Annales de la Fondation Louis de Broglie - Vol. 4, n° 4, 1979

L'ENERGIE FOURNIE A UN CORPS EN MOUVEMENT DANS LA THEORIE DE LA RELATIVITE ET LE TENSEUR IMPULSION-ENERGIE D'UN FLUIDE COMPRESSIBLE

(Première partie)

par M. J. RICARD

49 rue du Docteur Blanche

75016 Paris

(manuscrit reçu le 16 Décembre 1978)

Symboles utilisés : voir en fin d'article.

Résumé : La variance en relativité d'une quantité d'énergie fournie à un corps en mouvement ayant fait l'objet de controverses, on étudie cette variance, soit dans le cas d'un fluide soumis à une compression, soit dans celui d'un gaz recevant de l'extérieur une certaine quantité de chaleur. On montre que le problème se résoud par une simple question de définition de l'énergie fournie dans le référentiel où le corps est en vitesse. On établit d'autre part le tenseur impulsion-énergie pour un fluide compressible.

Introduction

Dans cette année consacrée au Centenaire d'Einstein, il est sans doute opportun d'évoquer la question de la variance en relativité d'une quantité d'énergie thermique, ou plus généralement d'énergie non cinétique, reçue par un corps.

Dès l'origine de la théorie de la relativité, Einstein et Planck [1 à 3] ont admis en 1907 que

(I) $\quad dQ = dQ_0\sqrt{1 - \beta^2} \qquad \left(\beta = \frac{v}{c}\right)$,

dQ_0 étant l'énergie thermique fournie au corps considéré dans son référentiel R_0 où il est en repos, et dQ l'énergie dans le référentiel R par rapport auquel R_0 a la vitesse v ; et ceci a été adopté ensuite par beaucoup de physiciens [4 à 8]. Cependant, depuis 1963, plusieurs auteurs [9 à 14] ont mis cette relation en doute au profit de

(II) $\quad dQ = \dfrac{dQ_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$

Il est montré dans ce qui suit que cette controverse se résoud par une simple question de définitions, (II) s'appliquant à l'énergie totale acquise par le corps considéré, et (I) à cette énergie totale diminuée du travail nécessité par le maintien en vitesse du corps dans le repère R malgré l'augmentation de sa masse au repos équivalente à l'énergie qu'il reçoit dans le repère R_0. Ceci est vrai, que Q_0 désigne une énergie thermique, ou bien l'énergie de compression d'un fluide.

A vrai dire, la distinction entre les énergies intervenant dans I et II n'est pas nouvelle, et a été considérée notamment par Costa de Beauregard et De Sales Luis [15, 16] de même que par plusieurs des auteurs qui ont opté pour I ou II. Mais il n'est sans doute pas inutile de reprendre en détail les calculs d'établissement de I et II, ce qui a été fait aux § 1 et 3 pour une énergie de compression, et au § 6 pour une énergie thermique. Notre sentiment est qu'il est logique de définir l'énergie thermique d'un corps en mouvement, qui est essentiellement désordonnée, par l'excès de l'énergie totale sur l'énergie qu'aurait le corps si toutes ses molécules avaient la même vitesse égale à la vitesse d'entraînement v, ce qui conduit à (II). Mais c'est affaire de convention.

Il était intéressant d'autre part, d'établir le tenseur impulsion-énergie dans le cas d'un fluide compressible ; ce qui fait l'objet des § 4 et 5 après avoir examiné au § 2 le cas théorique où le fluide est incompressible. Ici, nous trouvons une différence par rapport au tenseur adopté par certains auteurs [7, 15, 17]. La raison en est que l'énergie de compression ne se définit sans ambiguité que dans le repère propre, R_0, et qu'il faut d'abord la calculer dans ce dernier, avant de passer au calcul dans le repère R.

§ 1. Compression

Le travail de compression d'un élément fluide peut se définir sans ambiguité dans le repère propre, c'est-à-dire le repère R_0 par rapport auquel l'élément a une vitesse nulle. Ce travail est égal à $-\int \pi \, d(\delta u_0)$, π étant la pression, et δu_0 le volume de l'élément. Avant de calculer le travail dans un autre repère R par rapport auquel l'élément a la vitesse $\vec{w}$, rappelons d'abord que la pression π est un scalaire invariant si l'élément ΔS de surface supportant la force de pression $\pi\Delta S$ est immobile dans le repère propre. En effet, supposant $\vec{w}$ parallèle à Ox, la composante de la force suivant Ox est égale à $\pi_0 \, \Delta S_{x_0}$, ΔS_{x_0} étant la projection de la surface sur le plan y O z. Le point d'application de la force dans R_0 étant immobile, la composante de la force dans le repère R, avec $\beta = \frac{w}{c}$ est

$$(1) \qquad F_x = \pi \, \Delta S_x = \frac{F_{x_0} + \frac{w}{c^2} \vec{F}_0 \vec{v}_0}{1 + \frac{w}{c^2} v_{x_0}} = F_{x_0} = \pi_0 \, \Delta S_{x_0} . \text{ Or } \Delta S_x = \Delta S_{x_0}$$

Donc $\pi = \pi_0$.

La composante de la force suivant Oy est

$$(2) \qquad F_y = \pi \, \Delta S_y = \frac{F_{y_0}\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{w}{c^2} v_{x_0}} = F_{y_0}\sqrt{1 - \beta^2} = \pi_0 \, \Delta S_{y_0}\sqrt{1 - \beta^2}$$

Mais ici $\Delta S_y = \Delta S_{y_0}\sqrt{1 - \beta^2}$. On a donc encore $\pi = \pi_0$ et de même pour F_z.

Pour calculer le travail de compression dans le repère R, il est essentiel de supposer que l'élément de fluide qui se déforme est immobile dans R_0. On va donc assimiler l'élément à un petit parallélépipède dont les faces A_1 et A_2 par exemple, perpendiculaires à Ox se déplacent en sens inverse d'une même longueur $x_{10}x'_{10} = x'_{20}x_{20} = \Delta x_0$, afin que le centre de gravité reste inchangé et qu'il n'y ait pas de travail de mise en vitesse de l'élément [10].

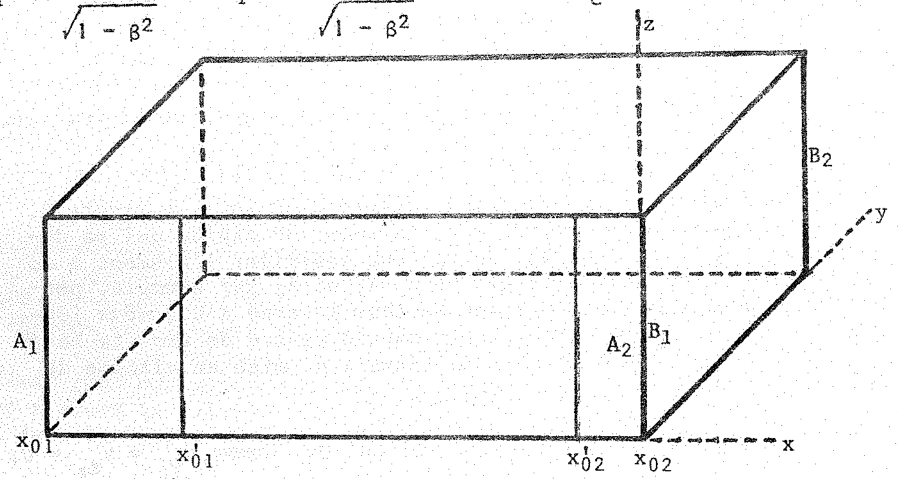
Considérons la compression suivant Ox. Comme $v_{y_0} = v_{z_0} = 0$, la formule de transformation de la force donnée ci-dessus, montre qu'on a encore $F_x = F_{x0}$ et $\pi = \pi_0$. Le travail dans R0 est $2\pi\ \delta y_0 \delta z_0\ \Delta x_0$ et s'effectue entre les instants t_0 et $\bar{t}'_0$. Plus exactement, il faut tenir compte de la variation de π avec δu_0 ou $x'_0 - x_0$. La fonction $\pi = f(\delta u_0)$ dépend du type de compression envisagé. Ici, nous nous limiterons à une compression adiabatique, c'est-à-dire que nous supposerons que l'élément ne reçoit ni ne cède de chaleur à l'environnement. Par exemple, pour un gaz parfait, on aurait $\pi\ \delta u_0^{\gamma} = C^{te}$, γ étant le rapport c_p/c_v des chaleurs spécifiques à pression et à volume constants. On écrira donc dans R_0

(3) $$(\tau_{p_0})_x = 2\int_{x_{01}}^{\bar{x}'_{01}} \pi(\delta u_0)\delta y_0 \delta z_0 dx'_{01} = 2\int_0^{\Delta\bar{x}_0} \pi(\delta u_0)\delta y_0 \delta z_0 d(\Delta x_0)$$

en appelant Δx_0 la différence $x'_{01} - x_{01}$, et $\Delta\bar{x}_0$ la valeur finale. τ_{p_0} est le travail de compression, c'est la variation d'énergie contenue dans l'élément. δu_0 est ici proportionnel à $x'_0 - x_0$. Le calcul suivant y et z est le même et au total $\tau_{p_0} = \int_0^{\Delta\delta u_0} \pi\ d\delta u_0$.

Dans le référentiel R, les compressions ne sont pas simultanées car la compression en A_1 se fait entre les instants

$$t_1 = \frac{t_0 + \frac{w}{c^2} x_{01}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{et} \quad t'_1 = \frac{\bar{t}'_0 + \frac{w}{c^2}\bar{x}'_{01}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{avec } \beta = \frac{w}{c},$$



et en A_2 entre les instants $t_2 = \dfrac{t_0 + \frac{w}{c^2}x_{02}}{\sqrt{1-\beta^2}}$ et $t'_2 = \dfrac{\bar{t}'_0 + \frac{w}{c^2}\bar{x}'_{02}}{\sqrt{1-\beta^2}}$ [1]. Mais, en supposant que dans R_0, l'élément ne subit aucune compression avant t_0 et après $\bar{t}'_0$, rien n'empêche de calculer séparément les deux travaux en A_1 et A_2, puis de les additionner. On obtient :

en A_1, $\pi\ dx'_1 = \pi \dfrac{dx'_{01} + w\ dt'_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \pi \dfrac{d(\Delta x_0) + w\ d\Delta t_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$, π étant fonction de Δx_{01}, donc aussi de Δt_0, car on peut considérer Δx_{01} comme fonction de Δt_0, d'où

$$\tau_{p_{A_1}} = \delta y_0 \delta z_0 \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left[\int_0^{\Delta\bar{x}_0} \pi\ d(\Delta x_{01}) + w\int_0^{\Delta\bar{t}_0} \pi\ d(\Delta t_0)\right];$$

en A_2, $\pi\ dx'_2 = \pi \dfrac{dx'_{02} + w\ dt'_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \pi \dfrac{-d\Delta x_{01} + w\ dt'_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$$\tau_{p_{A_2}} = -\delta y_0 \delta z_0 \int_{x_2}^{x_2+\Delta\bar{x}_2} \pi\ dx'_2 = \delta y_0 \delta z_0 \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left[\int_0^{\Delta\bar{x}_0} \pi\ d(\Delta x_{01}) - w\int_0^{\Delta\bar{t}_0} \pi\ d(\Delta t_0)\right].$$

D'où au total

(4) $$(\tau_p)_x = \frac{2}{\sqrt{1-\beta^2}}\delta y_0 \delta z_0 \int_0^{\Delta\bar{x}_0} \pi\ d(\Delta x_{01}) = \frac{(\tau_{p_0})_x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

---

[1] t'_2 est d'ailleurs toujours plus grand que t_1 car $t'_1 - t_2 = \dfrac{\Delta t_0 - \left(\frac{w}{c^2}\right)\Delta x_{10}}{\sqrt{1-\beta^2}}$. La vitesse de déplacement $\dfrac{\Delta x_{10}}{\Delta t_0}$ étant inférieure à c, de même que w, $\dfrac{w\frac{\Delta x_{10}}{\Delta t_0}}{c^2}$ est nécessairement plus petit que l'unité.

Considérons maintenant la compression suivant Oy. On a alors à partir des formules de transformation de la force données précédemment ($F_{x_0} = F_{z_0} = 0$)

$$F_y = F_{y_0}\sqrt{1 - \beta^2}\ , \quad F_x = \frac{w}{c^2}\frac{dy_0}{dt_0}F_{y_0} \quad \text{avec } F_{y_0} = \delta x_0 \delta z_0\ \pi.$$

On suppose, comme suivant Ox, que les deux forces opposées subissent des déplacements Δy_{01} et Δy_{02} égaux et de sens contraires.

Comme $dy = dy_0$, le travail suivant Oy est simplement

$$2\delta x_0\sqrt{1 - \beta^2}\ \delta z_0\int_0^{\Delta y_0}\pi\ d(\Delta y_0) = \sqrt{1 - \beta^2}(\tau_{p_0})_y.$$

Suivant Ox, les déplacements sont nuls dans R_0. Dans R, pour la face B_1, le déplacement est $\Delta x_1 = \dfrac{w\ \Delta t_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ et la force est $\delta x_0\delta z_0\ \dfrac{w}{c^2}\ \pi\ \dfrac{dy_{01}}{dt_0}$. Le travail correspondant est

$$(5) \qquad \frac{\delta x_0\delta z_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}\frac{w^2}{c^2}\int_0^{\Delta t_0}\pi\ \frac{d\Delta y_{01}}{d\Delta t_0}\ d\Delta t_0 = \frac{\beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}\ \frac{(\tau_{p_0})_y}{2}.$$

Sur la face B_2, la force change de sens et $\Delta y_{02} = -\Delta y_{01}$; le travail est le même. Au total, le travail correspondant dans R au travail de compression suivant Oy dans R_0 est donc

$$(6) \qquad (\tau_p)_y = \left[\sqrt{1 - \beta^2} + \frac{\beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}\right](\tau_{p_0})_y = \frac{(\tau_{p_0})_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Le calcul suivant Oz serait le même. Dans tous les cas, le travail τ_{p_0} se transforme en $\dfrac{\tau_{p_0}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, ce qui est satisfaisant ; l'énergie fournie à l'élément par la compression en R_0 se transforme comme toute espèce d'énergie.

Examinons maintenant la quantité de mouvement. Dans R_0, elle reste nulle puisque la force totale subie par l'élément reste constamment nulle. Dans R, les variations de quantité de mouvement égales à $\int F_{x_1}\ dt_1'$ et $\int F_{x_2}\ dt_2'$ ne sont pas simultanées, comme pour

les variations d'énergie, mais rien n'empêche de les calculer séparément et de les additionner. On obtient

$$\text{en } A_1 \qquad \pi\ dt_1' = \pi\ \frac{dt_0' + \frac{w}{c^2}\ dx_{01}'}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \pi\ \frac{d(\Delta t_0) + \frac{w}{c^2}\ d(\Delta x_0)}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

et la variation de quantité de mouvement est

$$P_{A_1} = \frac{\delta y_0\delta z_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}\left[\int_0^{\Delta t_0}\pi\ d(\Delta t_0) + \frac{w}{c^2}\int_0^{\Delta x_0}\pi\ d(\Delta x_0)\right]$$

en A_2, on a de même

$$-\pi\ dt_2' = -\pi\ \frac{dt_0' + \frac{w}{c^2}\ dx_{02}'}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \pi\ \frac{\frac{w}{c^2}\ d(\Delta x_0) - d(\Delta t_0)}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$P_{A_2} = \frac{\delta y_0\delta z_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}\left[\frac{w}{c^2}\int_0^{\Delta x_0}\pi\ d(\Delta x_0) - \int_0^{\Delta t_0}\pi\ d(\Delta t_0)\right]$$

au total

$$(7) \qquad (P)_x = \frac{2\delta y_0\delta z_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}\frac{w}{c^2}\int_0^{\Delta x_0}\pi\ d(\Delta x_{01}) = \frac{w}{c^2\sqrt{1 - \beta^2}}(\tau_{p_0})_x.$$

Suivant Oy, on a les mêmes expressions (en remplaçant $\delta y_0\delta z_0$ par $\delta x_0\sqrt{1 - \beta^2}\ \delta z_0$), mais Δx_{01} et Δx_{02} sont nuls. Il n'y a pas de quantité de mouvement, mais suivant Ox, on a l'impulsion des forces transformées de $F_{0_{y_1}}$ et $F_{0_{y_2}}$, lesquelles sont égales comme on l'a vu.

Comme $dt_1 = dt_2 = \dfrac{dt_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, on a donc

$$(P)_y = \frac{2\delta x_0\delta z_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}\frac{w}{c^2}\int_0^{\Delta t_0}\frac{d\Delta y_0}{d\Delta t_0}\ d\Delta t_0 = \frac{w}{c^2\sqrt{1 - \beta^2}}(\tau_{p_0})_y$$

et de même pour $(P)_z$, au total

$$P = \frac{w}{c^2\sqrt{1 - \beta^2}}\tau_{p_0}.$$

On voit, w étant constant, que la variation d'impulsion est celle qu'on obtiendrait en faisant correspondre à l'énergie τ_{p0} une masse au repos $\frac{\tau_{p0}}{c^2}$. Le travail fourni à l'élément pour maintenir la vitesse w pendant que la masse apparente augmente de $\frac{\tau_{p0}}{c^2}$ est $\int F\ w\ dt = w\ P = \frac{\beta^2}{1-\beta^2}\ \tau_{p0}$. Mais nous avons vu que l'énergie totale acquise par l'élément dans le référentiel R est $\frac{\tau_{p0}}{\sqrt{1-\beta^2}}$. On peut donc considérer que la différence

$$(8) \qquad \tau_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \tau_{p0} = \sqrt{1-\beta^2}\ \tau_{p0}$$

représente une énergie apparente de compression dans R, bien que l'énergie totale due à la compression soit $\frac{\tau_{p0}}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

L'analyse précédente a montré que le travail de compression τ_{p0} dans R_0 a un équivalent massique $\frac{\tau_{p0}}{c^2}$. On peut donc considérer que l'élément, en plus de sa masse au repos $m_0 = \delta u_0 \rho_0$ (ρ_0 étant la densité), possède une masse apparente $\frac{\delta u_0\ E_{p0}}{c^2}$, E_{p0} étant la densité d'énergie interne qui a les caractères d'une énergie potentielle. A vrai dire, $\delta u_0\ E_{p0}$ n'est défini qu'à une constante près et n'intervient que par ses variations. Pour pouvoir représenter la masse totale au repos par $\delta u_0 \left(\rho_0 + \frac{E_{p0}}{c^2}\right)$, il faudrait admettre que E_{p0} est nul au zéro de température absolue. Mais il faudrait alors définir m_0 pour T=0, l'élément pouvant contenir d'autres énergies potentielles (coulombienne, nucléaire, etc.). En fait, une masse au repos sans énergie potentielle ne pourrait se définir que pour une particule isolée, infiniment éloignée d'autres corps. Il serait donc plus correct d'appeler m_0 la masse totale. Nous conserverons cependant dans ce qui suit l'expression $\delta u_0 \left(\rho_0 + \frac{E_{p0}}{c^2}\right)$, ce qui permet d'exprimer la variation par $\frac{d\left(\delta u_0\ E_{p0}\right)}{c^2}$ qui seule intervient, $m_0 = \delta u_0\ \rho_0$ restant constant.

En raisonnant sur un élément différentiel de volume δu_0 dans R_0, l'équivalence masse/énergie permet de retrouver immédiatement les résultats précédents. On a en effet en désignant par $\vec{v}$ la vitesse dans R, *supposée constante*, et $\vec{f}'$ la force appliquée à l'élément par unité de volume :

$$f'_\ell\ \delta u = v_\ell \frac{d}{dt}\left[\delta u\left(\rho + \frac{E_p}{c^2}\right)\right] = v_\ell \frac{d}{dt}\left[\frac{\delta u_0\left(\rho_0 + \frac{E_{p0}}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\beta^2}}\right] = \frac{v_\ell}{c^2\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d}{dt}(\delta u_0\ E_{p0})$$

($\ell = x,y,z$)

d'où

$$f'_\ell\ v^\ell\ \delta u = \frac{v^2}{c^2\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d\ \tau_{p0}}{dt} \qquad \left(\beta = \frac{v}{c}\right)$$

D'autre part, τ_c étant le travail de compression dans R, la conservation de l'énergie donne

$$f'_\ell\ v^\ell\ \delta u + \frac{d\tau_c}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\delta u_0\left(\rho_0 c^2 + E_{p0}\right)}{\sqrt{1-\beta^2}}\right] = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d\tau_{p0}}{dt}.$$

D'où

$$(9) \qquad \frac{d\tau_c}{dt} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\frac{d\tau_{p0}}{dt} = \sqrt{1-\beta^2}\ \frac{d\tau_{p0}}{dt}.$$

La dérivée $\frac{d\left(\delta u_0 E_{p0}\right)}{dt_0} = \frac{d\tau_{p0}}{dt_0}$ peut se calculer par $\pi \frac{d\delta u_0}{dt_0} = \pi\ \delta u_0\ \partial_{\bar{\ell}}\ v_0^\ell$.

En appelant V^μ le quadrivecteur vitesse $\left(\frac{v^\ell}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{ic}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$, on a dans R_0 pour $v_0^\ell = 0$

$$(10) \qquad \partial_\ell\ V_0^\ell = \partial_\rho\ v_0^\ell \text{ et } \partial_{x_4}(V^4) = \frac{\partial}{\partial t_0} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}} = 0.$$ On peut donc écrire $\pi\frac{d\delta u_0}{dt_0} = \pi\ \delta u_0\ \partial_\mu V^\mu$ dans R_0 et comme cette expression est covariante, l'égalité est valable dans un repère quelconque et

ceci pour une vitesse v variable [1].

Dans le calcul précédent, nous avons désigné par f' la densité de force nécessaire pour maintenir en vitesse l'élément malgré l'apport d'une variation de masse $d(\rho_0\, E_{p_0}\, \delta u_0)$. Il y a là un paradoxe apparent, car comme aucune force n'est appliquée à l'ensemble de l'élément dans R_0, il semblerait à première vue qu'il devrait en être de même dans R. Cependant, il n'est pas douteux qu'une compression augmente la masse apparente ; par conséquent en l'absence d'une force appliquée dans R, l'élément ralentirait et la vitesse ne pourrait rester constante. Un cas analogue serait celui d'un corps en repos dans R_0, qui perdrait de l'énergie par un rayonnement isotrope et qui ne subirait aucune force. Dans R_1, il faudrait appliquer une force retardatrice pour maintenir la vitesse puisque la masse diminuerait.

---

[1] On peut encore s'en convaincre en partant de la formule classique $d(\delta u) = \delta u \operatorname{div} \overline{v}\, dt$. On remplace δu par $\delta u_0\sqrt{1-\beta^2}$, dt par $\frac{dt_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ et v^ℓ par $V^\ell\sqrt{1-\beta^2}$. On a $\sqrt{1-\beta^2}\, d(\delta u_0) - \delta u_0 \frac{v\, dv}{c^2\sqrt{1-\beta^2}} =$

$$\delta u_0 dt_0 \operatorname{div}\left(\vec{V}^\ell\sqrt{1-\beta^2}\right) = \delta u_0 dt_0\left(\sqrt{1-\beta^2}\operatorname{div}\vec{V}^\ell - \Sigma\, V^\ell \frac{v\,\frac{\partial v}{\partial \ell}/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

$$\frac{d(\delta u_0)}{\delta u_0 dt_0} = \partial_\ell\, V^\ell + \frac{v\,\frac{dv}{dt_0}/c^2}{1-\beta^2} - \Sigma\, V^\ell\,\frac{v\,\frac{\partial v}{\partial \ell}/c^2}{1-\beta^2}$$

ou en remplaçant

$$\frac{dv}{dt_0} \text{ par } \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{\partial v}{\partial \ell}V^\ell + \frac{\partial v}{\partial t}\right) = \frac{\partial v}{\partial \ell}V^\ell + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\frac{d(\delta u_0)}{\delta u_0 dt_0} = \partial_\ell\, V^\ell + \frac{v\,\frac{\partial v}{\partial t}}{c^2(1-\beta^2)^{3/2}}\; \partial_\ell\, V^\ell + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \partial_\ell\, V^\ell + \frac{\partial}{\partial x_4}\,\frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}} =$$

$$\partial_\mu\, V^\mu$$

CQFD

§ 2. Variation de vitesse

Nous allons maintenant examiner un cas tout différent, celui où il n'y a pas de compression dans R_0, mais où une différence de pression suivant Ox est appliquée à l'élément, laquelle va provoquer une variation de vitesse. On suppose donc $v_{01x} = v_{02x} = v_{0x} = 0$ mais $\frac{dv_{0x}}{dt} \neq 0$. Considérons un élément différentiel afin qu'on puisse poser $\pi_2 - \pi_1 = \frac{\partial \pi}{\partial x}\delta x$. Dans R_0, la force est

$$F_0 = \delta y_0 \delta z_0(\pi_1 - \pi_2) = -\delta u_0 \frac{\partial \pi}{\partial x_0}\text{, qui est la dérivée de}$$

l'impulsion $\frac{dP_0}{dt_0}$.

Dans R_1, en additionnant les deux impulsions non simultanées :

$$dP = \delta y_0 \delta z_0[\pi_1 dt_1 - \pi_2 dt_2] \text{ et comme } dt_1 = dt_2 = \frac{dt_0 + \frac{w}{c^2}dx_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

avec $\frac{dx_0}{dt_0} = 0$

$$(11) \qquad \frac{dP}{dt_0} = -\delta u_0 \frac{\partial \pi}{\partial x_0}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \text{ ou } \frac{dP}{dt} = -\delta u_0\frac{\partial \pi}{\partial x_0} = \frac{dP_0}{dt_0}\text{ , } dP = \frac{dP_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Le travail dans R_0 est

$$d\tau_0 = \delta y_0\, \delta z_0(\pi_1 - \pi_2)dx_0 = -\delta u_0 \frac{\partial \pi}{\partial x_0} v_0\, dt_0 = 0$$

et dans R_1

$$(12) \qquad d\tau = \delta y_0 \delta z_0(\pi_1 dx_1 - \pi_2 dx_2) \text{ et comme } dx_1 = dx_2 = \frac{dx_0 + v\,dt_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{v\, dt_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$(13) \qquad \frac{d\tau}{dt} = -\delta u_0 \frac{\partial \pi}{\partial x_0} v = v\,\frac{dP}{dt}$$

Comme

$$(14) \qquad \frac{dP_0}{dt_0} = \left(\rho_0 + \frac{E_{p_0}}{c^2}\right)\delta u_0 \frac{dv_0}{dt_0} \text{ et}$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\left(\rho + \frac{E_p}{c^2}\right)\delta u\; v\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\left(\rho_0 + \frac{E_{p_0}}{c^2}\right)\delta u_0\; v}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

et comme $\delta u_0 \, E_{p0}$ est invariable (pas de compression)

$$\frac{dP}{dt} = \left(\rho_0 + \frac{E_{p0}}{c^2}\right) \delta u_0 \, \frac{d}{dt}\left(\frac{v}{\sqrt{1 - \beta^2}}\right).$$

On peut vérifier que $\frac{dP_0}{dt_0} = \frac{dP}{dt}$ ou $\frac{dv_0}{dt_0} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v}{\sqrt{1 - \beta^2}}\right)$.

En effet, $\frac{d}{dt}\left(\frac{v}{\sqrt{1 - \beta^2}}\right) = \frac{\frac{dv}{dt}}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{\frac{v^2}{c^2} \frac{dv}{dt}}{(1 - \beta^2)^{3/2}} = \frac{\frac{dv}{dt}}{(1 - \beta^2)^{3/2}}$

En appelant provisoirement w la vitesse d'entraînement :

$$v = \frac{v_0 + w}{1 + \frac{v_0 w}{c^2}} \quad \text{et} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\frac{dv_0}{dt}}{1 + \frac{v_0 w}{c^2}} - \frac{(v_0 + w)}{\left(1 + \frac{v_0 w}{c^2}\right)^2} \frac{w}{c^2} \frac{dv_0}{dt} = \frac{dv_0}{dt}(1 - \beta^2)$$

pour $v_0 = 0$, $w = v$.

On a donc bien

$$(15) \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{v}{\sqrt{1 - \beta^2}}\right) = \frac{\frac{dv_0}{dt}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{dv_0}{dt_0}.$$

De même, comme $\frac{d\tau}{dt} = \left(\rho_0 c^2 + E_{p0}\right) \delta u_0 \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}\right)$ et à partir de (14) et (15), on vérifie que $\frac{d\tau}{dt} = v \frac{dP}{dt}$ suivant (13).

Ainsi, nous voyons que la dérivée de l'impulsion $\frac{dP}{dt}$ dans R_1 n'est pas égale à $-\delta u \frac{\partial \pi}{\partial x}$, mais à $-\delta u_0 \frac{\partial \pi}{\partial x_0} = - \frac{\delta u}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{\partial \pi}{\partial x_0}$, quantités qui ne sont pas égales. On a en effet

$$(16) \quad \frac{\partial \pi}{\partial x} = \frac{\partial \pi}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial x} + \frac{\partial \pi}{\partial t_0} \frac{\partial t_0}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}\left(\frac{\partial \pi}{\partial x_0} - \frac{\partial \pi}{\partial t_0} \frac{w}{c^2}\right)$$

De même, la variation du travail est $\frac{d\tau}{dt} = -\delta u_0 \frac{\partial \pi}{\partial x_0} v = - \frac{\delta u}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{\partial \pi}{\partial x_0} v$

et non pas $-\delta u \frac{\partial v}{\partial x} v$. On rencontre ici une circonstance analogue à celle de la compression sans mise en vitesse (§ 1). Là également,

il n'aurait pas été correct de calculer l'énergie totale fournie à l'élément par $\frac{d\tau}{dt} = \pi \frac{d(\delta u)}{dt} = \pi \, \delta u \, \partial_x v^x$ (en fait cette expression ne comprend pas l'énergie de maintien en vitesse malgré l'augmentation de masse due à la compression). On a en fait

$$\frac{d\tau}{dt} = \pi \frac{d\delta u_0}{\sqrt{1 - \beta^2} dt} = \frac{\pi \, \delta u \, \partial_x v^x}{1 - \beta^2}.$$

Dans les deux cas, il est nécessaire de passer par le calcul dans le repère propre R_0, par suite de la non simultanéité dans R des deux impulsions ou travaux synchrones dans R_0.

D'après (16), on arriverait d'ailleurs en calculant le travail dans R par $-\delta u \frac{\partial \pi}{\partial x} dx$ à un résultat absurde dans le cas d'un fluide incompressible, avec une pression uniforme dans R_0 et variant avec le temps. Dans ce cas, $\frac{\partial \pi}{\partial x_0}$ serait nul, mais $\frac{\partial \pi}{\partial t_0}$ ne le serait pas et pourrait être aussi grand qu'on veut. Dans ces conditions, il n'y a ni compression, ni mise en vitesse si le fluide est incompressible. Il ne peut donc y avoir d'énergie fournie à l'élément. Or on trouverait une énergie dans R aussi grande que l'on veut[1].

§ 3. Superposition d'une compression et d'une mise en vitesse

Nous allons maintenant établir les équations de mise en vitesse de l'élément en supposant qu'il y a non seulement une compression, mais aussi une force $\vec{F} = \vec{f} \, \delta u$ appliquée de l'extérieur (par gravité par exemple). Nous supposerons pour simplifier les calculs que cette force ainsi que le gradient de pression sont dirigés suivant Ox, direction d'entraînement du repère R_0 par rapport à R. Nous supposerons en outre qu'il s'agit d'un élément différentiel afin que suivant Ox par exemple, on puisse écrire $\pi_2 - \pi_1 = \frac{\partial \pi}{\partial x_0} \delta x_0$ et $v_{0x_2} - v_{0x_1} = \frac{\partial v_{0x}}{\partial x_0}$ en appelant π_0 la pression moyenne, et v_{0x} la vitesse moyenne, qui est nulle dans R_0, $\frac{dv_{0x}}{dt_0}$ n'étant pas nul bien entendu puisqu'il y a mise en vitesse.

On aura donc

$$(17) \quad \pi_{01} = \pi_0 - \frac{1}{2} \frac{\partial \pi}{\partial x_0} \delta x_0, \quad \pi_{02} = \pi_0 + \frac{1}{2} \frac{\partial \pi}{\partial x_0} \delta x_0,$$

[1] Voir toutefois la remarque à la fin du § 5.

$$v_{01x} = -\frac{1}{2}\frac{\partial v_{0x}}{\partial x_0}\,\delta x_0, \quad v_{02x} = -\frac{1}{2}\frac{\partial v_{0x}}{\partial x_0}\,\delta x_0.$$

Nous désignerons ci-dessous par w la vitesse d'entraînement de R_0 par rapport à R, avec $\beta = \frac{w}{c}$, quitte à faire ensuite $w = v_x$ dans le résultat.

Impulsion

Dans R_0, la variation d'impulsion est ($t_{01} = t_{02} = t_0$) :

$$(18) \quad dP_{0x} = \delta u_0\, f_0\, dt_0 + \delta y_0 \delta z_0 (\pi_1 - \pi_2) dt_0 = \delta u_0\, dt_0 \left(f_0 - \frac{\partial \pi}{\partial x_0}\right)$$

qui doit être égal à

$$(19) \quad dP_{0x} = d\left[\left(\rho_0 + \frac{E_{p0}}{c^2}\right)\delta u_0\, v_{0x}\right] = \left(\rho_0 + \frac{E_{p0}}{c^2}\right)\delta u_0\, dv_{0x} \text{ pour } v_{0x} = 0.$$

Dans R, la variation d'impulsion correspondant à F_{0x} est

$$(dP_x)_1 = \delta u_0\, f_0 \frac{dt_1 + dt_2}{2} + \delta y_0 \delta z_0 (\pi_1\, dt_1 - \pi_2\, dt_2)$$

$$= \frac{\delta u_0\, f_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(dt_0 + \frac{w}{c^2} dx_{01} + dt_0 + \frac{w}{c^2} dx_{02}\right)$$

$$+ \delta y_0 \delta z_0 \left[\pi_1\left(dt_0 + \frac{w}{c^2} dx_{01}\right) - \pi_2\left(dt_0 + \frac{w}{c^2} dx_{02}\right)\right]$$

$$= \frac{\delta u_0\, dt_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\left[f_0\left(1 + \frac{w}{c^2} v_{0x}\right) + \pi_1\left(1 + \frac{w}{c^2} v_{01}\right) - \pi_2\left(1 + \frac{w}{c^2} v_{02}\right)\right]$$

$$\left(\beta = \frac{w}{c} = \frac{v_x}{c}\right).$$

Soit d'après (17) en négligeant les quantités du 2e ordre et pour $v_{0x} = 0$

$$(dP_x)_1 = \frac{\delta u_0\, dt_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\left[f_0 - \frac{\partial \pi}{\partial x_0} - \pi \frac{w}{c^2}\frac{\partial v_{0x}}{\partial x_0}\right].$$

La variation d'impulsion correspondant à F_{0y}, avec $(F_{0x})_y = \delta x_0 \delta z_0 \frac{w}{c^2}\left(\pi_1 v_{0y1} - \pi_2 v_{0y2}\right)$ est

$$(dP_x)_y = \delta x_0 \delta z_0\, dt_0 \frac{w}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\pi_1 v_{0y1} - \pi_2 v_{0y2}\right) = -\delta u_0\, dt_0 \frac{w}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial v_{0y}}{\partial y_0}\pi$$

$$\left(dt_1 = dt_2 = \frac{dt_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

et de même pour $(dP_x)_z$ en changeant y en z. Au total, en remplaçant $\frac{dt_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ par dt et pour $w = v_x$

$$(20) \quad \frac{dP_x}{dt} = \delta u_0\left[f_0 - \frac{\partial \pi}{\partial x_0} - \pi \frac{v_x}{c^2}\,\partial_{\ell 0}\, v_0^{\ell}\right] \qquad \ell = x,y,z$$

qui doit être égal à

$$(21) \quad \frac{dP_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\delta u_0\left(\rho_0 + \frac{E_{p0}}{c^2}\right)v_x}{\sqrt{1-\beta^2}}\right] = \delta u_0\left(\rho_0 + \frac{E_{p0}}{c^2}\right)\frac{d}{dt}\left[\frac{v_x}{\sqrt{1-\beta^2}}\right]$$

$$+ \frac{v_x}{c^2}\frac{d}{dt_0}\left(\delta u_0\, E_{p0}\right).$$

Les deux premiers termes de (20) sont bien égaux au 1er terme de (21), d'après (15), (18) et (19). Le dernier terme de (20) est égal au 2e terme de (21) puisque $\frac{d}{dt_0}(\delta u_0\, E_{p0}) = \pi \frac{d\delta u_0}{dt_0} = \pi\, \delta u_0\, \partial_{\ell 0}\, v^{\ell 0}$.
Suivant Oy et Oz, l'impulsion est nulle aussi bien dans R que dans R_0 puisque $\pi_1 = \pi_2$ et $t_{01} = t_{02} = t_0$.

Energie

Dans R_0, suivant Ox, le travail est

$$(d\tau x)_0 = \delta_0\, f_0\, dx_0 + \delta y_0 \delta z_0 (\pi_{01}\, dx_{01} - \pi_{02}\, dx_{02}) = \delta u_0\, dt_0\left(f_0\, v^{0x} - \pi \frac{\partial v_{0x}}{\partial x_0}\right)$$

$$= -\delta u_0\, dt_0\, \pi \frac{\partial v_{0x}}{\partial x_0}$$

et suivant Oy et Oz

$$(d\tau y)_0 = \delta x_0 \delta z_0 (\pi_{01}\, dy_{01} - \pi_{02}\, dy_{02}) = \delta x_0 \delta z_0\, dt_0 (\pi_{01} v_{0y1} - \pi_{02} v_{0y2})$$

$$= -\delta u_0\, dt_0 \frac{\partial v_{0y}}{\partial y_0} \qquad \left(\frac{\partial \pi}{\partial y_0} = 0\right)$$

$$(d\tau z)_0 = -\delta u_0\, dt_0\, \pi \frac{\partial v_{0z}}{\partial y_0}$$

au total $d\tau = \delta u_0\, dt_0\left(f_0 - \pi\, \partial_{\ell_0} v^{\ell_0}\right) = \frac{d}{dt}\left[\frac{(\rho_0 c^2 + E_{p0})\delta u_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\right]$ avec $\beta = \frac{v}{c}$

(22) $$= \left(\rho_0 c^2 + E_{p0}\right)\delta u_0\, d\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\, d\left(\delta u_0\, E_{p0}\right) = d(\delta u_0\, E_0)$$

pour $v_0 = 0$.

Dans R, le travail correspondant à F_{0x} est

$$(d\tau_x)_1 = \delta u_0\, f_0\, \frac{dx_1+dx_2}{2} + \delta y_0 \delta z_0 (\pi_1\, dx_1 - \pi_2\, dx_2)$$

$$= \delta u_0\, f_0\, \frac{dx_{01}+wdt_0+dx_{02}+wdt_0}{2\sqrt{1-\beta^2}} + \delta y_0\delta z_0\left[\pi_1 \frac{dx_{01}+wdt_0}{\sqrt{1-\beta^2}} - \pi_2\frac{dx_{02}+wdt_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\right]$$

$$= \frac{\delta u_0\, f_0\, dt_0}{\sqrt{1-\beta^2}}(v_{0x} + w) + \delta y_0\delta z_0\left(\frac{\pi_1(w+v_{01x}) - \pi_2(w+v_{02x})}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

soit en négligeant les quantités du second ordre et pour $v_{0x} = 0$, $w = v_x$, d'après (17)

$$(d\tau_x)_1 = \frac{\delta u_0\, dt_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(f_0\, v_x - v_x\, \partial_{x_0}\pi - \pi\, \partial_{x_0} v_{0x}\right).$$

Le travail correspondant à F_{0y} et F_{0z} (calcul analogue à celui qui conduit à (5)) est

$$(d\tau_x)_y + (d\tau_x)_z = \delta x_0\delta z_0\, \frac{w^2/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}(\pi_1\, v_{0y_1} - \pi_2\, v_{0y_2})dt_0$$

$$+ \delta x_0\delta z_0\, \frac{w^2/c}{\sqrt{1-\beta^2}}(\pi_1\, v_{0z_1} - \pi_2\, v_{0z_2})dt_0$$

Soit pour $v_{0y} = v_{0z} = 0$, $w = v_x$

$$(d\tau_x)_y + (d\tau_x)_z = -\delta u_0\, dt_0\, \frac{\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\, \pi\left(\frac{\partial v_{0y}}{\partial y_0} + \frac{\partial v_{0z}}{\partial z_0}\right).$$

Suivant Oy, le travail dans R est, comme $F_y = \sqrt{1-\beta^2}F_{0y}$:

$$d\tau_y = \delta x_0\delta z_0(\pi_1\, dy_1 - \pi_2\, dy_2)\sqrt{1-\beta^2} = \delta x_0\delta z_0\, dt_0(\pi_1\, v_{01y} - \pi_2\, v_{02y})\sqrt{1-\beta^2}$$

$$= -\delta u_0\, dt_0\, \sqrt{1-\beta^2}\, \pi\, \frac{\partial v_{0y}}{\partial y_0}$$

et de même pour $d\tau_z$.

Au total, comme $\sqrt{1-\beta^2} + \frac{\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, et en remplaçant $\sqrt{1-\beta^2}dt_0$ par dt, on obtient

(23) $$\frac{d\tau}{dt} = \delta u_0\left(f_0\, v^x - \frac{\partial \pi}{\partial x_0}\, v^x - \pi\, \partial_{\ell_0} v^{\ell_0}\right) \qquad (\ell = x,y,z)$$

qui doit être égal à

(24) $$\frac{d\tau}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{(\rho_0 c^2 + E_{p0})\delta u_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\right] = \delta u_0(\rho_0 c^2 + E_{p0})\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{d}{dt}(\delta u_0 E_{p0})$$

Les derniers termes de (23) et (24) sont identiques. Ils représentent la puissance de compression si la vitesse restait constante. Si nous désignons par $d\tau_p$ la variation de l'énergie due à la compression à vitesse constante dans R et $(d\tau_p)_0 = d\tau_0$ dans R_0, on a donc $d\tau_p = \frac{d\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ conformément à ce qui a été trouvé au § 1. La différence

(25) $$d\tau_p - d\tau_0 = d\tau_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$$

représente l'énergie de mise en vitesse de 0 à v de la masse $\frac{d\tau_0}{c^2} = d\left(\delta u_0\, \frac{E_{p0}}{c^2}\right)$ équivalente à l'énergie de compression dans R_0.

Les autres termes de (23) et (24) doivent donc représenter l'énergie correspondant à la variation de vitesse sans compression. $\delta u_0\left(f_0 - \frac{\partial\pi}{\partial x_0}\right)$ est donc la force qui accélère la masse invariante $\delta u_0\left(\rho_0 + \frac{E_{p0}}{c^2}\right)$.

Mais d'un autre côté, il résulte de (20) que la force appliquée à l'élément est $\delta u_0\left(f_0 - \frac{\partial \pi}{\partial x_0} - \pi\, \frac{v_x}{c^2}\, \partial_{\ell_0} v^{\ell_0}\right)$. L'énergie totale correspondant à l'augmentation de l'impulsion dans R est donc

$$d\tau_v = \delta u_0 \left(v_x \left(f_0 - \frac{\partial \pi}{\partial x_0} \right) - \pi \frac{v_x^2}{c^2} \partial_{\ell 0} v^{\ell 0} \right) \frac{d t_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \delta u_0 \, v_x \left(f_0 - \frac{\partial \pi}{\partial x_0} \right)$$

$$+ \frac{\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}} d\tau_0$$

La différence est

$$(26) \quad d\tau_0 = d\tau - d\tau_v = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) d\tau_0 = \sqrt{1-\beta^2}\, d\tau_0$$

conformément à (8).

Autrement dit, comme nous l'avons vu au § 1, l'énergie totale due à la compression $\frac{d\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ se décompose en une énergie de compression apparente $\sqrt{1-\beta^2}d\tau_0$, et en une énergie correspondant au maintien en vitesse de l'élément malgré l'augmentation de masse $\frac{\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}} d\tau_0$.

Symboles utilisés :

F, force
f, densité de force
P, impulsion
v,w, vitesse
δu, élément de volume
ρ, densité
π, pression
τ, travail.

RÉFÉRENCES

[1] A. Einstein, Jahrb. d. Radioaktivität und Elektronik, 1907, 4 p. 411-462

[2] M. Planck, S.B. Preuss. Akad. Wiss, 1907, p. 542

[3] F. Hasenöhrl, S.B. Akad. Wiss. Wien, 116, 1907, p. 1391

[4] L. de Broglie, Cahiers de Physique, 31-32, Juin 1948, CR Acad. Sciences, t 262 série B, 9 Mai 1966, p . 1235 ; t 263 série B, p. 1351 ; t 265 série B, 21 Août 1967, p. 437 et 4 Septembre 1967, p. 589

[5] R.C. Tolman, Relativity Thermodynamics and Cosmology - Oxford - 1950

[6] M. von Laue, La théorie de la relativité, Traduction G. Letang

[7] Möller, The theory of relativity, Oxford, Clarendon Press. 1952

[8] W. Pauli, Theory of relativity, Londres 1958

[9] H. Ott, Z. Phys., 175, 1963, p. 70

[10] H. Arzelies, Nuovo Cimento, 35, 1965, p. 792

[11] A. Börs, Proc. Phys. Soc., 86, 1965, p. 1141

[12] A. Gamba, Nuovo Cimento, 37, 1965, p. 1792

[13] T.W.B. Kibble, Nuovo Cimento, 41, 1966, p. 72

[14] R. Marchal, CR Acad. Sciences, T262 série A, 1966, p. 282 ; Entropie-Juillet-Août 1966

[15] O. Costa de Beauregard, La théorie de la relativité restreinte, Masson 1949, p. 154

[16] A.C. de Sales Luis, Portugaliae physica, 8, 1973, p. 191-198

[17] M.A. Tonnelat, Les principes de la théorie électromagnétique et de la relativité, Masson 1959.