Annales de la Fondation Louis de Broglie - Vol. 5, n° 2, 1980

UNE EQUATION POUR L'OPERATEUR DE LA (QUASI-)PROBABILITE

par MM. Vassili KURYSHKIN, Igor LYABIS et Yuri ZAPAROVANNY

Université de l'Amitié des Peuples,

Moscou B-302, URSS

(manuscrit reçu le 5 Août 1978)

Résumé : Les auteurs montrent que la condition générale de linéarité pour la construction des opérateurs quantiques peut être complétée par une condition de correspondance en dynamique. Ceci amène à une certaine équation non-linéaire pour l'opérateur de la (quasi-) probabilité qui détermine tous les autres opérateurs quantiques. La forme explicite de l'équation mentionnée est, à son tour, déterminée par la fonction d'Hamilton du système considéré.

Le problème de la règle de correspondance (de construction des opérateurs de grandeurs physiques dans la théorie quantique) est discuté par les physiciens depuis plus de 50 ans. L'essentiel de ce problème réside dans ce qui suit.

Dans la théorie classique, toute grandeur physique A peut être présentée comme une fonction $A(q,p,t)$ des coordonnées $q = (q_1, \ldots, q_n)$, des impulsions $p = (p_1, \ldots, p_n)$ et du temps t. Dans la théorie quantique, la même grandeur A est présentée par un opérateur linéaire hermitique $\hat{A}$ dans un espace vectoriel complexe L. Il est logique de supposer, (1)-(4), que, en vertu du principe de correspondance, il existe entre l'ensemble des fonctions classiques $\{A(q,p,t)\}$ et celui des opérateurs quantiques $\{\hat{A}\}$ représentant le même ensemble $\{A\}$ de grandeurs physiques dans les théories classique et quantique respectivement, une certaine relation que l'on puisse mettre sous une forme symbolique :

$$\hat{A} = \hat{A}^{+} = O\big(A(q,p,t,)\big), \tag{1}$$

c'est-à-dire que $\hat{A}$ est l'opérateur hermitique pour $A(q,p,t)$. Le procédé de construction de l'opérateur $\hat{A}$ d'après une fonction donnée $A(q,p,t)$, que nous avons désigné dans (1) par le symbole "O(...)", s'appelle *règle de correspondance*.

Pendant un demi-siècle de développement de la théorie quantique on a proposé des dizaines de règles de correspondance et on a trouvé qu'elles sont toutes non-satisfaisantes (une discussion détaillée du problème et une analyse des règles proposées peuvent être trouvées, par exemple, dans les articles ([5])-([8])).

Dans cette Note nous proposons encore une solution du problème dont le trait principal réside dans la relation entre la règle de correspondance et les caractéristiques dynamiques du système physique considéré.

Comme on a souligné dans les articles ([5])-([9]), toutes les règles de correspondance connues, en particulier celles qu'on utilise partiellement dans la théorie quantique contemporaine, satisfont à la condition de linéarité :

$$\begin{cases} O(1) = \hat{I}, \\ O(\alpha A) = \alpha O(A), \\ O(A+B) = O(A) + O(B), \end{cases} \tag{2}$$

où $\hat{I}$ est l'opérateur identique dans L, α est un coefficient numérique, A et B sont des fonctions classiques arbitraires. La condition de linéarité (2) permet de mettre la règle de correspondance (1) sous une forme plus commode pour l'étude :

$$\hat{A} = O(A) = \int A(q,p,t).\hat{F}(q,p,t)dqdp, \tag{3}$$

où $\hat{F}(q,p,t)$ est un opérateur linéaire dans L, fonction paramétrique de q, p, t, possédant les propriétés

$$\hat{F}(q,p,t) \equiv \hat{F}^{+}(q,p,t), \quad \int \hat{F}(q,p,t)dqdp = \hat{I}, \tag{4}$$

et correspondant, en vertu de (1), à la δ -fonction de l'espace des phases, c'est-à-dire

$$\hat{F}(\xi,\eta,t) = O\big(\delta(\xi-q).\delta(\eta-p)\big), \tag{5}$$

(pour plus de détails voir ([9])).

On a proposé, ([9]), ([10]), d'appeler l'opérateur (5), qui détermine selon la règle (3) les opérateurs des autres grandeurs physiques, *opérateur de la (quasi-)probabilité*. Cette terminologie est liée au fait que la règle de correspondance sous la forme (3) permet d'écrire les moyennes quantiques $\langle A\rangle$ pour un système dans l'état $\psi \in L$ comme :

$$\langle A\rangle = (\psi|\hat{A}\psi) = \int A(q,p,t).F(q,p,t)dqdp, \tag{6}$$

où la fonction quantique de distribution F (densité de la (quasi-probabilité) est déterminée par l'opérateur (5) :

$$F(q,p,t) = F^{\star}(q,p,t) = (\psi|\hat{F}(q,p,t)\psi). \tag{7}$$

Si en plus des propriétés (4), l'opérateur $\hat{F}$ est défini positif, la fonction quantique de distribution (7) est non-négative, donc peut être interprétée comme une densité de probabilité des coordonnées et impulsions. Dans ce cas, $\hat{F}$ joue le rôle de *l'opérateur de la probabilité*.

Naturellement, les propriétés (4) de l'opérateur de la (quasi-)probabilité ne sont pas suffisantes pour déterminer sa forme explicite. Tout de même, le principe de correspondance dans la dynamique permet d'obtenir une équation pour $\hat{F}$ à l'aide du raisonnement suivant.

Dans la théorie classique, la variation des coordonnées et impulsions avec le temps est donnée par le système d'équations :

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n, \tag{8}$$

où $H(q,p,t)$ est la fonction d'Hamilton. Ceci étant, la valeur A d'une grandeur physique A et sa variation avec le temps sont :

$$\langle A\rangle = A(q,p,t)\big|_{q=q(t),p=p(t)}, \quad \frac{d\langle A\rangle}{dt} = T_A(q,p,t)\big|_{q=q(t),p=p(t)} \tag{9}$$

où la fonction T_A est liée aux fonctions A et H, comme

$$T_A(q,p,t) = \frac{\partial A(q,p,t)}{\partial t} + \{H(q,p,t), A(q,p,t)\}, \tag{10}$$

$\{H,A\}$ étant les parenthèses de Poisson :

$$\{H,A\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial A}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial A}{\partial p_i}\right). \tag{11}$$

En supposant que, dans la théorie quantique, le vecteur d'état $\psi \in L$ satisfasse à l'équation du type Schrödinger ([10]) :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\, \psi, \tag{12}$$

où $\hat{H}$ est l'opérateur établi par la règle (3) pour la fonction d'Hamilton, on a pour la moyenne $\langle A \rangle$ et sa variation avec le temps :

$$\langle A \rangle = (\psi | \hat{A}\psi), \quad \frac{d\langle A \rangle}{dt} = (\psi | \hat{T}_A \psi). \tag{13}$$

Ici l'opérateur $\hat{T}_A$ est lié aux opérateurs $\hat{A}$ et $\hat{H}$:

$$\hat{T}_A = \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}\left(\hat{H}, \hat{A}\right), \tag{14}$$

$\left(\hat{H}, \hat{A}\right)$ étant le commutateur.

En rapprochant les parties statistique ($\langle A \rangle$) et dynamique $\left(\frac{d\langle A \rangle}{dt}\right)$ des relations (9) et (13) on peut exiger que la règle (3) établisse une correspondance non seulement entre $\hat{A}$ et $A(q,p,t)$, mais aussi entre $\hat{T}_A$ et $T_A(q,p,t)$, i.e. que

$$\hat{T}_A = O\big(T_A(q,p,t)\big). \tag{15}$$

Cette égalité représente une équation non-linéaire pour l'opérateur $\hat{F}$. En effet, si l'on porte dans (15) l'opérateur (14) et la fonction (10), en tenant compte de la règle de correspondance (3), et si l'on fait une intégration par parties et utilise le fait que la fonction $A(q,p,t)$ est arbitraire, on obtient la forme explicite de l'équation (15) pour l'opérateur de la (quasi-)probabilité :

$$\frac{\partial \hat{F}(q,p,t)}{\partial t} + \{H(q,p,t), \hat{F}(q,p,t)\} = \frac{i}{\hbar}\int H(\xi,\eta,t)\left(\hat{F}(q,p,t), \hat{F}(\xi,\eta,t)\right) d\xi d\eta \tag{16}$$

A présent on est en mesure de formuler la règle de correspondance obtenue : l'opérateur $\hat{A}$ d'une grandeur physique est déterminé, d'après la fonction classique connue $A(q,p,t)$ de cette grandeur, par l'intégrale (3) où l'opérateur de la (quasi-)probabilité $\hat{F}(q,p,t)$ est solution de l'équation (16) sous les conditions (4).

La règle de correspondance proposée appartient à la classe des règles non-Neumanniennes ([11]), et mène à des opérateurs dont la forme explicite est mise en corrélation, par l'équation (16), avec la fonction d'Hamilton du système physique. Dans la théorie quantique avec cette règle de correspondance, il existe une fonction quantique de distribution (7) qui satisfait toujours à l'équation classique de Liouville. Ceci ne contredit pas l'existence des notions de vecteurs d'état, opérateurs, principe d'incertitu-

de, etc. Si l'on demande, en plus de (4), que l'opérateur $\hat{F}$ soit défini positif, la règle de correspondance proposée conduit à une théorie du type "Mécanique quantique avec une fonction quantique de distribution non-négative" ([8]), ([10]).

REFERENCES

([1]) M. Born et P. Jordan, Z.Physik, 34, 1925, p. 858

([2]) P.A.M. Dirac, Proc.Roy.Soc. (London), A110, 1926, p. 561

([3]) J.Von Neumann, Nachr.Akad.Wiss.Göttingen, Math.-Physik.Kl ; 1927, p. 245

([4]) H. Weyl, Z.Physik, 46, 1927, p. 1

([5]) J.R. Shewell, Am.J.Phys., 27, 1959, p. 16

([6]) L. Cohen, J.Math.Phys., 7, 1966, p. 781

([7]) V.V. Kuryshkin, Isvestiya Vusov, Fisika n°11, U.R.S.S., 1971, p. 103

([8]) V.V. Kuryshkin, Ann.Inst.H.Poincaré, XYII, n°1, 1972, p. 81

([9]) Yu.I. Zaparovanny, V.V. Kuryshkin et I.A. Lyabis, Isvestiya Vusov, Fisika, (à paraître)

([10]) V.V. Kuryshkin, The Uncertainty Principle and Foundations of Quantum Mechanics, John Wiley & Sons, London, 1977, p. 61-83

([11]) V.V. Kuryshkin, I.A. Lyabis et Yu.I. Zaparovanny, Ann.Fond. Louis de Broglie, 3, 1978, p. 45.