Annales de la Fondation Louis de Broglie - Vol. 5, n° 1, 1980

L'ÉNERGIE FOURNIE À UN CORPS EN MOUVEMENT DANS LA THÉORIE DE LA RELATIVITÉ ET LE TENSEUR IMPULSION-ÉNERGIE D'UN FLUIDE COMPRESSIBLE

(Deuxième partie)

par M. J. RICARD
49 rue du Docteur Blanche
75016 PARIS

(Pour la première partie, voir Vol. 4, n° 4, 1979, p. 243-261)

Points traités dans la première partie :

- *§ 1. Compression*
- *§ 2. Variation de vitesse*
- *§ 3. Superposition d'une compression et d'une mise en vitesse.*

La numérotation des paragraphes, des formules et des références bibliographiques de la deuxième partie fait exactement suite à la première.

§ 4. Etablissement d'un tenseur impulsion-énergie

Nous avons calculé les impulsions et les énergies dans le référentiel R en supposant que la force extérieure et le gradient de pression sont dirigés suivant Ox. Si leur direction était quelconque, on pourrait reprendre le calcul en faisant intervenir les formules de transformations pour une vitesse d'entraînement de R_0 par rapport à R non colinéaire à un des axes, mais le calcul serait plus compliqué. On peut éviter ce calcul en remarquant qu'on peut écrire les mêmes équations que (20) et (21) en remplaçant x par y ou z, β signifiant alors dans (21) $\frac{v}{c}$ [1]. Dans (23) on peut remplacer $f_0\, v^x$ par $\vec{f}_0.\vec{v}$ ou $f_{\ell 0}\, v^\ell$ et de même $(\partial_{x0}\,\pi)\, v^x$ par $(\partial_{\ell 0}\,\pi)\, v^{0\ell}$ ($\ell = x,y,z$), ce qui correspond à une rotation des axes, β signifiant aussi $\frac{v}{c}$ dans (24).

Les équations s'écrivent alors

$$\delta u_0\left(f_{\ell 0} - \frac{\partial\pi}{\partial_{\ell 0}} - \pi\,\frac{v_\ell}{c^2}\,\partial_{k0}\, v^{0k}\right) = \frac{d}{dt}\left(\delta u\left[\rho + \frac{E_p}{c^2}\right]v^\ell\right) \tag{27}$$

$$\delta u_0\left(f_{\ell 0}v^\ell - \left[\partial_{\ell 0}\pi\right]v^\ell - \pi\,\partial_{k0}\, v^{0k}\right) = \frac{d}{dt}\left(\left[\rho c^2 + E_p\right]\delta u\right). \tag{28}$$

Les deuxièmes membres peuvent être transformés suivant la technique classique pour faire apparaître un tenseur en écrivant [7] [15] ($\ell,k = x,y,z$)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\delta u\left[\rho + \frac{E_p}{c^2}\right]v^\ell\right) &= \delta u\,\frac{d}{dt}\left\{\left[\rho + \frac{E_p}{c^2}\right]v^\ell\right\} + \left[\rho + \frac{E_p}{c^2}\right]v^\ell\,\frac{d}{dt}(\delta u)\\ &= \delta u\left\{\partial_k\left(\left[\rho + \frac{E_p}{c^2}\right]v^\ell\right)v^k + \partial_t\left(\left[\rho + \frac{E_p}{c^2}\right]v^\ell\right)\right.\\ &\quad\left. + \left[\rho + \frac{E_p}{c^2}\right]v^\ell\,\partial_k\, v^k\right\}\\ &= \delta u\left\{\partial_k\left(\left[\rho + \frac{E_p}{c^2}\right]v^\ell v^k\right) + \partial_t\left(\left[\rho + \frac{E_p}{c^2}\right]v^\ell\right)\right\},\end{aligned}$$

ou en introduisant le quadrivecteur $V = \left(\frac{v^\ell}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$ et rempla-

[1] Les équations précédentes étant écrites dans des coordonnées où $v_y = v_z = 0$, $f_y = f_z = 0$, $\frac{\partial\pi}{\partial_{y0}} = \frac{\partial\pi}{\partial_{z0}} = 0$, si on change les axes en Ox',y',z' tels que α, β, γ soient les cos directeurs de Ox, on a $f_{0x'} = \alpha\, f_{0x}$, $v_{x'} = \alpha\, v_x$ et $\partial_{x'_0}\,\pi = \alpha\,\partial_{x_0}\,\pi$ puisque $\partial_{x'_0}\,\pi = \partial_{x_0}\pi\,\partial_{x'_0}x_0$ et que $\partial_{x'_0}x_0 = \alpha$. (20) et (21) se transforment donc en (27) pour $\ell = x$, et de même pour y et z. D'ailleurs, $f_{\ell 0}\,v^\ell$, $(\partial_{\ell 0}\pi)v^\ell$ et $\partial_{\ell 0}\,v^{0\ell}$ restent inchangés dans la rotation des axes.

çant $\rho + \frac{E_p}{c^2}$ par $\dfrac{\left(\rho_0 + \frac{E_{p0}}{c^2}\right)}{(1-\beta^2)}$ et t par $\frac{x_4}{ic}$:

$$\frac{d}{dt}\left(\delta u\left[\rho + \frac{E_p}{c^2}\right]v^\ell\right) = \delta u\left\{\partial_k\left(\left[\rho_0 + \frac{E_{p0}}{c^2}\right]v^\ell v^k\right) + \partial_{x4}\left(\left[\rho_0 + \frac{E_{p0}}{c^2}\right]v^\ell v^4\right)\right\}.$$

De même

$$\frac{d}{dt}\left(\delta u(\rho c^2 + Ep)\right) = \delta u\left\{\left(\partial_k(\rho c^2 + Ep)\right)v^k + \partial_t(\rho c^2 + Ep)\right\}$$

$$+ (\rho c^2 + Ep)\delta u\,\partial_k v^k = \delta u\left(\partial_k\left((\rho c^2 + Ep)v^k\right) + \partial_t(\rho c^2 + Ep)\right)$$

et en multipliant par $\frac{i}{c}$ et remplaçant t par $\frac{x_4}{ic}$

$$\frac{i}{c}\frac{d}{dt}\left(\delta u(\rho c^2 + Ep)\right) = \delta u\left\{\partial_k\left(\left[\rho_0 + \frac{E_{p0}}{c^2}\right]v^4 v^k\right) + \partial_{x4}\left(\left[\rho_0 + \frac{E_{p0}}{c^2}\right]v^4 v^4\right)\right\}. \tag{29}$$

En l'absence de force extérieure et en négligeant la pression π et l'énergie potentielle Ep, (27) et (28) s'écrivent en appelant T^{ij} le tenseur symétrique $\left[\rho_0 + \frac{E_{p0}}{c^2}\right]v^i v^j$

$$\partial_j\, T^{ij} = 0 \qquad i,j = 1,2,3,4.$$

L'équation $\partial_j\, T^{\ell j} = \partial_k\, T^{\ell k} + \partial_4\, T^{\ell 4} = 0$ $\quad k,\ell = 1,2,3$ $\quad (T^{\ell 4} = ic\,\rho\, v^\ell)$

exprime la conservation de l'impulsion, le premier terme égal à $\partial_k(\rho\, v^\ell\, v^k)$ représentant la divergence de la densité de flux d'impulsion suivant ℓ et le deuxième égal à $\frac{\partial}{\partial t}(\rho\, v^\ell)$ représentant la dérivée partielle par rapport au temps de l'impulsion suivant ℓ.

L'équation $\quad \partial_j T^{4j} = \partial_k T^{4k} + \partial_4 T^{44} = 0 \quad (T^{4k} = \frac{i}{c}\rho\, v^k,\ T^{44} = -\rho c^2)$

exprime la conservation de l'énergie, le premier terme égal à $\frac{i}{c}\,\partial_k(\rho c^2 v^k)$ représentant la divergence de la densité de flux d'énergie multipliée par $\frac{i}{c}$ et le deuxième égal à $\frac{i}{c}\,\partial_t(\rho c^2)$ représentant la dérivée partielle de la densité d'énergie multipliée par $\frac{i}{c}$.

Convertissons maintenant les premiers membres de (27) et (28) en grandeurs exprimées dans R. Remplaçons δu_0 par $\frac{\delta u}{\sqrt{1-\beta^2}}$. La force extérieure étant $\delta u_0\, f_{\ell_0}$ dans R_0 et étant inchangée dans R puisque son point d'application dans R_0 est sans vitesse, $\delta u_0\, f_{\ell_0} = \delta u\, f_\ell$. D'autre part, en utilisant (16)

$$(30) \qquad \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\frac{\partial\pi}{\partial\ell_0} = \frac{\partial\pi}{\partial\ell} + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\frac{\partial\pi}{\partial t_0}\,\frac{v_\ell}{c^2}$$

et

$$\frac{\partial\pi}{\partial t_0} = ic\,\frac{\partial\pi}{\partial x_{04}} = v_{04}\,\frac{\partial\pi}{\partial x_{04}} + v^{0\ell}\partial_{\ell_0}\pi \text{ dans } R_0 \text{ puisque } v^{0\ell} \text{ est}$$

nul.

$v^{0i}\,\partial_{i_0}\pi = V^{0i}\,\partial_{i_0}\pi$ étant un scalaire, on a dans un référentiel quelconque $\frac{\partial\pi}{\partial t_0} = V^i\,\partial_i\pi$. On peut le vérifier facilement en utilisant les formules de transformation pour une vitesse d'entraînement non parallèle à un des axes, qui donnent

$$\frac{\partial x_4}{\partial x_{04}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \frac{\partial\ell}{\partial\ell_0} = -\frac{ic\,v_\ell}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

d'où $ic\,\frac{\partial\pi}{\partial x_{04}} = ic\,\frac{\partial\pi}{\partial x_4}\,\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{\partial\pi}{\partial\ell}\,\frac{v_\ell}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\partial\pi}{\partial x_4}\,V^4 + (\partial_\ell\pi)V^\ell = V^i\partial_i\pi.$

Le premier membre de (27) s'écrit donc puisque d'après (10) $\partial_{\ell_0}v^{0\ell} = \partial_i V^i$

$$(31) \quad \delta u\left(f_\ell - \frac{\partial\pi}{\partial\ell} - \frac{V_\ell}{c^2}\,V^i\partial_i\pi - \frac{V_\ell}{c^2}\pi\partial_i\,V^i\right) = \delta u\left(f_\ell - \frac{\partial\pi}{\partial\ell} - \frac{V_\ell}{c^2}\,\partial_i(\pi V^i)\right).$$

Les mêmes transformations appliquées à (28) donnent en multipliant par $\frac{i}{c}$

$$\frac{i}{c}\delta u\left\{f_\ell v^\ell - (\partial_\ell\pi)v^\ell - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left[\frac{\partial\pi}{\partial t_0}\,\frac{v^2}{c^2} + \pi\partial_i V^i\right]\right\}$$

$$= \delta u\left\{\frac{i}{c}(f_\ell - \partial_\ell\pi)v^\ell - \frac{V^4}{c^2}\left[\frac{v^2}{c^2}\,V^i\partial_i\pi + \pi\partial_i V^i\right]\right\}.$$

Mais $-\frac{V^4}{c^2}\left(\frac{v^2}{c^2}\,V^i\partial_i\pi + \pi\partial_i V^i\right) = -\frac{V^4}{c^2}\partial_i(\pi V^i) + \frac{V^4 V^i}{c^2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\partial_i\pi$

$$= -\frac{V^4}{c^2}\,\partial_i(\pi V^i) + \frac{i}{c}\,v^i\partial_i\pi.$$

Le premier membre devient, divisé par δu et en posant $f_4 = \frac{i}{c}\,f_\ell\,v^\ell$

$$(32) \quad f_4 - \frac{i}{c}\left((\partial_\ell\pi)v^\ell - (\partial_i\pi)v^i\right) - \frac{V_4}{c^2}\,\partial_i(\pi V^i) = f_4 + \frac{i}{c}(\partial_4\pi)v^4 - \frac{V^4}{c^2}\partial_i(\pi V^i)$$

$$= f_4 - \partial_4\pi - \frac{V^4}{c^2}\,\partial_i(\pi V^i).$$

(31) divisé par δu et (32) forment un quadrivecteur ϕ^i qui a dimension d'une densité de force. C'est clair pour le terme $(\partial_\ell\pi,\ \partial_4\pi)$ qui est la quadridérivée d'un scalaire et pour le dernier terme qui est le produit de la quadrivitesse par un scalaire. En ce qui concerne (f_ℓ, f_4) c'est aussi un quadrivecteur. En effet si on écrit $F_\ell = \delta u f_\ell = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v^\ell}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$, m_0 étant la masse au repos d'un élément fluide sans influence de la pression, on a

$$f_\ell = \frac{m_0}{\delta u\ dt}\,d\,V^\ell = \frac{m_0}{\delta u_0}\,\frac{dV^\ell}{dt_0}$$

qui forme un quadrivecteur avec

$$\frac{m_0\,dV^4}{\delta u_0\,dt_0} = \frac{m_0}{\delta u_0}\,\frac{d}{dt_0}\left(\frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \frac{i\ m_0\ v\,\frac{dv}{dt}}{\delta u_0\ c(1-\beta^2)^{3/2}}$$

qui est égal à $\frac{i}{c} f_\ell v^\ell = \frac{i\, m_0 v^\ell}{c\,\delta u_0}\frac{d}{dt_0}\left(\frac{v_\ell}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \frac{i\, m_0}{c\,\delta u_0}\left(\frac{v\,\frac{dv}{dt}}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{\frac{v^2}{c^2}\, v\, \frac{dv}{dt}}{(1-\beta^2)^{3/2}}\right)$

$$= \frac{i\, m_0\, v\, \frac{dv}{dt}}{\delta u_0 c\,(1-\beta^2)^{3/2}} \;;$$

Ce quadrivecteur est d'ailleurs orthogonal à la quadrivitesse car

$$f_\ell\, V^\ell + \frac{i}{c} f_\ell\, v^\ell\, V^4 = f_\ell\, V^\ell - f_\ell\, V^\ell = 0.$$

En définitive, (27) et (28) se résument en

(33) $$\boxed{\phi^i = \partial_j T^{ij} \quad \text{avec} \quad \phi^i = f^i - \partial_i \pi - \frac{V^i}{c^2}\,\partial_j(\pi\, V^j) \qquad T^{ij} = \left(\rho_0 + \frac{E_{p0}}{c^2}\right) V^i\, V^j}$$

§ 5. Comparaison avec les résultats publiés

La plupart des auteurs ont donné pour le tenseur impulsion-énergie des expressions différentes, à savoir [7][15][17] :

(34) $$f^i = \partial_j S^{ij} \quad \text{avec} \quad S^{ij} = \left(\rho_0 + \frac{\pi}{c^2}\right) V^i\, V^j + \pi\, \delta^{ij}$$

où ρ_0 désigne ici la densité totale au repos, c'est-à-dire $\rho_0 + \frac{E_{p0}}{c^2}$ et $\delta^{ij} = 0$ pour $i \neq j$ et 1 pour $i = j$. Nous allons exposer, en le simplifiant un peu, le calcul de Möller (qui est d'ailleurs fait dans le cas de l'élasticité où $\pi\, \delta^{i\ell}$ est remplacé par un tenseur $t^{i\ell}$) afin d'expliquer la différence. On appelle S^{ij} un tenseur tel que $\partial_j S^{ij} = 0$ représente la conservation de l'impulsion pour i = 1, 2, 3 et la conservation de l'énergie pour i = 4, la force extérieure $f\, \delta u$ étant supposée nulle. Appelant P_ℓ la densité d'impulsion, on écrit *directement dans le référentiel R*, pour f = 0

(35) $$\frac{d}{dt}\left(P_\ell\, \delta u\right) = -(\partial_\ell\, \pi)\,\delta u$$

ou $$\delta u\left(\frac{\partial P_\ell}{\partial t} + \frac{\partial P_\ell}{\partial k}\, v^k\right) + P_\ell\, \delta u\, \partial_k\, v^k + \delta u\, \partial_\ell \pi = 0.$$

$$\frac{\partial P_\ell}{\partial t} + \partial_k(P^\ell\, v^k + \pi\, \delta^{\ell k})$$

(36) est équivalent à $\partial_j\, S^{\ell j}$ si $S^{\ell j} = P^\ell\, v^j + \pi\, \delta^{\ell j}$ avec $S^{\ell 4} = ic\, P^\ell$.

D'autre part, si on multiplie S^{ij} par V_j, on doit obtenir par contraction un vecteur X^i. Mais dans R_0, tous les V^ℓ sont nuls, $S^{ij}\, V_j$ se réduit à $V_4\, S^{i4} = X^i$ qui pour i = 4 donne −h ic, S^{44} devant être égal à −h, h étant la densité d'énergie, et pour $i = \ell$,

(37) donne 0. On peut donc écrire dans R_0, $S^{ij}\, V_j = -h_0\, V^i$, et comme cette relation est covariante, elle est vraie dans un référentiel quelconque. Comme dans R_0, $h_0 = \rho_0\, c^2$, densité d'énergie au repos, on a donc

$$S^{ij}\, V_j = -\rho_0\, c^2\, V^i \quad \text{et aussi} \quad S^{ij}\, v_j = -\rho_0\, c^2\, v^i$$

(38) ou $$S^{\ell j}\, v_j + \delta^{\ell 4}\, v_4 = -\rho_0\, c^2\, v^\ell \quad \text{avec} \quad S^{\ell 4}\, v^4 = ic\, P^\ell\, ic = -c^2\, P^\ell.$$

Remplaçant dans (35) la valeur de $S^{\ell j}$ tiré de cette relation, on obtient

(39) $$P^\ell = \frac{\left(\rho_0 + \frac{\pi}{c^2}\right) v^\ell}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

(40) et $$S^{\ell j} = \frac{\left(\rho_0 + \frac{\pi}{c^2}\right) v^\ell\, v^j}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \pi\, \delta^{\ell j} = \left(\rho_0 + \frac{\pi}{c^2}\right) V^\ell\, V^j + \pi\, \delta^{\ell j}$$

qui est l'expression annoncée pour $i = \ell$.

De même, pour l'énergie, on écrit *directement dans le référentiel R*, h étant la densité d'énergie :

$$(41)\quad \frac{d}{dt}(h\,\delta u) = \frac{\partial h}{\partial t}\,\delta u + h\,\delta u\,\partial_\ell\, v^\ell + (\partial_\ell\, h)v^\ell\,\delta u = -\partial_\ell(v^\ell\,\pi)\delta u,$$

le deuxième membre représentant la variation des travaux par unité de temps des forces de pression sur l'élément, qui se décompose en $-\pi\,\partial_\ell\, v^\ell\,\delta u$, travail de compression, et $-v^\ell\,\partial_\ell\,\pi\,\delta u$, travail provoquant la variation de vitesse. On a donc

$$(42)\qquad \frac{\partial h}{\partial t} + \partial_\ell\left[(h+\pi)v^\ell\right] = 0.$$

S^{44} devant être égal à $-h$, le premier terme, multiplié par $\frac{i}{c}$ donne $\frac{i}{c}\left(-\frac{\partial S^{44}}{\partial t}\right) = \frac{\partial S^{44}}{\partial_4}$. Le deuxième, multiplié par $\frac{i}{c}$ doit donc donner $\partial_\ell(S^{4\ell})$, d'où $S^{4\ell} = \frac{i}{c}(h+\pi)v^\ell$. En utilisant à nouveau (35) pour $i = 4$, soit

$$S^{4\ell}\, v_\ell + \delta^{44}\, ic = -\rho_0\, c^2\, ic, \quad \text{on a}$$

$$\frac{i}{c}(h+\pi)v^\ell\, v_\ell - h\, ic = -\rho_0\, c^2\, ic,\quad h(v^2 - c^2) = -\rho_0\, c^4 - \pi\, v^2,$$

$$(43)\qquad h = \frac{\rho_0\, c^2 + \frac{\pi}{c^2}\, v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

et

$$(44)\quad S^{4\ell} = \frac{i}{c}\left(\frac{\rho_0\, c^2 + \frac{\pi}{c^2}\, v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \pi\right)v^\ell = \frac{\left(\rho_0 + \frac{\pi}{c^2}\right) ic\, v^\ell}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \left(\rho_0 + \frac{\pi}{c^2}\right)V^4 V^\ell$$

auquel on peut ajouter $\pi\,\delta^{4\ell}$ qui est nul

$$(45)\quad \text{et } S^{44} = -h = -\left(\rho_0 + \frac{\pi}{c^2}\right)\frac{c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \pi = \left(\rho_0 + \frac{\pi}{c^2}\right)V^4V^4 + \pi\,\delta^{44}$$

qui sont les expressions annoncées pour $i = 4$.

On voit que le résultat (34) résulte essentiellement de ce que les équations de conservation de l'impulsion et de l'énergie en (35) et (41) ont été écrites directement dans le référentiel R ainsi que nous l'avons souligné ci-dessus. Or ceci est erroné

ainsi que nous l'avons analysé en détail aux § 1 et 2. L'influence de la pression, en outre de la modification de ρ_0 par l'adjonction de la masse équivalente à l'énergie potentielle $\frac{E_{p0}}{c^2}$, ne doit pas intervenir par le terme $\frac{\pi}{c^2}\, v^\ell$ ou $\frac{\pi}{c^2}\, v^2$ dans (39) et (43). Elle intervient dans l'expression de la densité de force modifiée ϕ^i, la partie en $\pi\,\partial_j\, V^j$ provenant de la compression, et la partie $V^j\,\partial_j\,\pi$ ainsi que $-\partial_i\,\pi$ correspondant à une variation de vitesse. Le terme $-\partial_i\,\pi$ de (33) peut être transféré dans T^{ij} en écrivant $T^{ij} = \left(\rho_0 + \frac{E_{p0}}{c^2}\right)V^i\, V^j + \pi\,\delta^{ij}$ puisque $\partial_j(\pi\,\delta^{ij}) = \partial_i\,\pi$.

Pour préciser la nature de la différence entre (33) et (34), nous allons revenir aux formes (27) et (28). Pour l'équation des impulsions, nous avons d'après (33)

$$(46)\quad \delta u_0\left(f_{\ell 0} - \frac{\partial\pi}{\partial_{\ell 0}} - \pi\frac{V_\ell}{c^2}\,\partial_{k_0}\, V^{0k}\right) = \delta u_0\left(\rho_0 + \frac{E_{p0}}{c^2}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{v^\ell}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) + \frac{v^\ell}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta u_0 E_{p0}}{c^2}\right).$$

D'après (34), $\frac{E_{p0}}{c^2}$ devant être ajouté à ρ_0

$$\delta u\left(f_\ell - \frac{\partial\pi}{\partial\ell}\right) = \delta u\left\{\partial_j T^{\ell j} + \partial_j\left(\frac{\pi}{c^2}\, V^\ell\, V^j\right)\right\}$$

ou

$$\delta u\left(f_\ell - \frac{\partial\pi}{\partial\ell} - \frac{V^\ell}{c^2}\,\partial_j(\pi\, V^j)\right) = \delta u\left(\partial_j T^{\ell j} + \frac{\pi}{c^2}\, V^j\,\partial_j\, V^\ell\right).$$

Le terme

$$\delta u\,\frac{\pi}{c^2}\, V^j\partial_j V^\ell \text{ est égal à } \delta u\,\frac{\pi}{c^2}\left\{\frac{v^k}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\partial_k\,\frac{v^\ell}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\partial_{ict}\left[\frac{v^\ell}{\sqrt{1-\beta^2}}\right]\right\}$$

$$= \delta u_0\,\frac{\pi}{c^2}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{v^\ell}{\sqrt{1-\beta^2}}\right).$$

Par conséquent, en revenant à la forme analogue à (27) suivant la transformation inverse de celle du § 5 :

$$(47)\quad \delta u_0\left(f_{\ell_0} - \frac{\partial\pi}{\partial_{\ell_0}} - \pi\,\frac{v^\ell}{c^2}\,\partial_{k_0}\,v^{0k}\right) = \delta u_0\left(\rho_0 + \frac{E_{p0}}{c^2} + \frac{\pi}{c^2}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{v^\ell}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

$$+\ \frac{v^\ell}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta u_0\, E_{p0}}{c^2}\right).$$

On voit que (47) diffère de (46) par l'adjonction du terme

$$\delta u_0\,\frac{\pi}{c^2}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{v^\ell}{\sqrt{1-\beta^2}}\right).$$

De même, pour l'équation des énergies, on a d'après (33)

$$(48)\quad \delta u_0\left(f_{\ell_0}v^\ell - (\partial_{\ell_0}\pi)v^\ell - \pi\partial_{\ell_0}v^{0\ell}\right) = \delta u_0\left(\rho_0 c^2 + E_{p0}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

$$+\ \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\frac{d}{dt}(\delta u_0\, E_{p0})$$

et d'après (34)

$$\delta u\left(f_4 - \frac{\partial\pi}{\partial_4}\,\frac{V^4}{c^2}\,\partial_j(\pi V^j)\right) = \delta u\left(\partial_j T^{4j} + \frac{\pi}{c^2}\,V^j\,\partial_j\,V^4\right).$$

Le terme $\delta u\,\frac{\pi}{c^2}\,V^j\,\partial_j\,V^4$ est égal à

$$\delta u\,\frac{\pi}{c^2}\,\frac{v^k}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\partial_k\,\frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\partial_{ict}\left(\frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \delta u_0\,\pi\,\frac{i}{c}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

d'où en revenant à la forme analogue à (28) :

$$(49)\quad \delta u_0(f_{\ell_0}v^\ell - (\partial_{\ell_0}\pi)v^\ell - \pi\,\partial_{\ell_0}\,v^{0\ell})$$

$$= \delta u_0(\rho_0 c^2 + E_{p_0} + \pi)\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\frac{d}{dt}(\delta u_0\, E_{p_0}).$$

On voit que (49) diffère de (48) par l'adjonction du terme

$$\delta u_0\,\pi\,\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right).$$

Si $\vec{v}$ qui est la vitesse moyenne de l'élément dans le référentiel R était invariable, les deux résultats (46), (48), et (47), (49) seraient identiques. Seuls interviendraient alors les derniers termes de chacun des membres des quatre équations. Mais si $\vec{v}$ est variable, il n'en est plus de même et les termes supplémentaires de (47) et (49) ne se justifient pas, ainsi qu'il résulte de la discussion des § 2 et 3. Il est visible d'ailleurs qu'ils conduiraient à une contradiction dans le cas d'un fluide incompressible. Dans ce cas, il n'y a pas d'énergie potentielle de compression, la masse apparente au repos ne varie pas, et il n'y a aucune raison pour que l'augmentation de la pression nécessite une augmentation de la force ou du travail pour une accélération de l'élément.

A vrai dire, un fluide ne peut être rigoureusement incompressible, car la vitesse du son $\sqrt{\frac{d\pi}{d\rho_0}}$ deviendrait infinie. Mais en satisfaisant $d\pi < c^2\, d\rho_0$, on peut encore obtenir une variation de $\delta u_0\,\frac{\pi}{c^2}$, en plus de la variation de $\frac{\delta u_0\, E_{p0}}{c^2}$, à savoir

$$\frac{1}{c^2}\,d(\pi\,\delta u_0) = \frac{1}{c^2}(\pi\,d\,\delta u_0 + \delta u_0\,d\,\pi) = \frac{1}{c^2}\left[d(\delta u_0\, E_{p_0})\right] + \frac{1}{c^2}\,\delta u_0\,d\,\pi$$

qui arriverait donc à doubler la variation de masse $\frac{1}{c^2}\,d(\delta u_0\, E_{p_0})$

et de plus d'augmenter la masse d'un terme $\frac{1}{c^2}\,\delta u_0\,d\,\pi < \delta u_0\,d\rho_0$,

ce qui n'est pas admissible.

§ 6. Transfert de chaleur

Dans tout ce qui précède, on a supposé qu'il n'y a aucun transfert de chaleur entre l'élément fluide et son environnement. Un transfert de chaleur fait varier l'énergie interne de l'élément, de même qu'une compression. Les deux processus sont similaires, mais un transfert de chaleur à pression constante augmenterait le volume, d'où un travail de dilatation. Pour sérier les questions, et pouvoir superposer l'effet d'un transfert de chaleur à celui d'un travail de compression ou dilatation, nous allons donc étudier un transfert de chaleur à volume constant, c'est-à-dire considérer un élément fluide enfermé dans une boîte indéformable [10, 14].

L'énergie interne thermique ne peut se définir sans ambiguïté que pour un élément fluide en repos, c'est-à-dire dans le référentiel R_0, et de plus qu'à la condition qu'à son intérieur l'équilibre statistique de Boltzmann soit atteint. S'il n'en était pas ainsi, par exemple, s'il y avait prédominance de la vitesse des molécules suivant une certaine direction, ou bien des tourbillons, la notion d'énergie thermique ainsi que celle de température perd sa signification. On ne pourrait même pas dans ces conditions définir une densité d'énergie locale ; d'ailleurs, si l'élément de volume considéré était suffisamment petit pour ne plus comprendre que quelques molécules, on ne pourrait définir ni densité d'énergie, ni température.

Nous définirons donc dans le référentiel propre R_0 l'énergie thermique par l'énergie mécanique désordonnée des molécules d'un corps homogène en équilibre interne, de dimensions suffisantes pour qu'on puisse définir un équilibre statistique. Considérons le cas d'un gaz où on néglige toute autre énergie que celle de translation des molécules. Soit $\vec{v}_0$ la vitesse d'une molécule et m_0 sa masse au repos. Dans R_0, l'énergie est donc

$$W_0 = \sum \left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \right) \tag{50}$$

Dans le référentiel R, où la boîte a la vitesse u dirigée suivant Ox, on a

$$v_x = \frac{v_{ox} + u}{1 + \frac{uv_{ox}}{c^2}}, \quad v_y = \frac{v_{oy}\sqrt{1-u^2/c^2}}{1 + \frac{uv_{ox}}{c^2}}, \quad v_z = \frac{v_{oz}\sqrt{1-u^2/c^2}}{1 + \frac{uv_{ox}}{c^2}}$$

et l'énergie W est donnée par (50) où v remplace v_0. Or

$$1 - \frac{v_x^2}{c^2} = \frac{1 + 2u\frac{v_{ox}}{c^2} + \left(\frac{uv_{ox}}{c^2}\right)^2 - \left(\frac{v_{ox}}{c}\right)^2 - 2u\frac{v_{ox}}{c^2} - \frac{u^2}{c^2}}{\left(1 + \frac{uv_{ox}}{c^2}\right)^2} = \frac{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v_{ox}^2}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{uv_{ox}}{c^2}\right)^2}$$

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{v_x^2}{c^2} - \frac{v_y^2}{c^2} - \frac{v_z^2}{c^2} = \frac{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{uv_{ox}}{c^2}\right)^2}$$

$$W = \sum \frac{m_0 c^2 \left(1 + \frac{uv_{ox}}{c^2}\right)}{\sqrt{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)}} .$$

Mais dans R_0, l'impulsion moyenne $\sum \frac{m_0 v_{ox}}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}$ suivant Ox est nulle par hypothèse. Donc

$$W = \sum \frac{m_0 c^2}{\sqrt{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)}} = \frac{W_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \tag{51}$$

Ainsi, si on injecte dans R dans l'élément une quantité de chaleur $\Delta Q_0 = \Delta W_0$, l'énergie totale dans R augmente de $\Delta Q = \Delta Q_0/\sqrt{1 - \beta^2}$.

Cependant, dans R, les vitesses des molécules ne sont plus isotropes ; on ne peut donc y définir sans ambiguïté l'énergie thermique comme nous le disions plus haut. Ce fait est à l'origine de la controverse entre les partisans de la variance en $\Delta Q = \Delta Q_0\sqrt{1 - \beta^2}$, suivant Plank et Einstein [1] à [8] et des partisans de la variance en $\Delta Q = \Delta Q_0/\sqrt{1 - \beta^2}$ [9] à [14]. La considération de l'impulsion permet de préciser la question.

Dans R_0, l'impulsion moyenne est nulle par hypothèse. Dans R, les impulsions sont aussi nulles suivant Oy et Oz, mais suivant Ox

$$P_x = \sum \frac{m_0 \dfrac{v_{ox} + u}{1 + \frac{uv_{ox}}{c^2}}}{\dfrac{\sqrt{\left(1 + \frac{u^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)}}{1 + \frac{u\,v_{ox}}{c^2}}} = \sum \frac{m_0 u}{\sqrt{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)}} = \frac{u}{c^2} W \tag{52}$$

$$= \frac{u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \sum \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} .$$

La masse apparente est augmentée de $\sum \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} - m_0$, et si on injecte la quantité de chaleur ΔQ_0 dans R_0, la masse apparente au repos dans R_0 augmente de $\frac{\Delta Q_0}{c^2}$. De ce fait, pour maintenir la vitesse à la valeur u constante dans R malgré cette augmentation de masse, il faut appliquer à l'élément une force

$$F' = \frac{dP_x}{dt} = \frac{u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \frac{1}{c^2} \frac{dQ_0}{dt}$$ et dépenser une énergie

$$(53) \quad W_v = \int F' \, dx = \frac{u^2}{c^2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \Delta Q_0 = \frac{\beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \Delta Q_0$$

Or nous avons vu que l'énergie totale acquise dans R par l'élément est $\Delta Q_0 \sqrt{1 - \beta^2}$. Par conséquent, on peut considérer que la différence

$$(54) \quad \Delta Q_c = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{\beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) \Delta Q_0 = \sqrt{1 - \beta^2} \, \Delta Q_0$$

représente la quantité de chaleur fournie à l'élément dans R , étant entendu que l'énergie fournie pour maintenir la vitesse malgré l'augmentation de masse est constituée par un travail mécanique.

C'est exactement ce que nous avons trouvé (voir (8)) dans le cas où l'augmentation d'énergie interne est provoquée par une compression au lieu de l'être par un transfert de chaleur.

Remarquons encore que si on définit l'énergie thermique de l'élément en mouvement, qui est par essence désordonnée, comme étant l'excès de l'énergie totale sur l'énergie qu'on aurait si toutes les molécules avaient la vitesse u, ce qui semble logique, on aurait

$$Q = \sum \frac{m_0 \, c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} - \sum \frac{m_0 \, c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \sum \left(\frac{m_0 \, c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} - m_0 c^2 \right)$$

$$= \frac{Q_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Nous avions ci-dessus restreint l'énergie thermique à l'énergie de translation des molécules. Mais le fait qu'une compression donne le même résultat, montre que ce résultat est également valable si l'énergie thermique comprend de l'énergie potentielle, pourvu que celle-ci ne soit pas "dirigée". Nous voulons dire par là que cette énergie potentielle, comme au § 1, résulte de travaux de forces qui ne produisent pas de mise en vitesse. Au § 1, il s'agissait de travaux exercés par des forces de pression superficielles. Mais le calcul serait le même pour des travaux internes, résultant pour des oscillateurs non dirigés au total par la transformation d'énergie thermique.

Résumons ce qui précède en disant qu'une énergie thermique est essentiellement non dirigée ; et ne se définit sans ambiguïté que dans le référentiel propre. Si dans ce référentiel on fournit à un élément fluide une énergie thermique W_{t_0}, l'énergie totale dans le référentiel R varie de $W_t = W_{t_0} / \sqrt{1 - \beta^2}$. Cette dernière énergie se répartit entre une énergie $W_{t_0} \frac{\beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = W_1$ qu'on peut qualifier de pseudo-cinétique et qui maintient l'élément à une vitesse constante malgré l'apport de la masse équivalente à l'énergie thermique fournie, et une énergie principale $W_2 = W_{t_0} \sqrt{1 - \beta^2}$. Si on définit l'énergie thermique comme l'excès de l'énergie totale sur l'énergie qu'on aurait sans mouvements internes désordonnés, aussi bien dans R que dans R_0, la variance est en $1/\sqrt{1 - \beta^2}$. Si on déduit dans R la pseudo énergie cinétique, la variance est en $\sqrt{1 - \beta^2}$.

Tout est donc bien clair ; la controverse à laquelle nous avons fait allusion se résoud par une simple question de définitions.

On peut encore préciser un point, à savoir la manière dont on peut dans R opérer le transfert de chaleur.

1°) Dans R_0, ce transfert a lieu à travers les parois de la boîte, à partir d'un milieu environnant qui est au repos comme l'élément considéré. Si on fait un simple changement de coordonnées, le milieu environnant va se trouver animé de la même vitesse v que l'élément et l'énergie thermique qu'il contient, dont une part va être transférée à l'élément, est déjà en vitesse. L'énergie thermique transférée est $W_{t_0} / \sqrt{1 - \beta^2}$ et il n'y a pas de pseudo énergie cinétique.

2°) Un deuxième procédé consiste à opérer dans R le transfert de chaleur à partir d'un fluide au repos, mais au fur et à mesure que de la chaleur passe dans l'élément, à exercer une force sur ce dernier afin que la vitesse reste u. Cette force fournit un travail $\left[\beta^2/\sqrt{1-\beta^2}\right] W_{t_0}$, de sorte que l'énergie thermique fournie n'est que $\sqrt{1-\beta^2}\, W_{t_0}$.

3°) Un troisième procédé consiste à opérer de même le transfert de chaleur à partir d'un fluide au repos, mais à accepter une baisse de vitesse, puis à fournir à l'élément un travail afin de rétablir la vitesse u. Si u' est la vitesse après transfert, la conservation de l'impulsion en appelant W_0 l'énergie au repos avant transfert et ΔW_0 l'énergie transférée, donne

$$(55)\quad \frac{W_0 u/c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{(W_0+\Delta W_0)u'/c^2}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}} \quad \text{ou} \quad \frac{W_0\,\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{(W_0+\Delta W_0)\beta'}{\sqrt{1-\beta'^2}}$$

L'énergie thermique transférée est : et le travail d'accélération :

$$W_1 = \frac{W_0+\Delta W_0}{\sqrt{1-\beta'^2}} - \frac{W_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad W_2 = \frac{W_0+\Delta W_0}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{W_0+\Delta W_0}{\sqrt{1-\beta'^2}}$$

De (55) on tire

$$\frac{\beta^2}{\beta'^2} = (1-\beta^2)\left(\frac{W_0+\Delta W_0}{W_0}\right)^2 + \beta^2$$

et

$$W_1 = \frac{W_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{\beta}{\beta'} - 1\right) = \frac{W_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\left[\sqrt{(1-\beta^2)\left[\frac{W_0+\Delta W_0}{W_0}\right]^2 + \beta^2} - 1\right]$$

Si ΔW_0 est petit par rapport à W_0, la quantité sous radical est voisine de 1, et en la posant $(1+x)$ on a

$$x = (1-\beta^2)\left[\left(\frac{W_0+\Delta W_0}{W_0}\right)^2 - 1\right] \quad \text{et} \quad \sqrt{1+x} \cong 1 + \frac{x}{2} \cong \frac{\Delta W_0}{W_0}(1-\beta^2)$$

$$W_1 = \Delta W_0\sqrt{1-\beta^2}$$

On retrouve donc la même valeur qu'au 2°) si ΔW_0 est petit par rapport à W_0.

4°) Enfin, on peut imaginer un procédé intermédiaire entre 1°) et 2°) dans lequel le fluide chauffant est accéléré seulement

jusqu'à une vitesse $u'' < u$, et où on maintient la vitesse de l'élément à u pendant le transfert de chaleur, ce qui nécessite une force

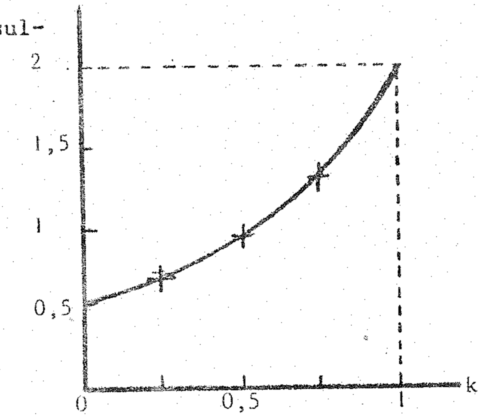
$$F = \frac{1}{c^2}\frac{dW_0}{dt}\left(\frac{u}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{u''}{\sqrt{1-\beta''^2}}\right) \quad \text{et un travail}$$

$$\int F\,dx = \Delta W_0\left(\frac{\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{\beta\beta''}{\sqrt{1-\beta''^2}}\right).$$

L'énergie transférée, en plus de ce travail est en posant $\frac{\beta''}{\beta} = k$

$$(56)\qquad \Delta W_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{\beta\beta''}{\sqrt{1-\beta''^2}}\right) = \Delta W_0\left(\sqrt{1-\beta^2} + \frac{k\,\beta^2}{\sqrt{1-k^2\beta^2}}\right)$$

Pour k = 1, on retrouve $\Delta W_0/\sqrt{1-\beta^2}$ (1er procédé) et pour k = 0 $\Delta W_0\sqrt{1-\beta^2}$ (2e procédé). Quand k croit de 0 à 1, le coefficient croit suivant le graphique ci-contre, par exemple pour $\sqrt{1-\beta^2} = \frac{1}{2}$. Ce résultat accentue encore, s'il en était besoin, le caractère conventionnel de la définition de l'énergie thermique transférée.



§ 7. Examinons pour terminer si les précisions apportées ci-dessus à la définition de l'énergie thermique sont de nature à modifier l'analogie développée par de Broglie [18, 19] entre les relations (9) ou (54) et l'équation exprimant dans la théorie de la double solution l'accord de phase entre la fréquence interne d'une particule et celle de l'onde qui la dirige. Rappelons sommairement dans le cas simple où il n'y a pas de potentiel extérieur comment on peut établir cette dernière.

Considérons une particule assimilable dans son référentiel propre R_0 à une onde stationnaire $\psi = a(x_0, y_0, z_0)e^{i\pi\nu_0 t_0}$ qui devient dans R

$$(57) \qquad \psi = a\left(\frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) e^{\frac{2\pi i\nu_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)} = a\, e^{\frac{i}{\hbar}(Wt - Px)}$$

W étant l'énergie $\nu h = \frac{\nu_0}{\sqrt{1-\beta^2}}h$ et P l'impulsion $\frac{v}{c^2}W = \frac{h}{\lambda}$. La vitesse de la particule est v et la vitesse de phase de l'onde est $\frac{c^2}{v}$. La fréquence d'une horloge liée à la particule est $\nu_1 = \nu_0\sqrt{1-\beta^2}$. Au temps t si x = 0 pour t = 0, sa phase est $\frac{\nu_0\sqrt{1-\beta^2}\,x}{\beta c}$. La fréquence de l'onde est $\frac{\nu_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ et sa phase au temps t est $\frac{\nu_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{x}{\beta c} - \frac{\beta x}{c}\right) = \nu_0\sqrt{1-\beta^2}\,\frac{x}{\beta c}$ qui est bien la même.

Comme en posant $\phi = \frac{1}{\hbar}(Wt - Px)$, $W = \hbar\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{M_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$, et $P = -\hbar\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{M_0v}{\sqrt{1-\beta^2}}$, et on obtient la formule du guidage :

$$(58) \qquad v = -c^2\frac{\frac{\partial\phi}{\partial x}}{\frac{\partial\phi}{\partial t}} \quad \text{ou} \quad -c^2\frac{\overrightarrow{\text{grad}}(v)}{\frac{\partial\phi}{\partial t}}$$

pour une direction quelconque de v et la concordance des phases s'exprime par

$$(59) \qquad \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + v\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)dt = \nu_0\sqrt{1-\beta^2}\,dt \quad \text{ou} \quad \frac{M_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{M_0v^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = M_0c^2\sqrt{1-\beta^2}$$

relation qui est la même que (54) en remplaçant Q_0 par M_0c^2. Et en effet, de Broglie bloque l'énergie thermique apportée dans R_0 avec M_0c^2 et considère que l'ensemble de l'énergie de translation dans R est $M_0c^2\frac{\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$, ce qui ne semble pas admissible. Mais finalement, il considère surtout une variation de M_0 que l'on obtient comme suit.

Si dans (57), a est une constante, (onde plane), ψ satisfait l'équation de Gordon

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \Delta\psi + \left(\frac{M_0c^2}{\hbar}\right)\psi = 0 \quad \text{ou} \quad 4\pi^2\left(\frac{1}{c^2}\frac{\nu_0^2}{1-\beta^2} - \frac{\nu_0^2}{1-\beta^2}\frac{v^2}{c^4}\right) = \frac{4\pi^2\nu_0^2}{c^2} = \left(\frac{M_0c^2}{\hbar}\right),$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} - \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{M_0c}{\hbar}\right)^2$$

qui peut être considérée comme une équation de Jacobi où l'action S de Jacobi est assimilée à ϕ. Mais si a est fonction de x, y, z, t, il faut ajouter $\frac{1}{a}\left(\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - \Delta a\right) = \frac{\Box a}{a}$ à $\left(\frac{M_0c}{\hbar}\right)^2$, ce qui revient à remplacer M_0 par $\sqrt{M_0^2 + \frac{\hbar^2}{c^2}\frac{\Box a}{a}}$. La particule satisfait donc une dynamique à masse variable de même que si on ajoutait dans R_0 une certaine énergie calorifique $Q_0 = \Delta(M_0c^2)$ et par conséquent dans R, en plus de l'énergie nécessaire au maintien de la vitesse une énergie calorifique $Q_0\sqrt{1-\beta^2}$. (59) n'intervient que par la variation de M_0c^2, de sorte que les raisonnements de de Broglie restent valables. Il a lié la variation de M_0 à l'apparition d'un "potentiel quantique", le champ quantique exprimant la réaction de l'onde, déformée par des phénomènes de diffraction ou d'interférences sur la particule. De même, dans une théorie de thermostat caché dans le vide, expliquant des variations aléatoires de la position de la particule, on aurait des variations aléatoires de M_0.

RÉFÉRENCES

[18] L. de Broglie, International Journal of Theoretical Physics, 1, 1968, p. 1-24 ; La réinterprétation de la mécanique ondulatoire, Gauthier-Villars, 1971

[19] G. Lochak, La thermodynamique cachée des particules - Ouvrage sur L. de Broglie, Gauthier-Villars, 1973.

(Le début des références bibliographiques était publié avec la première partie de l'article).

ERRATUM PREMIÈRE PARTIE

Ecrire :

1re ligne p. 256 $$v_{02x} = + \frac{1}{2} \frac{\partial v_{0x}}{\partial x_0} \delta x_0$$

3e, 4e, 5e lignes après (19) p. 256

$$= \frac{\delta u_0 f_0}{2\sqrt{1-\beta^2}}\left(dt_0 + \frac{w}{c^2} dx_{01} + dt_0 + \frac{w}{c^2} dx_{02}\right)$$

$$+ \frac{\delta y_0 \delta z_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\pi_1 (dt_0 + \frac{w}{c^2} dx_{01}) - \pi_2 (dt_0 + \frac{w}{c^2} dx_{02})\right)$$

$$= \frac{\delta u_0 \, dt_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(f_0(1 + \frac{w}{c^2} v_{0x}) + \frac{\pi_1}{\delta x_0}(1 + \frac{w}{c^2} v_{01}) - \frac{\pi_2}{\delta x_0}(1 + \frac{w}{c^2} v_{02})\right)$$

7e ligne après (21) p. 257

$(d\tau x)_0 = \delta u_0 \, f_0 \, dx_0 + \ldots$ au lieu de $\delta_0 \, f_0 \, dx_0$