Annales de la Fondation Louis de Broglie - Vol. 5, n° 2, 1980

OPÉRATEURS QUANTIQUES GÉNÉRALISÉS DE CRÉATION ET D'ANNIHILATION

par M. Vassili KURYSHKIN
Université de l'Amitié des Peuples
Moscou, B-302, U.R.S.S.

(manuscrit reçu le 12 Août 1978)

Résumé : On considère les relations de permutation généralisées déterminées par un ensemble de coefficients $\mu = (\mu_1, \ldots \mu_k)$, pour un couple d'opérateurs a et $\overset{+}{a}$ adjoints l'un de l'autre. On étudie les familles des opérateurs ($\vec{\mu}$-algèbres) fonctions de a et $\overset{+}{a}$. Il est montré que a et $\overset{+}{a}$ peuvent être interprétés comme opérateurs d'annihilation et de création de certaines "particules". Contrairement aux types de quantification de Bose-Einstein et de Fermi-Dirac bien connus, la $\vec{\mu}$-quantification viole, en général, la proportionnalité entre l'énergie d'un état et son nombre de "particules" ce qu'on peut interpréter comme une certaine interaction des "particules". Tous les cas particuliers de la $\vec{\mu}$-quantification, où l'interaction n'a pas lieu, sont déterminés.

1. INTRODUCTION

Dans la théorie quantique, l'opérateur $\hat{A}$ d'une grandeur physique caractérisant un système à N degrés de liberté peut être mis sous la forme de fonction

$$\hat{A} = A(a_i, \overset{+}{a}_i) \in A(N) \tag{1}$$

dépendant des opérateurs a_i et de leurs adjoints $\overset{+}{a}_i$, $i=1,2,\ldots,N$, qu'on appelle opérateurs d'annihilation et de création des "particules du type i" [1]-[3]. Les propriétés de l'algèbre des opérateurs (1) et le type de quantification sont bien déterminés par les relations de permutation des opérateurs de création et d'annihilation.

La théorie quantique moderne utilise deux types de relation de permutation :

$$(2)\qquad \begin{cases} (a_i,\overset{+}{a}_k)_\mp = a_i\overset{+}{a}_k \mp \overset{+}{a}_k a_i = \delta_{ik}, \\ (a_i,a_k)_\mp = 0, \qquad i,k = 1,2,\dots,N. \end{cases}$$

Ici le signe "-" correspond à la *quantification de Bose-Einstein*, où l'ensemble des opérateurs (1) représente l'algèbre de Bose $A_B(N)$, le signe "+" à celle de *Fermi-Dirac* qui amène à l'algèbre de Fermi $A_F(N)$.

Pour la description quantique de systèmes physiques réels on se sert habituellement de la *quantification mixte* où l'ensemble des degrés de liberté se compose de deux parties, de sorte que $N = K + L$, les opérateurs de création et d'annihilation satisfaisant aux relations (2) avec "-" pour $i,k = 1,2,\dots,K$ et avec "+" pour $i,k = K+1,\dots,K+L$. Naturellement, ceci fait intervenir l'algèbre $A(N) = A_B(K) \times A_F(L)$ qui est le produit de deux algèbres.

Pour les types mentionnés de quantification, les valeurs propres de l'opérateur hermitique $\hat{n}_i = \overset{+}{a}_i a_i$ sont des nombres entiers (dans les intervalles $[0,\infty)$ ou $[0,1]$ selon que la quantification est avec "-" ou avec "+"). Cela permet de le traiter comme opérateur du nombre de "particules du type i". En considérant $\hat{\varepsilon}_i = \varepsilon_i \overset{+}{a}_i a_i$ comme opérateur de l'énergie des "particules du type i", où ε_i est l'énergie d'une "particule", on établit la proportionnalité du nombre des "particules" à leur énergie et engendre un certain type de statistique quantique [1]-[3].

Dans la présente Note, en nous bornant au cas d'un degré de liberté, nous discutons quelques résultats liés à l'utilisation des opérateurs a et $\overset{+}{a}$ dont la relation de permutation est ou bien linéaire généralisée, ou bien non-linéaire. On verra que de tels opérateurs, eux aussi, peuvent être traités comme ceux de création et d'annihilation de certaines "particules", mais avec violation éventuelle de la proportionnalité entre l'énergie et le nombre des "particules", celles-ci entrant en interaction.

2. RELATION DE PERMUTATION LINEAIRE GENERALISEE (μ-QUANTIFICATION)

Soient a et $\overset{+}{a}$ des opérateurs définis sur un espace vectoriel complexe L et satisfaisant à la relation de permutation linéaire

$$(3)\qquad \mu_1 a\overset{+}{a} + \mu_2 \overset{+}{a}a = \mu_3 \hat{I},$$

les μ_k étant des coefficients complexes, $\hat{I}$ est l'opérateur identique dans L. Nous supposons que la relation (3) et l'algèbre correspondante des opérateurs

$$(4)\qquad \hat{A} = A(a,\overset{+}{a}) = \sum_{k,\ell=0}^{\infty} A_{k\ell}\, \overset{+k}{a}\, a^{\ell} \in A(1)$$

soient non-triviales en ce sens que

$$(5)\qquad \overset{+}{a}a \neq 0, \quad \overset{+}{a}a \not\sim \hat{I}, \quad \mu_3 \neq 0.$$

Les opérateurs a et $\overset{+}{a}$ étant adjoints l'un de l'autre il va de soi que les coefficients μ_k ne sont pas arbitraires. De plus, les triplets différents (admissibles) de coefficients μ_k peuvent engendrer des isomorphismes de la même algèbre des opérateurs (4). C'est pourquoi nous dégageons, avant tout, de (3) les relations de permutation qui amènent à des algèbres essentiellement différentes.

Vu que $\mu_1 \neq 0$ en vertu des conditions (5), multiplions (3) par $\overset{\star}{\mu}_1 \cdot |\mu_1|^{-2}$; on aura :

$$(6)\qquad a\overset{+}{a} - \mu\, \overset{+}{a}a = \nu\, \hat{I},$$

où $\mu = -\overset{\star}{\mu}_1\mu_2|\mu_1|^{-2}$ et $\nu = \overset{\star}{\mu}_1\mu_3|\mu_1|^{-2}$ sont des nombres réels et $\nu \neq 0$ ce qui résulte de (6) compte tenu des faits que a et $\overset{+}{a}$ sont adjoints l'un de l'autre et $\overset{+}{a}a$ est non trivial. Redésignons à présent les opérateurs $a \to |\nu|^{1/2} a$, $\overset{+}{a} \to |\nu|^{1/2}\overset{+}{a}$ en obtenant :

$$(7)\qquad a\overset{+}{a} - \mu\, \overset{+}{a}a = \pm\, \hat{I}, \qquad \mu \in (-\infty,\infty).$$

Le nombre $|\nu|^{1/2}$ peut être introduit dans les coefficients $A_{k\ell}$ des opérateurs (4) sans modifier l'algèbre. En cas de "$-\hat{I}$", la relation (7) implique $\mu \in (0,\infty)$, et les nouvelles désignations $a \to \mu^{-1/2}\overset{+}{a}$, $\mu \to \mu^{-1}$ tout en conservant l'algèbre (4), réduisent (7) à la relation analogue avec "$+\hat{I}$" et avec $\mu \in (0,\infty)$. En cas de "$+\hat{I}$" dans le second membre et $\mu \in (-\infty,-1)$ les désignations $a \to |\mu|^{-1/2}\overset{+}{a}$, $\mu \to -|\mu|^{-1}$, tout en conservant l'algèbre (4), réduisent (7) à la même relation avec "$+\hat{I}$" et avec $\mu \in (-1,0)$.

Ainsi donc, toute relation de permutation (3) admissible peut être mise sous la forme :

(8) $$a\overset{+}{a} - \mu\,\overset{+}{a}a = \hat{I}, \qquad \mu \in [-1,\infty),$$

sans modifier l'algèbre des opérateurs (4). Les opérateurs a et $\overset{+}{a}$, qui satisfont à la relation (8), engendrent la famille des opérateurs (4) que nous désignons par la suite $A_\mu(1)$ (μ-algèbre). L'utilisation des $A_\mu(1)$ pour le choix des opérateurs de grandeurs physiques sera appelée μ-quantification. Il est aisé de voir que les types habituels de quantification sont des cas spéciaux de la μ-quantification, i.e. $A_B(1) = A\,(1)$ et $A_F(1) = A_{-1}(1)$.

Avec les conditions de non-trivialité (5) on peut montrer que, parmi toutes les combinaisons linéaires possibles $a' = \alpha a + \beta\overset{+}{a} + \gamma I$ il n'existe aucun opérateur a' qui satisfasse à la relation $a'\overset{+}{a}' - \mu'\overset{+}{a}'a' = \hat{I}$ avec les conditions $\mu' \in [-1,\infty)$ et $\mu' \neq \mu$. Cela exprime le fait que les algèbres $A_\mu(1)$ et $A_{\mu'}(1)$ ne sont pas isomorphes pour $\mu \neq \mu'$.

A présent considérons l'opérateur

(9) $$\hat{m} = \overset{+}{a}a \in A_\mu(1).$$

Soit $|\alpha\rangle \in L_\mu$ un vecteur propre de l'opérateur (9) correspondant à une valeur propre $m_\alpha(\mu)$. Alors la suite suivante des affirmations est valable :

1. $m_\alpha(\mu) = m^\star_\alpha(\mu)$.
2. $m_\alpha(\mu) \geq 0$.
3. Si $\mu \neq 0$ et $m_\alpha(\mu) \neq 0$, alors $|\alpha_-\rangle = a|\alpha\rangle \neq 0$ est un vecteur propre de l'opérateur $\hat{m}$ pour la valeur propre $m_{\alpha_-}(\mu) = \mu^{-1}(m_\alpha(\mu)-1)$.
4. Si $m_\alpha(\mu) \neq 0$, alors $m_\alpha(\mu) \geq 1$ pour $\mu \in (0,\infty)$ et $m_\alpha(\mu) \leq 1$ pour $\mu \in [-1,0)$.
5. Si $\mu(\mu+1) \neq 0$, alors, quel que soit un entier $n \geq 1$, l'expression $\overset{+n}{a}|\alpha\rangle = |\alpha_{+n}\rangle$ est un vecteur propre non nul de l'opérateur $\hat{m}$ pour la valeur propre
$$m_{\alpha_{+n}}(\mu) = \mu^n m_\alpha(\mu) + \sum_{\ell=0}^{n-1} \mu^\ell.$$

6. Pour $\mu(\mu+1) \neq 0$ on a $m_\alpha(\mu) = 0$ si et seulement si $a|\alpha\rangle = 0$.
7. Si $\mu(\mu+1) \neq 0$ et $m_\alpha(\mu) \neq 0$, on a pour tout entier $n \geq 2$: ou bien $a^n|\alpha\rangle = 0$ et il existe un entier $k < n$ tel que $a^k|\alpha\rangle = |\alpha_{-k}\rangle$ est un vecteur non nul, mais $a|\alpha_{-k}\rangle = 0$; ou bien $a^n|\alpha\rangle = |\alpha_{-n}\rangle$ est un vecteur propre non nul de l'opérateur $\hat{m}$ pour la valeur propre
$$m_{\alpha_{-n}}(\mu) = \mu^{-n}\Big(m_\alpha(\mu) - \sum_{\ell=0}^{n-1} \mu^\ell\Big).$$
8. Si $m_\alpha(\mu) = (1-\mu)^{-1}$ avec $|\mu| < 1$, les vecteurs $\overset{+}{a}|\alpha\rangle = |\alpha_+\rangle$ et $a|\alpha\rangle = |\alpha_-\rangle$ sont des vecteurs propres non nuls de l'opérateur $\hat{m}$ pour les valeurs propres $m_{\alpha_+}(\mu) = m_{\alpha_-}(\mu) = (1-\mu)^{-1}$, c'est-à-dire que la valeur propre $(1-\mu)^{-1}$ de l'opérateur $\hat{m}$ (si elle existe) est fixe par rapport à l'algèbre $A_\mu(1)$.
9. Si $\mu \in [1,\infty)$ et $0 < m_\alpha(\mu) < \infty$, il existe un entier $1 \leq n < \infty$ tel que $a^n|\alpha\rangle = 0$.
10. Si $|\mu| < 1$ et $0 < m_\alpha(\mu) < (1-\mu)^{-1}$, il existe un entier $1 \leq n < \infty$ tel que $a^n|\alpha\rangle = 0$.
11. Si $\mu(\mu+1) \neq 0$, l'opérateur $\hat{m}$ possède un ensemble infini mais dénombrable de valeurs propres : $m_0(\mu) = 0$, $m_1(\mu) = 1$, $m_2(\mu) = 1 + \mu$, ..., $m_n(\mu) = 1 + \mu + \dots + \mu^{n-1}$, ... Les vecteurs propres correspondants sont orthogonaux deux à deux, et l'on a : $a|0\rangle = 0$, $a|n\rangle = |n-1\rangle$ et $\overset{+}{a}|n\rangle = |n+1\rangle$.
12. Si les vecteurs propres de l'opérateur $\hat{m}$ sont normés et $\mu(\mu+1) \neq 0$, la solution du problème des valeurs propres de l'opérateur $\hat{m}$ est :

(10a) $\hat{m}|n\rangle = m_n(\mu)|n\rangle$, $\langle n|n'\rangle = \delta_{nn'}$, $n = 0,1,\dots$

(10b) $m_0(\mu) = 0$, $m_1(\mu) = 1$, ..., $m_n(\mu) = \sum_{\ell=0}^{n-1} \mu^\ell$, ...

(10c) $a|0\rangle = 0$, $a|n\rangle = \sqrt{m_n(\mu)}\,|n-1\rangle$, $\overset{+}{a}|n\rangle = \sqrt{m_{n+1}(\mu)}\,|n+1\rangle$.

Les relations (10) permettent de définir l'espace L_μ comme l'ensemble des vecteurs

(10d) $$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n|n\rangle \in L_\mu(\infty),$$

les α_n étant des coefficients complexes. L'action d'un opérateur (10) de l'algèbre $A_\mu(1)$ sur un vecteur (10d) de l'espace de dimension infinie $L_\mu(\infty)$ est déterminée par les relations (10). Il est à signaler que l'opérateur a^2 est dans ce cas non-trivial (non nul et non proportionnel à $\hat{I}$).

Convenons à présent de considérer les cas $\mu = -1$ et $\mu = 0$ comme limites pour $\varepsilon \to 0$ des résultats (10), où $\mu = -1$, $\mu = -1 + \varepsilon$ et $\mu = \pm\varepsilon$ respectivement. On aura :

13. Les propriétés de l'algèbre $A_0(1)$ dans l'espace correspondant $L_0(\infty)$ sont déterminées par les relations (10) avec le spectre dégénéré des valeurs propres de l'opérateur $\hat{m}$: $m_0(0) = 0$, $m_1(0) = \ldots = m_n(0) = \ldots = 1$. Ici l'opérateur a^2 est toujours non trivial.

14. Si $\mu = -1$, l'apparition des valeurs propres nulles pour n pairs réduit l'espace L_{-1}, en vertu de (10), à un espace bi-dimensionnel :

(11a) $\hat{m}|n\rangle = m_n(-1)|n\rangle, \quad \langle n|n'\rangle = \delta_{nn'}, \quad n = 0,1.$

(11b) $m_0(-1) = 0, \quad m_1(-1) = 1.$

(11c) $a|0\rangle = 0, \quad a|1\rangle = |0\rangle, \quad \overset{+}{a}|0\rangle = |1\rangle, \quad \overset{+}{a}|1\rangle = 0.$

Dans ce cas le vecteur abritraire est de la forme :

(11d) $|\alpha\rangle = \alpha_1|0\rangle + \alpha_2|1\rangle \in L_{-1}(2)$

l'opérateur a^2 possèdant la propriété

(11e) $a^2 = [a,a]_+ = aa + aa = 0.$

En principe, les relations (10c) (ou (11c) pour $\mu = -1$) permettent de traiter a et $\overset{+}{a}$ comme opérateurs d'annihilation et de création de certaines "particules", et le vecteur $|n\rangle$ comme état avec le nombre de telles "particules" égal à n. Par analogie avec les types habituels de quantification, on peut introduire l'opérateur d'énergie

(12) $$\hat{\varepsilon} = \varepsilon\,\hat{m} = \varepsilon\overset{+}{a}a,$$

où ε est l'énergie d'une "particule" (celle de l'état à une "particule" $|1\rangle$), et l'opérateur de nombre de "particules" $\hat{n}$ possédant les propriétés naturelles :

(13) $\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle, \quad [a,\hat{n}]_- = a, \quad [\overset{+}{a},\hat{n}]_- = -\overset{+}{a}$

Avec les relations (8), (10), (11) et (13) on peut trouver la forme explicite de cet opérateur :

(14) $$\hat{n} = \frac{1}{2}\log_{|\mu|}\{\hat{I} + (\mu - 1)\overset{+}{a}a\}^2.$$

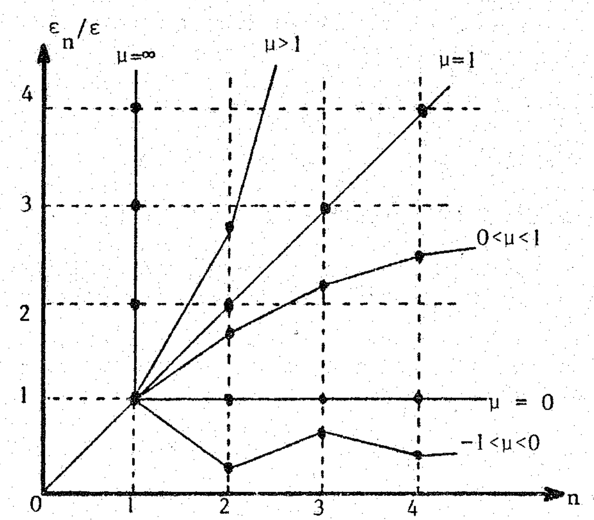

Fig. 1

Il est à remarquer que, pour la μ-quantification, il n'y a pas de proportionnalité entre le nombre de "particules" et leur énergie (à l'exception des cas habituels $\mu = \pm1$, Fig. 1). Pour $\mu > 1$, l'énergie de n "particules" est plus grande, et pour $\mu < 1$ plus petite, que $n\varepsilon$ ce qui témoigne d'une certaine interaction entre les "particules". Lorsque $\mu \in (-1,0)$, l'interaction est si forte que l'énergie de n "particules" ne dépasse pas celle d'une "particule". Signalons encore que, en cas de $\mu \in (-1,1)$, une saturation énergétique a lieu : en état $|\infty\rangle = \overset{+}{a}{}^\infty|0\rangle$ l'énergie est finie et vaut $\varepsilon m_\infty(\mu) = \varepsilon(1-\mu)^{-1}$, et l'on a $a|\infty\rangle = \sqrt{m_\infty(\mu)}\,|\infty\rangle$ et $\overset{+}{a}|\infty\rangle = \sqrt{m_\infty(\mu)}\,|\infty\rangle$, c'est-à-dire que l'état de saturation énergétique $|\infty\rangle$ est un vecteur propre de tous les opérateurs de l'algèbre $A_\mu(1)$.

3. RELATION DE PERMUTATION NON-LINEAIRE ($\vec{\mu}$-QUANTIFICATION)

Soient a et $\overset{+}{a}$ des opérateurs définis sur un espace vectoriel complexe L et satisfaisant à la relation de permutation non-linéaire :

$$(15)\qquad a\overset{+}{a} = \sum_{k=0}^{K_1}\sum_{k'=0}^{K_2} \mu_{kk'}\,\overset{+}{a}{}^{k}\,a^{k'},$$

$\overline{\overline{\mu}}$ étant une matrice complexe de la forme $(K_1\times K_2)$. Nous supposons que la relation (15) et l'algèbre correspondante des opérateurs (1) soient non-triviales en ce sens que

$$(16)\qquad \begin{cases} \overset{+}{a}a \neq 0, \quad \overset{+}{a}a \not\equiv \hat{I}, \quad \mu_{00} \neq 0, \\ \overset{+}{a}{}^{k}a^{\ell} \neq \overset{+}{a}{}^{k'}a^{\ell'}, \qquad \text{pour } k \neq k' \text{ et } \ell \neq \ell', \end{cases}$$

quels que soient $k,k' \in [1,K_1]$ et $\ell,\ell' \in [1,K_2]$.

Le fait que les opérateurs a et $\overset{+}{a}$ sont adjoints l'un de l'autre et la condition (16) déterminent les valeurs admissibles des éléments de la matrice $\overline{\overline{\mu}}$ dans (15). En effet, la comparaison de (15) avec son expression adjointe montre, en vertu des conditions de non-trivialité :

$$(17)\qquad \begin{cases} \mu_{kk'} = 0, \quad \text{pour } k > K, \text{ ou } k' > K, \text{ où } K = \mathrm{Min}(K_1,K_2) \\ \mu_{kk'} = \mu^{\star}_{k'k}, \quad \text{pour } k,k' \in [1,K]. \end{cases}$$

Ainsi, les relations de permutation non-linéaires admissibles peuvent être écrites comme suit :

$$(18)\qquad a\overset{+}{a} = \sum_{k,k'=0}^{K} \mu_{kk'}\,\overset{+}{a}{}^{k}\,a^{k'},$$

où $\overline{\overline{\mu}}$ est une matrice hermitique de la forme $(K\times K)$.

Supposons maintenant que les opérateurs a et $\overset{+}{a}$ dans (18) soient interprétés comme opérateurs d'annihilation et de création de certaines "particules", c'est-à-dire :

a) il existe dans l'espace L les états linéairement indépendants à n "particules" $|n\rangle$ tels que

$$(19a)\qquad \begin{cases} \langle n|n'\rangle = \delta_{nn'}, \quad a|0\rangle = 0, \quad n = 0,1,\ldots \\ a|n\rangle = \alpha_n(\overline{\overline{\mu}})|n-1\rangle, \quad \overset{+}{a}|n\rangle = \beta_n(\overline{\overline{\mu}})|n+1\rangle, \end{cases}$$

b) l'opérateur d'énergie $\hat{\varepsilon}$ ait la forme habituelle et détermine certaines valeurs ε_n pour les états à n "particules"

$$(19b)\qquad \hat{\varepsilon} = \varepsilon\overset{+}{a}a = \varepsilon\hat{m}, \quad \hat{\varepsilon}|n\rangle = \varepsilon_n|n\rangle, \quad \varepsilon = \varepsilon_1 \neq 0,$$

où ε_1 est l'énergie d'une "particule" (de l'état à une "particule").

L'ensemble des suppositions (19) et la relation de permutation (18) impliquent :

$$(20)\qquad \begin{cases} \mu_{kk'} = \mu_k\,\delta_{kk'}, \quad \mu_0 = 1, \quad \mu_k = \mu_k^{\star}, \quad k = 1,2,\ldots,K. \\ \varepsilon_0 = 0, \quad \varepsilon|\alpha_n(\overline{\overline{\mu}})|^2 = \varepsilon|\beta_{n-1}(\overline{\overline{\mu}})|^2 = \varepsilon_n, \quad n = 1,2,\ldots \end{cases}$$

Par conséquent, pour que les opérateurs a et $\overset{+}{a}$ soient interprétables comme ceux d'annihilation et de création de certaines "particules", il faut que la matrice $\overline{\overline{\mu}}$ soit diagonale ce qui réduit la relation de permutation (18) à la forme :

$$(21)\qquad a\overset{+}{a} = \sum_{k=0}^{K} \mu_k\,\overset{+}{a}{}^{k}\,a^{k},$$

où $\mu_0 = 1$ et $\vec{\mu} = (\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_k)$ sont des nombres réels. On aura alors la solution suivante du problème des valeurs propres de l'opérateur $m = \overset{+}{a}a$:

$$(22a)\qquad \hat{m}|n\rangle = m_n(\vec{\mu})|n\rangle, \quad \langle n|n'\rangle = \delta_{nn'}, \quad n = 0,1,\ldots$$

$$(22b)\qquad m_0(\vec{\mu}) = 0, \quad m_1(\vec{\mu}) = 1, \quad m_n(\vec{\mu}) \geqslant 0.$$

$$(22c)\qquad a|0\rangle = 0, \quad a|n\rangle = \sqrt{m_n(\vec{\mu})}\,|n-1\rangle, \quad \overset{+}{a}|n\rangle = \sqrt{m_{n+1}(\vec{\mu})}\,|n+1\rangle,$$

les valeurs propres $m_n(\vec{\mu})$ étant associées aux énergies $\varepsilon_n(\vec{\mu})$ des états à n "particules" par les relations

$$(22d)\qquad \varepsilon_n(\vec{\mu}) = \varepsilon\, m_n(\vec{\mu}).$$

Les opérateurs a et $\overset{+}{a}$ satisfaisant à la relation de permutation non-linéaire (21) engendrent une famille d'opérateurs

$$(23)\qquad \hat{A} = A(a,\overset{+}{a}) \in A_{\vec{\mu}}(1)$$

qu'on appelle par la suite $\vec{\mu}$-algèbre. L'espace correspondant des états $L_{\vec{\mu}}$ peut être donné par le système des vecteurs propres de l'opérateur $\overset{+}{a}a$:

$$(24)\qquad |\alpha\rangle = \sum_n \alpha_n|n\rangle \in L_{\vec{\mu}}$$

l'action de l'opérateur (23) sur un vecteur (24) étant alors déterminée par les relations (22).

Passons à présent aux liaisons qui existent entre les valeurs ε_n de l'énergie (ou les valeurs propres m_n de l'opérateur $\hat{m}$) et les coefficients μ_k dans la relation de permutation non-linéaire (21).

En appliquant successivement l'opérateur (21) aux vecteurs des états à n "particules" pour n = 0,1,...,K, on a :

$$(25a)\begin{cases} m_1 = 1 \\ m_2 = 1 + \mu_1 m_1, \\ m_3 = 1 + \mu_1 m_2 + \mu_2(m_2 m_1), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_{K+1} = 1 + \mu_1 m_K + \mu_2(m_K m_{K-1}) + \ldots + \mu_K(m_K m_{K-1}\ldots m_2 m_1). \end{cases}$$

De manière analogue pour les vecteurs $|n>$ avec $n \geqslant K + 1$ on a :

$$(25b)\quad m_{n+1} = 1 + \mu_1 m_n + \mu_2(m_n m_{n-1}) + \ldots + \mu_K(m_n m_{n-1}\ldots m_{n-K+1}).$$

Si les valeurs des coefficients $\vec{\mu} = (\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_K)$ dans la relation de permutation (21) sont données, les égalités (25) représentent les relations récurrentes déterminant d'une manière univoque les valeurs propres $m_n(\vec{\mu})$ de l'opérateur $\hat{m}$ et, par conséquent, les valeurs de l'énergie $\varepsilon_n(\vec{\mu})$ des états à n "particules".

Etant données les valeurs non-nulles de l'énergie des K + 1 premiers états $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_{K+1})$ qui sont liées en vertu de (22d) aux valeurs propres de l'opérateur $\hat{m}$, $\vec{m} = (m_1,m_2,\ldots,m_{K+1})$, le système (25a) détermine de manière unique (le déterminant du système n'étant pas nul) les coefficients $\mu_k(\vec{\varepsilon})$ de la relation de permutation non-linéaire (21). Les égalités (25b) restent récurrentes, c'est-à-dire que les valeurs de l'énergie ε_n pour $n \geqslant K+2$ sont déterminées par les valeurs $\vec{\varepsilon}$ des premiers K+1 états.

Notons que, en vertu des deux premières égalités (25a) et des propriétés (22b), on a $\mu_1 \geqslant -1$ ce qui permet de mettre la relation de permutation non-linéaire (21) sous sa forme définitive :

$$(26)\qquad a\overset{+}{a} - \mu_1 \overset{+}{a}a = \hat{I} + \sum_{k=2}^{K} \mu_k \overset{+k}{a} a^k, \quad \mu_1 \in [-1,\infty),$$

$\mu_2,\ldots,\mu_K$ étant des nombres réels. On voit donc que toutes les relations de permutation linéaires (8) sont des cas particuliers de la relation non-linéaire (21) pour $\vec{\mu} = (\mu,\vec{0})$, i.e. $A_\mu(1) = A_{\mu,\vec{0}}(1)$.

L'utilisation des opérateurs a et $\overset{+}{a}$, satisfaisant à la relation de permutation non-linéaire, pour la construction des opérateurs de grandeurs physiques ($\vec{\mu}$-quantification) entraîne toujours la non-proportionnalité entre le nombre de "particules" et leur énergie. Cependant, contrairement à la μ-quantification, les énergies des états à n "particules" peuvent en ce cas être données à priori ; c'est-à-dire que la $\vec{\mu}$-quantification admet différents types d'interaction entre les "particules".

4. $\vec{\mu}$-ALGEBRE SANS INTERACTION

Les algèbres des opérateurs $A_B(1)$ et $A_F(1)$ engendrées par les relations de permutation (2) sont des cas particuliers des μ-algèbres basées sur la relation de permutation linéaire (8). Dans ces cas particuliers, l'énergie d'un état est proportionnelle au nombre de "particules". Comme les μ-algèbres sont, à leur tour, des cas particuliers des $\vec{\mu}$-algèbres basées sur la relation de permutation non-linéaire (21), il est naturel de poser le problème de recherche de toutes les $\vec{\mu}$-algèbres conservant l'égalité (absence d'interaction entre les "particules")

$$(27)\qquad \varepsilon_n(\vec{\mu}) = n\cdot\varepsilon$$

pour tous les états $|n>$. Naturellement, dans toute algèbre de ce type, on a :

$$(28)\qquad m_n(\vec{\mu}) = n, \qquad \hat{n} = \hat{m} = \overset{+}{a}a.$$

On montrera plus bas que la forme explicite de la relation de permutation (21) pour une telle algèbre est liée à la quantité des états différents à n "particules" (à la quantité des vecteurs propres de l'opérateur $\hat{m}$).

1. $\vec{\mu}$-algèbre à une "particule". Soit $m_0(\vec{\mu}) = 0$, $m_1(\vec{\mu}) = 1$ et $m_2(\vec{\mu}) = 0$. Alors il résulte de (25) : $K \geqslant 1$; $\mu_1 = -1$ et $\mu_2,\ldots,\mu_K$ ne sont pas déterminés ; $m_3(\vec{\mu}),m_4(\vec{\mu}),\ldots = 1,0,1,0,\ldots$

La périodicité des valeurs propres de l'opérateur $\hat{m}$ nous dit que la représentation des opérateurs a et $\overset{+}{a}$ est réductible (le rang de la représentation irréductible vaut deux), à savoir :

$$(29a)\quad \begin{cases} n = 0,1, & |0\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, & |1\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \\ \hat{I} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, & a = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, & \overset{+}{a} = \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} \end{cases}$$

La relation de permutation (21) prend la forme :

$$(29b)\qquad a\overset{+}{a} + \overset{+}{a}a = \hat{I}, \qquad a^2 = 0,$$

et l'algèbre correspondante se confond avec $A_F(1)$ dans l'espace $L_F(2)$. La $\vec{\mu}$-algèbre à une "particule" n'admet que les deux états avec un nombre fixe de "particules" : l'état sans "particules" $|0\rangle$ et celui avec une seule "particule" $|1\rangle$.

2. <u>$\vec{\mu}$-algèbre à deux "particules"</u>. Soit $m_0(\vec{\mu}) = 0$, $m_1(\vec{\mu}) = 1$, $m_2(\vec{\mu}) = 2$ et $m_3(\vec{\mu}) = 0$. On a d'après (25) : $K \geqslant 2$; $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = -3/2$ et $\mu_3,\dots,\mu_K$ sont indéterminés ; $m_4(\vec{\mu}), m_5(\vec{\mu}),\dots = 1,2,0,\dots$ L'indétermination des μ_k pour $k \geqslant 3$ est sans importance, puisque la périodicité des valeurs m_n réduit la représentation de l'algèbre à la tridimensionnelle :

$$(30a)\quad n = 0,1,2. \qquad |0\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad |2\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

L'algèbre correspondante $A_{1,-3/2}(1)$ dans l'espace $L_{1,-3/2}(3)$ est engendrée par les opérateurs

$$(30b)\quad \hat{I} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \qquad a = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&\sqrt{2}\\0&0&0\end{pmatrix}, \qquad \overset{+}{a} = \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&\sqrt{2}&0\end{pmatrix},$$

qui satisfont à la relation de permutation :

$$(30c)\qquad a\overset{+}{a} - \overset{+}{a}a = \hat{I} - \frac{3}{2}\,\overset{+}{a}{}^2a^2, \qquad a^3 = 0.$$

Le nombre maximal de "particules" dans les états à nombre fixe de "particules" vaut deux.

3. <u>$\vec{\mu}$-algèbre à S "particules"</u>. Soit $m_n(\vec{\mu}) = n$ pour $n = 0,1,\dots,S$ et $m_{S+1}(\mu) = 0$. On a alors de (25) : $K \geqslant S$; $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_{S-1} = 0$, $\mu_S = -(S+1)/S\,!$, $\mu_{S+1},\dots,\mu_K$

sont indéterminés ; $m_{S+2}(\vec{\mu}),\dots,m_{2S+1}(\vec{\mu}), m_{2S+2}(\vec{\mu}),\dots = 1,2,\dots,S,0,\dots$ En ce cas les opérateurs a et $\overset{+}{a}$ sont représentés par les $(S+1)\times(S+1)$-matrices :

$$(31a)\begin{cases} (\hat{I})_{nn'} = \delta_{nn'}, \quad (a)_{nn'} = \sqrt{n}\,\delta_{n,n'-1}(1-\delta_{n,S+1}), \\ (\overset{+}{a})_{nn'} = \sqrt{n'}\,\delta_{n-1,n'}(1-\delta_{n',S+1}), \quad n,n' \in [1,S+1], \end{cases}$$

et satisfont à la relation de permutation :

$$(31b)\qquad a\overset{+}{a} - \overset{+}{a}a = \hat{I} - \frac{S+1}{S!}\,\overset{+}{a}{}^S a^S, \qquad a^{S+1} = 0,$$

ce qui amène à l'algèbre $A_{\vec{\mu}}(1)$ dans l'espace $L_{\vec{\mu}}(S+1)$, $\vec{\mu} = (1,\vec{0},\mu_S)$. La quantité des états à un nombre fixe de "particules" est cette fois égal à $(S+1)$: $|0\rangle$, $|1\rangle$, ..., $|S\rangle$, et l'on a $\overset{+}{a}|S\rangle = 0$.

4. <u>$\vec{\mu}$-algèbre à une infinité de "particules"</u>. Soit $m_n(\vec{\mu}) = n$ pour $n \in [0,\infty)$. On tire de (25) : $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = \mu_3 = \dots = 0$. Dans ce cas les opérateurs a et $\overset{+}{a}$ sont représentés par les matrices infinies

$$(32a)\quad (\hat{I})_{nn'} = \delta_{nn'}, \quad (a)_{nn'} = \sqrt{n}\,\delta_{n,n'-1}, \quad (\overset{+}{a})_{nn'} = \sqrt{n'}\,\delta_{n-1,n'},$$

$n,n' \in [1,\infty)$, satisfont à la relation de permutation

$$(32b)\qquad a\overset{+}{a} - \overset{+}{a}a = \hat{I}, \qquad a^n \neq 0,$$

et conduisent à l'algèbre bien connue $A_B(1)$ dans l'espace $L_B(\infty)$. Cette fois le nombre d'états à un nombre fixe de "particules", ainsi que le nombre maximal de "particules", sont indéfinis.

5. CONCLUSION

L'étude des opérateurs a et $\overset{+}{a}$ satisfaisant à une relation de permutation généralisée (21) avec des coefficients $\vec{\mu}$, qu'on a réalisée dans cette Note, montre que, en principe, ces opérateurs peuvent être interprétés comme ceux d'annihilation et de création de certaines "particules". La $\vec{\mu}$-quantification, qui consiste en l'utilisation de tels opérateurs a et $\overset{+}{a}$ pour la construction de l'ensemble des opérateurs quantiques (de la $\vec{\mu}$-algèbre), diffère essentiellement des deux types de quantifications que l'on utilise dans la physique quantique moderne.

La particularité principale de la $\vec{\mu}$-quantification réside en la non-proportionnalité entre l'énergie de l'état et le nombre de "particules", ce qu'on peut concevoir comme traduisant une certaine interaction entre les "particules". Le caractère de l'interaction et l'ensemble de coefficients $\vec{\mu}$ sont liés entre eux, ce qui permet, en principe, de considérer des "particules" avec n'importe quelle interaction donnée à priori.

En imposant la condition de proportionnalité entre le nombre de "particules" et leur énergie on peut dégager les $\vec{\mu}$-algèbres sans interaction. L'ensemble de ces algèbres est infini mais dénombrable. Une $\vec{\mu}$-algèbre sans interaction est caractérisée par le nombre entier $S \in [1,\infty)$ qui représente le nombre d'états différents avec des nombres de "particules" non nuls et le nombre maximal de "particules" dans un état. Le cas $S = 1$ correspond à la quantification de Fermi-Dirac, le cas $S = \infty$ à celle de Bose-Einstein.

Le problème de l'application de la $\vec{\mu}$-quantification à la description de systèmes physiques réels est lié, avant tout, au problème de $N > 1$ degrés de liberté, où on a besoin d'un ensemble d'opérateurs a_i et $\overset{+}{a}_i$, $i = 1,2,\ldots,N$. Une partie de ce problème a été étudié dans l'article[4]. Voici l'essentiel du problème. Les opérateurs a_i et $\overset{+}{a}_i$, satisfaisant à la relation de permutation (21) avec les coefficients $\vec{\mu}_i$, forment une algèbre $A_{\vec{\mu}_i}(1)$ dans l'espace $L_{\vec{\mu}_i}$. Les opérateurs a_j et $\overset{+}{a}_j$ fournissent l'algèbre $A_{\vec{\mu}_j}(1)$ dans l'espace $L_{\vec{\mu}_j}$, et on a, en général, $\vec{\mu}_i \neq \vec{\mu}_j$. L'ensemble des opérateurs a_i, $\overset{+}{a}_i$ et a_j, $\overset{+}{a}_j$ forme l'algèbre $A(2) = A_{\vec{\mu}_i}(1) \otimes A_{\vec{\mu}_j}(1)$ dans l'espace $L = L_{\vec{\mu}_i} \otimes L_{\vec{\mu}_j}$. Pour donner un sens aux produits d'algèbres et d'espaces qu'on a désignés ici par le symbole "$\otimes$", il faut établir les relations de permutation pour a_i et a_j, ainsi que pour $\overset{+}{a}_i$ et $\overset{+}{a}_j$, ce qui présente un problème assez délicat et sortant du cadre de la présente Note.

RÉFÉRENCES

(1) L. Landau et E. Lifchitz : Mécanique quantique, Mir, Moscou, 1976.

(2) A.I. Ahieser et V.B. Berestetzki : Kvantovaja elektrodinamika, Nauka, Moscou, 1969.

(3) N.N. Bogoljubov et D.V. Shirkov : Vvedenie v teoriju kvantovannyh polei, Nauka, Moscou, 1973.

(4) V.V. Kuryshkin : Dep. VINITI, n° 3936-76, Moscou, 1976.