cédex 05

(manuscrit reçu le 9 Janvier 1978)

Résumé : Dans la deuxième partie de cet exposé nous étendrons certains des concepts discutés dans la première partie. Nous établirons l'équation de Klein-Gordon pour un corpuscule chargé dans un champ électro-magnétique. La méthode suivie nous imposera de considérer l'espace-temps usuel comme un hyperplan de dimension 4 dans un espace de dimension 5. La signification de la variable temps t usuelle sera dégagée d'un principe de stationnarité. Les liens entre notre théorie et les approximations relativistes classiques (e.g. la Mécanique classique) seront discutés, de même que les liens entre les équations de Klein-Gordon et Schrödinger. L'équation de Schrödinger apparaît alors comme une approximation obtenue lorsqu'on identifie la 5ème dimension de l'espace et la 4ème.

Nous nous proposons maintenant de porter notre attention sur la nature des liens par lesquels l'onde et le corpuscule se trouvent unis dans leur évolution au cours du temps.

Dans la première partie de cet exposé, nous avons vu que les lois fondamentales de la Dynamique classique du point matériel peuvent être obtenues aisément en imaginant que le corpuscule est au sein d'un nuage de petites horloges, dont le mouvement est semblable à celui d'un fluide. Nous approfondirons cette idée.

D'autre part nous avions introduit dans les références (1) et (2) le concept de <u>point-source</u> et montré que, dans le cas non relativiste, on peut obtenir la loi d'évolution de la fonction d'onde d'un corpuscule, c'est-à-dire l'équation de Schrödinger, à partir de postulats analogues à ceux de Huygens et Fresnel en optique. Ayant reconnu que cette méthode se présente sur le plan formel comme un cas particulier d'une méthode introduite par Feynman (3), nous en reprenons ici l'étude dans un cadre plus général. A la suite de nos récents travaux (4) il nous est apparu en effet que les points-sources sont assimilables aux "petites horloges" introduites par Louis de Broglie à l'origine de la Mécanique ondulatoire, et que la théorie de Louis de Broglie comme celle de Feynman peuvent être prolongées dans le cadre des processus stochastiques relativistes dont l'étude a été abordée dans (4).

Dans la suite nous appellerons donc points-sources les petites horloges de Louis de Broglie présentées dans la première partie de cet exposé. Nous en préciserons ici la définition.

<u>1. Les points-sources</u>.

Un point-source est un couple (x, θ). $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ est sa <u>position</u> dans un espace Euclidien E_4 de dimension 4; $\theta \in [0, 2\pi]$ est sa <u>phase</u>. Nous verrons plus loin que x_4 est le

temps indiqué par cette petite horloge. $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ est sa position au temps t dans le système de référence Galiléen d'un observateur $\emptyset$ qui utilise un temps t et un système de coordonnées rectangulaires x_1, x_2, x_3. Nous désignerons par E_5 l'espace Euclidien de dimension 5 dont les points sont (x_1, x_2, x_3, x_4, t).

Un <u>nuage de points-sources</u> est défini par un triplet $\Gamma = (\rho(.), \theta(.), \Omega)$, où $\rho(.) : x \longmapsto \rho = \rho(x)$ est la <u>distribution de densités</u> du nuage, définie sur E_4 à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ (où $\mathbb{R}_+$ désigne l'ensemble des nombres non-négatifs); Ω l'ensemble des points où $\rho(x) > 0$, et $\theta(.) : x \longmapsto \theta = \theta(x)$ la <u>distribution de phases</u> du nuage, définie sur Ω à valeurs dans $[0, 2\pi]$.

Un <u>point-source du nuage</u> Γ est un point-source dont la position x est dans Ω et dont la phase est $\theta(x)$. Nous poserons

$$\tilde{\rho}(x) = \rho(x) \exp(i\,\theta(x)) \quad \text{pour tout } x \in \Omega \,,$$
$$\tilde{\rho}(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \operatorname{comp}\Omega \text{ dans } E_4$$

HYPOTHESE 1. $\tilde{\rho}(x)$ est de classe C^2 sur E_4, et Ω est un sous-ensemble ouvert de E_4.

Nous supposerons d'ailleurs qu'il existe une fonction $q(.) : (x, \Delta x, \Delta t) \longmapsto q = q(x, \Delta x, \Delta t)$ définie sur $E_4 \times E_4 \times \mathbb{R}^+$ (où $\mathbb{R}^+$ désigne l'ensemble des nombres strictement positifs) à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que, pour un nuage de points-sources arbitrairement donné, l'"effet" produit au point $x + \Delta x$ de E_4 et au temps $t + \Delta t > t$ par un point-source du nuage de position x au temps t, est complètement caractérisé par $q(x, \Delta x, \Delta t)$.

<u>2. L'équation fondamentale</u>.

HYPOTHESE 2. Pour tout x dans E_4 :

$$(1)\quad \operatorname{Lim} \frac{1}{\Delta t} \left(\int q(x, \Delta x, \Delta t)\, d(\Delta x) - 1 \right) = R(x), \qquad t \longrightarrow 0^+,$$

où $R(x)$ est définie et continue sur E_4 à valeurs dans $\mathbb{C}$;

$$(2)\quad \operatorname{Lim} \frac{1}{\Delta t} \int \Delta x_\alpha \, q(x, \Delta x, \Delta t)\, d(\Delta x) = \Lambda_\alpha(x), \quad \alpha = 1,2,3,4,$$

où $\Lambda_\alpha(x)$ est définie et de classe C^1 sur E_4, $\alpha = 1,2,3,4$, à valeurs dans $\mathbb{R}$;

$$(3)\quad \operatorname{Lim} \frac{1}{\Delta t} \int \Delta x_\alpha \Delta x_\beta \, q(x, \Delta x, \Delta t)\, d(\Delta x) = D_{\alpha\beta}(x), \quad \alpha, \beta = 1,2,3,4,$$

où $D_{\alpha\beta}(x) = 0$ pour $\alpha \neq \beta$, $D_{\alpha\alpha}(x) = i\,\varepsilon_\alpha D(x)$, $D(x)$ est définie et de classe C^2 sur E_4 à valeurs dans $\mathbb{R}$, et ε_α est une constante, $\alpha = 1,2,3,4$;

$$(4)\quad \operatorname{Lim} \frac{1}{\Delta t} \int o(\|\Delta x\|^2)\, q(x, \Delta x, \Delta t)\, d(\Delta x) = 0 .$$

Ici et dans la suite l'intégration est étendue à tout l'espace E_4 lorsque le domaine d'intégration n'est pas spécifié.

HYPOTHESE 3. Pour tout x dans E_4 :

$$(5)\quad \operatorname{Lim} \frac{1}{\Delta t} \left(\int \tilde{\rho}(x-\Delta x) q(x-\Delta x, \Delta x, \Delta t)\, d(\Delta x) - \tilde{\rho}(x) \right) = 0$$

L'hypothèse 3 traduit un <u>principe de superposition</u> analogue à celui de Huygens-Fresnel en optique.

HYPOTHESE 4. Pour tout x dans E_4, pour tout Δx dans E_4 et pour tout $\Delta t > 0$, $q(x, \Delta x, \Delta t)$ est deux fois continûment différentiable par rapport à x_α, $\alpha = 1,2,3,4$.

Alors, en développant les fonctions dans la relation (5) en séries de Taylor, puis en faisant tendre Δt vers 0^+, on obtient l'équation aux dérivées partielles suivante

$$(6)\quad -\sum_{\alpha=1}^{4} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\tilde{\rho} \Lambda_\alpha) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{4} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2} (\tilde{\rho}\, D_{\alpha\alpha}) + R\tilde{\rho} = 0$$

C'est à partir de la relation (6), dans le cas non relativiste, <u>avec l'hypothèse</u> $x_4 \equiv t$, et de l'expression suivante de $q(x, \Delta x, \Delta t)$ que Feynman obtient l'équation de Schrödinger pour une particule chargée dans un champ électro-magnetique

$$(7)\quad q(x, \Delta x, \Delta t) = Q(x, \Delta x, \Delta t) \exp \left(-\frac{1}{i2D_o} \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{(\Delta x_\alpha)^2}{\Delta t} \right)$$

avec

$$Q(x, \Delta x, \Delta t) = \gamma \left(1 - \frac{e}{im_oD_oc} \sum_{\alpha=1}^{3} A_\alpha \Delta x_\alpha - \frac{e}{i2m_oD_oc} \sum_\alpha \sum_\beta \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta} \Delta x_\alpha \Delta x_\beta - \frac{e^2}{2m_o^2D_o^2c^2} \left(\sum_{\alpha=1}^{3} A_\alpha \Delta x_\alpha \right)^2 + \frac{U}{im_oD_o} \Delta t \right)$$

m_o, masse de la particule; $D_o = h/2\pi m_o$; h, constante de Planck; e, charge de la particule; c, vitesse de la lumière; $A_\alpha = A_\alpha(\underline{x}, t)$, $\alpha = 1,2,3$, composantes du potentiel-vecteur; $U = U(x,t)$, potentiel scalaire; γ facteur de normalisation.

On trouve alors

$\Lambda_\alpha(x) = \Lambda_\alpha(\underline{x},t) = -(e/m_oc) A_\alpha(\underline{x},t)$, $\alpha = 1,2,3$, $\Lambda_4(x) = \Lambda_4(\underline{x},t) = 1$,
$D(x) = D_o$, $\varepsilon_\alpha = 1$, $\alpha = 1,2,3$, $\varepsilon_4 = 0$,

$$R(x) = R(\underline{x},t) = -\frac{e}{2m_oc} \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\alpha} + \frac{e^2}{i2m_o^2D_oc^2} \sum_{\alpha=1}^{3} A_\alpha^2 + \frac{U}{im_oD_o}$$

Reportant dans (6) dans le cas où D_o est indépendant de x, on obtient

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = i \frac{D_o}{2} \nabla^2 \tilde{\rho} + \frac{e}{m_oc} \sum_{\alpha=1}^{3} A_\alpha \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x_\alpha} + \frac{e^2}{i2m_o^2D_oc^2} \left(\sum_{\alpha=1}^{3} A_\alpha^2 \right) \tilde{\rho} + \frac{e}{2m_oc} \left(\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\alpha} \right) \tilde{\rho} + \frac{U}{im_oD_o} \tilde{\rho}$$

avec $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$.

Cette équation se met sous la forme

$$(8)\quad \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = i \frac{D_o}{2} \left(\nabla + \frac{e}{im_oD_oc} A \right) \cdot \left(\nabla + \frac{e}{im_oD_oc} A \right) \tilde{\rho} + \frac{U}{im_oD_o} \tilde{\rho}$$

Pour $D_o = h/2\pi m_o$, nous reconnaissons l'équation de Schrödinger.

Nous allons voir dans quel sens la formule (7) est une approximation. Supposons maintenant que E_4 est un espace <u>improprement Euclidien</u>, ou <u>pseudo-Euclidien</u>, dont la métrique a la signature ---+.

Ceci nous conduit naturellement a remplacer

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{(\Delta x_\alpha)^2}{\Delta t}$$

dans le facteur exponentiel de la formule (7) par

$$\frac{\sum_{\alpha=1}^{3} (\Delta x_\alpha)^2 - c^2 (\Delta x_4)^2}{\Delta t}$$

Nous remplacerons alors la formule (7) par la suivante

$$(9) \quad q(x, \Delta x, \Delta t) = \tilde{Q}(x, \Delta x, \Delta t) \exp\left(- \frac{1}{i2D} \; \frac{\sum_{\alpha=1}^{3} (\Delta x_\alpha)^2 - c^2 (\Delta x_4)^2}{\Delta t}\right)$$

avec

$$\tilde{Q}(x, \Delta x, \Delta t) = \gamma \Big(1 - \frac{e}{imDc} \sum_{\alpha=1}^{4} A_\alpha \Delta x_\alpha - \frac{e}{i2mDc} \sum \sum \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta} \Delta x_\alpha \Delta x_\beta$$

$$- \frac{e^2}{2m^2 D^2 c^2} \Big(\sum_{\alpha=1}^{4} A_\alpha \Delta x_\alpha\Big)^2 + \frac{1}{i2mD}\big(m_o c^2 \sqrt{1-\beta^2}\,\big) \Delta t\Big)$$

$m_o = m_o(x)$, masse propre de la particule supposée fonction de x; $m = m(x)$, $D = D(x)$, $\beta = \beta(x)$, fonctions de x satisfaisant aux relations

$$(10) \qquad mD = \frac{h}{2\pi}, \qquad 0 \leq \beta < 1, \qquad m = \frac{m_o}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$A_\alpha = A_\alpha(x)$, $\alpha = 1,2,3$; $A_4 = -c\,\Phi(x)$ où $\Phi = \Phi(x)$ est un potentiel scalaire.

On trouve alors

$$\Lambda_\alpha(x) = -(e/mc) A_\alpha, \quad \alpha = 1,2,3, \qquad \Lambda_4(x) = -(e/mc^2)\,\Phi$$

$$\varepsilon_\alpha = 1 \text{ pour } \alpha = 1,2,3, \qquad \varepsilon_4 = -1/c^2$$

$$R(x) = -\frac{e}{2mc} \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\alpha} - \frac{e}{2mc^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} + \frac{e^2}{i2m^2 Dc^2} \sum_{\alpha=1}^{3} A_\alpha^2$$

$$- \frac{e^2}{i2m^2 Dc^2} \Phi^2 + \frac{1}{i2mD}\big(m_o c^2 \sqrt{1-\beta^2}\,\big)$$

Posant

$$(11) \qquad \psi(x) = D(x)\,\tilde{\rho}(x)$$

on obtient à partir de (6)

$$(12) \quad \Box\psi + \frac{4\pi i}{h}\Big(\sum_{\alpha=1}^{3} G_\alpha \frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha} + \frac{e\Phi}{c^2} \frac{\partial \psi}{\partial x_4}\Big)$$

$$+ \frac{2\pi i}{h}\Big(\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial G_\alpha}{\partial x_\alpha} + \frac{e}{c^2} \frac{\partial \Phi}{x_4}\Big)\psi + \frac{4\pi^2}{h^2}\Big(\sum_{\alpha=1}^{3} G_\alpha^2 - \frac{e^2}{c^2}\Phi^2 + m_o^2 c^2\Big)\psi =$$

avec $G_\alpha = \frac{e}{c} A_\alpha$, $\alpha = 1,2,3$, $\qquad \Box = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} - \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}$

Puisque

$$\left.\frac{\partial \psi(\underline{x}, x_4)}{\partial x_4}\right|_{x_4 = t} = \frac{\partial \psi(\underline{x}, t)}{\partial t}$$

il résulte de l'équation (12) que $\psi(\underline{x}, t)$ satisfait à l'équation de Klein-Gordon pour une particule chargée dans un champ électro-magnétique, obtenue simplement en remplaçant dans (12) $\psi(x)$ par $\psi(\underline{x}, t)$ et les dérivées partielles par rapport à x_4 par des dérivées partielles par rapport à t.

Ce résultat nous conduit à définir <u>l'espace-temps de</u>

$\underline{\text{l'observateur}}$ $\emptyset$ comme l'hyperplan de dimension 4 de E_5 défini par

$$x_4 = t$$

Bien entendu on pourrait ajouter à t une constante arbitraire.

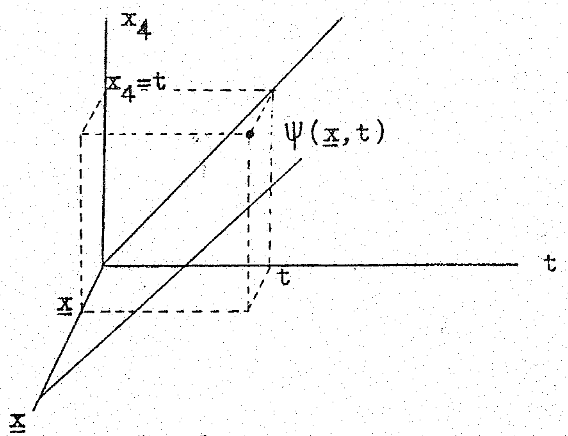

Fig. 1

Insistons sur le fait que l'équation (12) a été obtenue en traitant x_4 et t comme des variables indépendantes, puis en posant x_4=t à la fin des calculs on obtient l'équation de Klein-Gordon. La conclusion est tout à fait différente si on pose $x_4 \equiv t$ dès le début des calculs; comme nous l'avons vu on obtient dans ce cas l'équation de Schrödinger.

La façon dont nous avons introduit l'espace-temps de l'observateur $\emptyset$ sera éclairée par la discussion du paragraphe suivant.

3. Limite classique et définition du temps.

Si $q(x, \Delta x, \Delta t)$ est mis sous la forme

$$q(x, \Delta x, \Delta t) = a(x, \Delta x, \Delta t) \exp (ib(x, \Delta x, \Delta t))$$

où a(.) et b(.) sont des fonctions réelles, la contribution d'un point-source de position $x - u\Delta t \in \Omega$ et de phase $\theta(x-u\Delta t)$

au temps $t - \Delta t < t$ à la phase au point $x \in \Omega$ et au temps t est

$$\varphi(x, u\Delta t, \Delta t) = \theta(x - u\Delta t) + b(x, u\Delta t, \Delta t) + o(u, \Delta t)$$

La formule (9) permet le calcul de $b(x, u\Delta t, \Delta t)$. On trouve

$$(13)\quad b(x, u\Delta t, \Delta t) = \frac{1}{2D}\Big(\sum_{\alpha=1}^{3} u_\alpha^2 \Delta t - c^2 u_4^2 \Delta t\Big) - \frac{1}{2mD}\big(m_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2}\,\big)\Delta t + \frac{e}{mDc}\sum_{\alpha=1}^{4} A_\alpha u_\alpha \Delta t + o(u, \Delta t)$$

à l'addition près d'un terme réel constant dû au facteur de normalisation γ. Le calcul de γ montre que ce terme est $-\pi/2$. Nous notons que ce terme a la même valeur que celui qui s'introduit en Optique dans l'application du principe de Huygens-Fresnel, et qui a été mentionné par Gouy dans le cas des ondes sphériques isotropes (passage d'une onde par un foyer). Ce terme ne joue d'ailleurs aucun rôle dans la discussion qui suit, aussi le passerons-nous sous silence. On a alors

$$\varphi(x, u\Delta t, \Delta t) = \theta(x) - \sum_{\alpha=1}^{4} \frac{\partial\theta}{\partial x_\alpha} u_\alpha \Delta t + \frac{\pi m}{h}\Big(\sum_{\alpha=1}^{3} u_\alpha^2 \Delta t - c^2 u_4^2 \Delta t\Big) - \frac{\pi}{h}\big(m_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2}\,\big)\Delta t + \frac{2\pi}{h}\frac{e}{c}\sum_{\alpha=1}^{4} A_\alpha u_\alpha \Delta t + o(u, \Delta t)$$

De plus posons

$$V(x) = \frac{h}{2\pi}\theta(x)$$

Il vient

$$(14)\quad \varphi(x, u\Delta t, \Delta t) = \frac{2\pi}{h}\big(V(x) - S(x,u)\Delta t\big) + o(u, \Delta t)$$

avec

$$(15)\quad S(x, u) = -L(x, u) + \sum_{\alpha=1}^{4} \frac{\partial V}{\partial x_\alpha} u_\alpha = \frac{mc^2}{2}\Big(u_4^2 - \frac{1}{c^2}\sum_{\alpha=1}^{3} u_\alpha^2\Big) + \frac{m_0 c^2}{2}\sqrt{1-\beta^2} - \frac{e}{c}\sum_{\alpha=1}^{4} A_\alpha u_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{4} \frac{\partial V}{\partial x_\alpha} u_\alpha$$

où l'expression L(x, u) dans le membre de droite est un Lagrangien généralisé :

$$L(x, u) = \frac{m}{2} \left(\sum_{\alpha=1}^{3} u_\alpha^2 - c^2 u_4^2 \right) - \frac{m_o c^2}{2} \sqrt{1-\beta^2} + \frac{e}{c} \sum_{\alpha=1}^{4} A_\alpha u_\alpha$$

Ecrivons maintenant la condition de stationnarité de l'action $S(x, u)\,\Delta t$ relativement à u_α, $\alpha = 1,2,3,4$. Tenant compte de (10) on obtient

$$(16) \qquad \frac{\partial V(x)}{\partial x_\alpha} = m u_\alpha + \frac{e}{c} A_\alpha = \frac{m_o u_\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{e}{c} A_\alpha , \qquad \alpha = 1,2,3$$

$$(17) \qquad \frac{\partial V(x)}{\partial x_4} = - m c^2 u_4 + \frac{e}{c} A_4 = - \frac{m_o c^2 u_4}{\sqrt{1-\beta^2}} - e\Phi$$

Nous désignerons par $u^s(x)$ le vecteur dont les composantes sont données par (16) et (17).

$u = u^s(x)$ qui rend $S(x, u)$ stationnaire définit un champ de vecteurs dans E_4. On peut associer à ce champ de vecteurs une famille de trajectoires dans E_4, définies comme solutions du système d'équations différentielles ordinaires

$$(18) \qquad \dot{x}_\alpha = u_\alpha^s(x) \qquad \alpha = 1,2,3,4.$$

Moyennant l'hypothèse suivante

HYPOTHESE 5. $\qquad u_4^s(x) \equiv 1$

on voit que ces trajectoires sont celles que Louis de Broglie désigne sous le nom de trajectoires de guidage.

Nous pouvons reprendre en ce point le raisonnement de Feynman et le compléter par un résultat relatif au temps.

A première vue, il n'est pas clair d'après l'équation (14) qu'un vecteur u doive jouer un rôle privilégié à la limite classique. Cependant l'approximation classique correspond au cas où les grandeurs masses, intervalles de temps, etc ... ont des valeurs tellement importantes que l'action $S(x, u)\,\Delta t$ est très grande par rapport à $h/2\pi$.

Le terme $(2\pi/h) S(x, u)\,\Delta t$ dans l'équation (14) est donc très grand. Si on fait subir à $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ une petite variation δu à partir d'une valeur $\hat{u}$ pour laquelle $S(x, u)$ n'est pas stationnaire, petite à l'échelle classique, la variation correspondante de $S(x, u)\,\Delta t$, petite à l'échelle classique, est importante lorsqu'on la mesure avec l'unité $h/2\pi$. Il s'ensuit en général une grande variation de la phase φ, de telle sorte que les contributions en x, t, des points-sources dans le voisinage de $x - \hat{u}\,\Delta t$, au temps $t - \Delta t$, ont un effet résultant pratiquement nul.

Par conséquent, aucun point-source au temps $t - \Delta t$ ne doit être pris en considération si les points-sources du voisinage correspondent à des actions différentes. Mais dans le cas où la position $x - u^s(x)\,\Delta t$, au temps $t - \Delta t$, est justement celle pour laquelle $S(x, u^s(x))\,\Delta t$ est un extremum de l'action $S(x, u)\,\Delta t$, une petite variation de u ne produit aucune variation de $S(x,u)\Delta t$ au moins au premier ordre. Toutes les contributions au point x et au temps t des points-sources dans cette région, au temps $t - \Delta t$, sont approximativement en phase et ne se détruisent pas. En conséquence, seuls les points-sources dans le proche voisinage de $x - u_3^s(x)\,\Delta t$ au temps $t - \Delta t$ apportent une contribution importante à la phase au point x et au temps t.

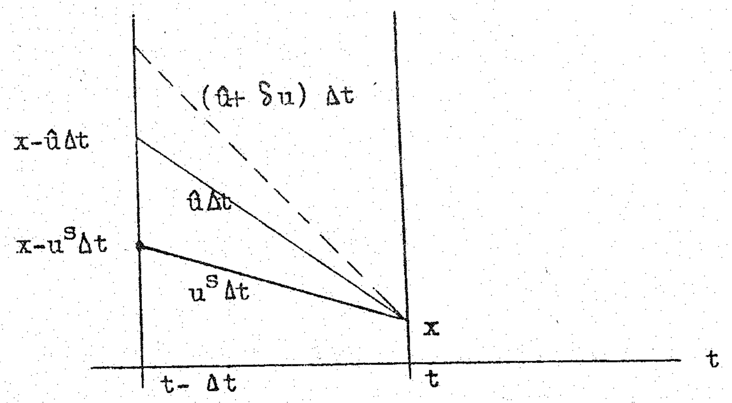

Fig. 2

De la remarque précédente et de l'hypothèse 5 il résulte que seuls les points-sources dont la coordonnée x_4 est très voisine de $x_4 - \Delta t$ au temps $t - \Delta t$ apportent une contribution importante au point $x = (\underline{x}, x_4)$ et au temps t. En d'autres termes, à l'échelle classique, la variable x_4 peut être identifiée au temps t de l'observateur Ø (à un décalage constant près). Il n'en est plus de même à l'échelle de la microphysique où les deux variables x_4 et t ne peuvent être identifiées, sauf lorsque $\| u^s \|$ est petit devant c.

Pour mettre en évidence ce dernier point, reportons-nous à l'établissement des équations de Schrödinger et de Klein-Gordon. Dans l'établissement de l'équation de Schrödinger, les variations de la variable x_4 n'ont pas été prises en compte; c'est-à-dire que nous avions $\varepsilon_4 = 0$. Cependant la valeur de ε_4 déduite de (9) était $\varepsilon_4 = -1/c^2$; ainsi nous voyons comment la condition $x_4 \equiv t$ peut être considérée comme une approximation non-relativiste; nous rencontrons une situation analogue à celle de la limite classique, mais pour une autre raison: Cette approximation n'est pas valable pour l'équation de Klein-Gordon et deux variables temps différentes doivent être prises en considération :

- le temps t de l'observateur Ø; et
- le temps x_4 indiqué par la petite horloge qu'est le point-source.

On peut aisément vérifier que l'on obtient aussi l'équation de Klein-Gordon dans une approximation faiblement relativiste, avec les hypothèses $m(x) \equiv m_o(x)$, $\beta(x) \equiv 0$ et ε_4 très petit, pourvu que les deux variables temps t et x_4 ne soient pas identifiées. Ici se situe une différence fondamentale entre les hypothèses sur lesquelles reposent les équations de Schrödinger et de Klein-Gordon.

Dans le cas général, il résulte de l'équation (18), de l'hypothèse 5 et de la définition de l'espace-temps de l'observateur Ø qu'une trajectoire de guidage satisfaisant à la condition

$x_4 = 0$ au temps $t = 0$ est entièrement contenue dans l'espace-temps de Ø.

4. Principe de stationnarité.

Posons

$$D(x)\,\rho(x) = \exp\left(-\frac{2\pi}{h}\,W(x)\right) \tag{19}$$

pour tout x dans Ω , et soit $w = w^s(x)$ le vecteur dont les composantes sont données par

$$m w_\alpha = \frac{m_o w_\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\partial W(x)}{\partial x_\alpha} \qquad \alpha = 1,2,3, \tag{20}$$

$$m w_4 = \frac{m_o w_4}{\sqrt{1-\beta^2}} = -\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial W(x)}{\partial x_4} \tag{21}$$

$w = w^s(x)$ définit un champ de vecteurs dans E_4, et plus précisément sur Ω .

On vérifiera sans difficulté que l'équation fondamentale s'écrit

$$\frac{1}{c^2}\left(\left(\frac{\partial V}{\partial x_4}+e\Phi\right)+i\,\frac{\partial W}{\partial x_4}\right)^2-\sum_{\alpha=1}^{3}\left(\left(\frac{\partial V}{\partial x_\alpha}-\frac{e}{c}A_\alpha\right)+i\,\frac{\partial W}{\partial x_\alpha}\right)^2 \tag{22}$$
$$-\frac{ih}{2\pi}\left(\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial}{\partial x_4}\left(\left(\frac{\partial V}{\partial x_4}+e\Phi\right)+i\frac{\partial W}{\partial x_4}\right)-\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\left(\frac{\partial V}{\partial x_\alpha}-\frac{e}{c}A_\alpha\right)+i\,\frac{\partial W}{\partial x_\alpha}\right.\right.$$
$$= m_o^2 c^2$$

Ceci nous conduit naturellement à poser

$$v^* = u^s(x) + i\,w^s(x) \qquad V^* = V(x) + i\,W(x)$$
$$v^* = (v_1^*, v_2^*, v_3^*, v_4^*)$$

pour tout x dans Ω .

D'après (16) (17) (20) et (21) l'équation (22) s'écrit alors

$$(23) \quad \frac{1}{c^2}(mc^2 v_4^*)^2 - \sum_{\alpha=1}^{3} (mv_\alpha^*)^2 - \frac{ih}{2\pi}\left(\Box V^* + \frac{e}{c^2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_4} + \sum_{\alpha=1}^{3} c\,\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\alpha}\right)\right) = m_o^2 c^2$$

ce qui nous suggère d'étendre une hypothèse classique.

HYPOTHESE 6.

$$(24) \quad \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial x_4} \equiv 0$$

Des relations (23) et (24) on déduit

$$(25) \quad iD^c \,\Box\, V^* = \frac{mc^2}{2}\left((v_4^*)^2 - \frac{1}{c^2}\sum_{\alpha=1}^{3} (v_\alpha^*)^2\right) - \frac{m_o c^2}{2}\sqrt{1-\beta^2}$$

où on a posé

$$D^c = D/2$$

Enfin, compte tenu de (25) les relations (16) (17) (20) (21) et (22) peuvent être regroupées sous la forme

$$(26) \quad \sum_{\alpha=1}^{4} \frac{\partial V^*}{\partial x_\alpha} v_\alpha^* + iD^c \Box V^* = \frac{m}{2}\left(\sum_{\alpha=1}^{3} (v_\alpha^*)^2 - c^2 (v_4^*)^2\right) - \frac{m_o c^2}{2}\sqrt{1-\beta^2} + \frac{e}{c}\sum_{\alpha=1}^{4} A_\alpha v_\alpha^*$$

$$(27) \quad \frac{\partial V^*}{\partial x_\alpha} = mv_\alpha^* + \frac{e}{c}A_\alpha \ , \ \alpha = 1,2,3, \qquad \frac{\partial V^*}{\partial x_4} = -mc^2 v_4^* + \frac{e}{c}A_4$$

Revenant à la relation (15) nous voyons que le second membre de (26) est formé à partir de l'extension analytique $L(x, u+iw)$ du Lagrangien $L(x,u)$:

$$L(x,u+iw) = \frac{m}{2}\left(\sum_{\alpha=1}^{3} (u_\alpha+iw_\alpha)^2 - c^2(u_4+iw_4)^2\right) - \frac{m_o c^2}{2}\sqrt{1-\beta^2} + \frac{e}{c}\sum_{\alpha=1}^{4} A_\alpha (u_\alpha + iw_\alpha)$$

Posant

$$(28) \quad H^*(x,u+iw) = L(x,u+iw) - \sum_{\alpha=1}^{4} \frac{\partial V^*(x)}{\partial x_\alpha}(u_\alpha + iw_\alpha) - iD^c(x)\Box V^*(x)$$

le système d'équations (26) (27) est équivalent au système

$$(29) \qquad H^*(x, u+iw) = 0$$

$$(30) \qquad \frac{\partial H^*(x, u+iw)}{\partial (u_\alpha + iw_\alpha)} = 0 \qquad \alpha = 1,2,3,4.$$

Les relations (29) et (30) sont l'expression complète du principe de stationnarité discuté au paragraphe 3, suivant le raisonnement de Feynman.

De plus, des relations (16) (17) (20) (21) et (22) on déduit l'expression de $\beta^2 = \beta^2(x)$. On trouve

$$(31) \quad \beta^2 = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{u_\alpha^2}{c^2} + w_4^2 - \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{w_\alpha^2}{c^2} - \frac{h}{2\pi m^2 c^2}\,\Box\, W$$

avec $u = u^s(x)$, $w = w^s(x)$.

Notons que, dans le cas où $W(x) \equiv$ constante, la formule (31) se réduit à l'expression classique

$$\beta^2 = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{u_\alpha^2}{c^2}$$

<u>Exemple 1 : Equation de Klein-Gordon faiblement relativis</u>

Adoptons les hypothèses

$$\beta(x) \equiv 0, \qquad \varepsilon_4 = -1/c^2 \text{ très petit,}$$

et considérons à titre de simplification le cas où $A_\alpha(x) \equiv 0$, $\alpha = 1,2,3,4$. On a alors

$$m \equiv m_o(x)$$

$$L(x,u) = -m_o c^2\left(1 + \frac{u_4^2 - 1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{u_\alpha^2}{c^2}\right)$$

$$L(x,u+iw) = -m_o c^2\left(1 + \frac{(u_4+iw_4)^2-1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{(u_\alpha+iw_\alpha)^2}{c^2}\right)$$

$$H^* = L(x,u+iw) - \sum_{\alpha=1}^{4} \frac{\partial V^*(x)}{\partial x_\alpha}(u_\alpha+iw_\alpha) - i\frac{D_o}{2}\,\Box\, V^*$$

avec $D_o = h/2\pi m_o$.

De (29) et (30) on déduit

$$\frac{\partial V^*}{\partial x_\alpha} = m_o(u_\alpha+iw_\alpha),\quad \alpha = 1,2,3, \qquad \frac{\partial V^*}{\partial x_4} = -m_o c^2(u_4+iw_4)$$

$$m_o^2c^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial V^*}{\partial x_4}\right)^2 + \sum_{\alpha=1}^{3}\left(\frac{\partial V^*}{\partial x_\alpha}\right)^2 + i m_o D_o\,\Box\, V^* = 0$$

Finalement en posant

$$\psi = \exp\left(i\frac{2\pi}{h}V^*\right)$$

on aboutit à l'équation de Klein-Gordon (malgré nos hypothèses faiblement relativistes)

$$\Box\psi + \frac{4\pi^2}{h^2} m_o^2c^2\psi = 0$$

<u>Exemple 2 : Equation de Schrödinger</u>

Adoptons les hypothèses

$$\beta(x) \equiv 0, \qquad x_4 \equiv t, \quad \varepsilon_4 = -1/c^2 \text{ très petit.}$$

Plaçons-nous encore dans le cas où $A_\alpha(x) \equiv 0$, $\alpha = 1,2,3,4$.

On a alors

$$m \equiv m_o(x), \qquad u_4 \equiv 1$$

Supposons que la fonction $m_o(x)$ soit de la forme

$$m_o(x) = \underline{m}_o + U(x)/c^2$$

où $\underline{m}_o$ est une constante que nous supposerons très grande devant $U(x)/c^2$ de façon à rendre licite l'approximation

$$m_o(x) \simeq \underline{m}_o$$

avec cependant

$$m_o(x)c^2 = U(x) + \text{constante}$$

On a ici

$$L(x,u) = -m_o c^2\left(1 - \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{u_\alpha^2}{c^2}\right) = \frac{1}{2}m_o\sum_{\alpha=1}^{3}u_\alpha^2 - m_o c^2$$

$$\frac{1}{2}\underline{m}_o\sum_{\alpha=1}^{3}u_\alpha^2 - U + \text{constante}$$

$$L(x,u+iw) = \frac{1}{2}m_o\sum_{\alpha=1}^{3}(u_\alpha+iw_\alpha)^2 - m_o c^2$$

Comme ε_4 est très petit, le Dalembertien $\Box$ se trouve remplacé par $-\nabla^2$, où ∇^2 est le Laplacien, d'où

$$H^* = L(x,u+iw) - \frac{\partial V^*}{\partial t} - \sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial V^*}{\partial x_\alpha}(u_\alpha+iw_\alpha) + i\frac{D_o}{2}\nabla^2 V^*$$

Maintenant, de (29) et (30) on déduit

$$\frac{\partial V^*}{\partial x_\alpha} = m_o(u_\alpha+iw_\alpha), \qquad \alpha = 1,2,3,$$

$$\frac{\partial V^*}{\partial t} + \frac{1}{2m_o}\sum_{\alpha=1}^{3}\left(\frac{\partial V^*}{\partial x_\alpha}\right)^2 - i\frac{D_o}{2}\nabla^2V^* + m_o c^2 = 0$$

d'où l'équation de Schrödinger

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{ih}{4\pi m_o}\nabla^2\psi + i\frac{2\pi}{h}(U+\text{constante})\psi = 0$$

Ces deux exemples illustrent notre propos du paragraphe 3

5. Retour à la Mécanique classique.

Définissons la Mécanique classique comme une Mécanique dans laquelle $\rho(x)$ est borné et

(32) $$\rho(x)D(x) \equiv \text{constante}$$

pour tout x dans Ω.

Du point de vue physique, celà revient à supposer que, en général

$$\rho(x)D(x) \equiv \text{constante} + f(x, \frac{h}{m}) , \qquad x \in \Omega$$

où la fonction $f(.) : (x, \varepsilon) \longmapsto f(x, \varepsilon)$ est telle que $f(x,\varepsilon) \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$ pour tout x dans Ω, de telle sorte que $f(x, h/m)$ peut être négligé à l'échelle classique.

De la définition de W(x) (Eq. (19)) et de (32) il résulte que

(33) $$W(x) \equiv \text{constante}$$

La relation (31) devient

(34) $$\beta^2 = \sum_{\alpha=1}^{3} u_\alpha^2/c^2 , \qquad u = u^s(x)$$

En séparant les parties réelles et imaginaires de (22) on obtient

(35) $$\frac{1}{c^2}\left(\left(\frac{\partial V}{\partial x_4} + e\Phi\right)^2 - \left(\frac{\partial W}{\partial x_4}\right)^2\right) - \sum_{\alpha=1}^{3}\left(\left(\frac{\partial V}{\partial x_\alpha} - \frac{e}{c}A_\alpha\right)^2 - \left(\frac{\partial W}{\partial x_\alpha}\right)^2\right) + \frac{h}{2\pi}\,\Box\, W = m_0^2c^2$$

(36) $$\frac{1}{c^2}\frac{\partial W}{\partial x_4}\left(\frac{\partial V}{\partial x_4} + e\Phi\right) - \sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial W}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial V}{\partial x_\alpha} - \frac{e}{c}A_\alpha\right) - \frac{h}{4\pi}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial x_4}\left(\frac{\partial V}{\partial x_4} + e\Phi\right) - \sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial V}{\partial x_\alpha} - \frac{e}{c}A_\alpha\right)\right) = 0$$

De (33) et (35) on déduit, dans l'espace-temps de l'observateur $\emptyset$ ($x_4 = t$)

(37) $$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial V}{\partial t} + e\Phi\right)^2 - \sum_{\alpha=1}^{3}\left(\frac{\partial V}{\partial x_\alpha} - \frac{e}{c}A_\alpha\right)^2 = m_0^2c^2$$

C'est l'équation de Hamilton-Jacobi de la Mécanique classique relativiste.

Les relations (16) et (17) restent valables avec β^2 donné par (34). Moyennant l'hypothèse 5, on en déduit, dans l'espace-temps de l'observateur $\emptyset$

(38) $$\frac{\partial V(x)}{\partial x_\alpha} = mu_\alpha + \frac{e}{c}A_\alpha = \frac{m_0u_\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{e}{c}A_\alpha , \qquad \alpha = 1,2,3$$

(39) $$\frac{\partial V(x)}{\partial t} = -mc^2 + \frac{e}{c}A_4 = -\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - e\Phi$$

De la relation (36) et de l'hypothèse 6 on déduit

(40) $$\Box\, V(x) = 0$$

ce qui conduit, en tenant compte de (38) et (39) à

(41) $$\sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(mu_\alpha) = 0$$

Comme $D = h/2\pi m$, on voit que la condition (32) s'écrit aus

(42) $$\frac{\rho(x)}{m(x)} \equiv \text{constante}$$

et, par conséquent, la relation (41) s'écrit

(43) $$\sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial(\rho u_\alpha)}{\partial x_\alpha} = 0 , \qquad u = u^s(x)$$

ce qui donne, dans l'espace-temps de l'observateur $\emptyset$

(44) $$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial(\rho\, u_\alpha)}{\partial x_\alpha} \quad , \qquad u = u^s(\underline{x},t)$$

C'est l'équation de continuité hydrodynamique valable, comme nous venons de le voir, pour le nuage de points-sources dans le cadre de la Mécanique classique.

Si l'on pose, comme dans (4)

(45) $$D^c(x)\ \rho^c(x) = k\ D^2(x)\ \rho^2(x), \qquad k \equiv \text{constante}$$

la condition (32) entraine

(46) $$\rho^c(x)\ D^c(x) \equiv \text{constante}$$

soit, comme $D^c = h/4\pi m$

(47) $$\frac{\rho^c(x)}{m(x)} \equiv \text{constante}$$

et on déduit de (41) une autre équation de continuité, c'est-à-dire

(48) $$\frac{\partial \rho^c}{\partial t} = - \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial(\rho^c u_\alpha)}{\partial x_\alpha} \quad , \qquad u = u^s(\underline{x},t)$$

Alors que les équations (41) et (44) ne sont valables que si la condition (32) est satisfaite, il est facile d'établir directement à partir de (36) que l'équation (48) est valable même quand la condition (32) n'est pas satisfaite, c'est-à-dire dans le cas général de la Mécanique ondulatoire. $\rho^c = \rho^c(x)$ est alors la densité de probabilité de position du corpuscule.

BIBLIOGRAPHIE

(1) A. BLAQUIERE, Comptes rendus, 268, série A, 1969, p. 1437.

(2) A. BLAQUIERE, Comptes rendus, 269, série B, 1969, p. 341.

(3) R. P. FEYNMAN et A. R. HIBBS, Quantum Mechanics and Path Integrals, McGraw-Hill, 1965.

(4) A. BLAQUIERE, J. Opt. Th. Appl., 27, n° 1, janvier 1979.

(5) A. BLAQUIERE, Comptes rendus, 288, série A, 1979, p. 319.