

LE CHAMP MAGNÉTIQUE DES CORPS TOURNANTS

par M. SURDIN

Centre de Faibles Radioactivités,

Laboratoire Mixte CNRS-CEA

91190 GIF-SUR-YVETTE

(manuscrit reçu le 4 Décembre 1978)

Résumé : Après un court historique du magnétisme des corps tournants, l'auteur décrit brièvement un modèle issu de l'Electrodynamique Stochastique. Il montre comment les théories des phénomènes coopératifs s'appliquent à ce modèle. Les éléments de cette théorie sont utilisés pour analyser les résultats d'une expérience de laboratoire sur le magnétisme des corps tournants.

Introduction

Malgré une littérature abondante, l'origine du champ magnétique des corps tournants n'a pas encore reçu une explication entièrement satisfaisante. Un historique complet de la question n'a pas sa place ici, il paraît, cependant intéressant de donner les étapes principales du cheminement des idées et les solutions proposées à ce problème.

Tout naturellement, les premières théories sur le champ magnétique des corps tournants ont été développées à propos du champ géomagnétique. C'est Gauss, dans sa "Théorie Générale du Magnétisme Terrestre" de 1838, qui a posé les bases de la théorie en montrant que 95 % du magnétisme terrestre a son origine à

l'intérieur de la terre.

Cependant, c'est en 1891 que Schuster⁽¹⁾, présumant l'existence d'un champ magnétique solaire à partir de l'observation de sa couronne, a posé la question : Est-ce que toute masse importante en rotation est un aimant ?

Pour expliquer l'existence d'un tel champ on aurait pu invoquer l'effet gyromagnétique, selon lequel un corps tournant s'aimante. Mais Schuster⁽²⁾ a montré que le champ résultant serait trop faible d'un facteur 10^{10} . D'autre part, pour une sphère, ce champ est indépendant du rayon. On doit donc écarter un tel mécanisme.

Schuster⁽²⁾ donne une revue générale des théories jusqu'en 1912. En particulier, il envisage une théorie similaire à celle de Sutherland qui suppose que la terre possède une charge volumique positive compensée par une charge électrique superficielle négative.

Wilson⁽³⁾, par analogie avec la création d'un champ magnétique par des charges électriques en mouvement, admet la création d'un champ magnétique par une masse en mouvement. Il obtient :

$$H = - \frac{G^{1/2}}{cr^3} \vec{mv} \times \vec{r} \quad (1)$$

où H est le champ magnétique créé à une distance r par une masse m se déplaçant à une vitesse v ; G est la constante de gravitation de Newton et c la vitesse de la lumière.

Pour une sphère de rayon R, de densité uniforme et de masse totale M, tournant autour d'un de ses diamètres à une vitesse angulaire Ω il trouve que le moment magnétique P est donné par

$$P = 1/5 \cdot \frac{G^{1/2}}{c} MR^2 \Omega \quad (2)$$

ce qui correspond à un champ magnétique au pôle donné par

$$H_p = 2/5 \cdot \frac{G^{1/2}}{c} \cdot \frac{M \Omega}{R} \quad (3)$$

Comme conséquence de ce modèle une masse M en mouvement linéaire devait, elle aussi, produire un champ magnétique. Une expérience effectuée par Wilson⁽³⁾ pour détecter un tel champ a donné des résultats négatifs.

Swann⁽⁴⁾, en introduisant une faible modification arbitraire

des équations de l'électrodynamique, est conduit à poser deux expressions pour le champ magnétique à la surface d'une sphère tournante

$$H_p = A \frac{M \Omega}{R} \quad (4)$$

$$H_p = B \cdot MR \Omega^4 \quad (5)$$

où A et B sont des constantes. Swann a donné la préférence à l'éq (5), il détermine la constante de proportionnalité B en appliquant cette formule au champ magnétique terrestre.

Swann et Longaacre⁽⁵⁾ ont fait tourner une sphère en cuivre de 20 cm de diamètre à 200 tours/sec. D'après l'éq(5) un champ de l'ordre de $5 \cdot 10^{-3}$ gauss devait être créé. Or, avec un détecteur d'une sensibilité de l'ordre de 10^{-4} gauss, ils n'ont pas détecté de champ magnétique. L'éq(4), dont la constante de proportionnalité A a été déterminée de la même façon que ci-dessus, prévoit dans les conditions expérimentales un champ de l'ordre de 10^{-9} gauss.

Blackett⁽⁶⁾, en 1947, guidé par des analogies et par l'analyse dimensionnelle a posé la relation

$$P = \beta \frac{G^{1/2}}{c} U \quad (6)$$

où U est le moment angulaire du corps tournant et β une constante numérique de l'ordre de l'unité.

Pour une sphère ayant les paramètres R, M et Ω , considérés plus haut, on a

$$U = 2/5 \cdot MR^2 \Omega \quad (7)$$

Il s'en suit que le champ magnétique au pôle est donné par l'éq (3).

Blackett considère l'éq(6) comme une loi fondamentale, toutefois, il n'a pas proposé de mécanisme susceptible de créer un champ magnétique. Mais cette équation rendait compte des champs magnétiques du soleil, de la terre et des étoiles magnétiques connues à l'époque. Ce qui l'a encouragé à effectuer une expérience de laboratoire⁽⁷⁾ où un cylindre en or massif de rayon R = 5 cm et de hauteur h = 10 cm (M = 15 000 gr), au repos au laboratoire (à Manchester) mais tournant avec la terre autour de l'axe de rotation terrestre n'a pas donné un champ magnétique détectable avec son magnétomètre dont la sensibilité était de

l'ordre de 10^{-10} gauss. Ce résultat négatif s'explique naturellement, car si on applique l'éq(3) à cette expérience on trouve que le champ magnétique créé doit être de l'ordre de 10^{-15} gauss.

Luchak⁽⁸⁾ a analysé les théories de Wilson et Swann et a montré que ces théories ne sont pas covariantes. Il a proposé une théorie covariante relativiste en généralisant les équations de Maxwell de sorte que le champ de gravitation y soit inclus. On obtient ce résultat en écrivant les équations de Maxwell dans un espace penta-dimensionnel, ce qui permet d'introduire de nouvelles quantités physiques, au nombre de neuf, qui décrivent le champ de gravitation.

La théorie dispose de paramètres libres ; pour qu'elle conduise à l'éq(3) de Wilson-Blackett, donnant le champ magnétique d'une sphère tournante et à un champ nul pour une sphère qui ne tourne pas, l'auteur détermine ces paramètres en se guidant par l'analyse dimensionnelle.

Elsasser⁽⁹⁾ et Bullard⁽¹⁰⁾ ont proposé la "théorie de la dynamo" pour expliquer la création du champ magnétique d'un corps tournant. Cette théorie se propose de rendre compte des champs des planètes et des corps célestes par un processus d'induction électrique dans un fluide conducteur. Cette notion conduit à considérer des courants électriques auto-régénérateurs associés au champ magnétique, compensant ainsi les pertes ohmiques. L'énergie mécanique nécessaire pour déplacer le fluide conducteur doit provenir d'une source interne, par exemple, l'énergie calorifique due à une radioactivité.

Gubbins⁽¹¹⁾ a analysé cette théorie ; ses critiques sont brièvement résumées ci-après :

- il est admis, mais non prouvé mathématiquement, que la rotation fournit l'effet organisateur nécessaire pour produire un écoulement ordonné, du fluide conducteur, indispensable à l'opération de la dynamo.
- dans cette théorie il est très difficile, sinon impossible, de faire correspondre aux paramètres de la dynamo (tels que les self-inductances, les résistances ohmiques et l'inductance mutuelle) les paramètres correspondants, dans le cas de la terre, par exemple.
- un des paramètres les plus difficiles à calculer est l'intensité du champ magnétique créé. En fait, récemment, des calculs ont été effectués. Ces calculs, résultant de l'idéalisation des équations non linéaires, ne permettent pas de relier les résultats

à des paramètres tels que la vitesse angulaire de rotation.

Kumar et Nandini⁽¹⁴⁾ ont considéré la polarisation électrique due à la gravitation. Pour un corps tournant cette notion conduit à calculer un champ magnétique axial d'intensité correspondante à celle de certains corps célestes.

Il est intéressant de noter que dès 1906 Brunhes⁽¹³⁾ a montré l'existence d'un renversement du champ géomagnétique, confirmé par les travaux de Matuyama en 1929⁽¹⁴⁾. A partir de 1955, après que de nombreux renversements aient été mis en évidence, certains auteurs ont tenté d'en donner des bases théoriques, en particulier en compliquant considérablement la théorie de la dynamo⁽¹⁵⁾.

Devant cette situation inacceptable pour l'esprit et comme dans le cadre de l'Electrodynamique Stochastique un modèle simple s'est dégagé, une théorie heuristique a été proposée. Cette théorie rend bien compte des observations sur le champ géomagnétique et de corps célestes, de plus elle a conduit à une expérience de laboratoire dont l'analyse sera donnée ci-dessous.

Le modèle proposé

Le champ électromagnétique fluctuant de l'univers au zéro absolu de température induit dans les atomes d'un corps tournant des dipôles électriques. L'apparition et la disparition de ces dipôles est un phénomène aléatoire. Il est admis que du fait de la rotation du corps et pour des raisons de symétrie les dipôles sont alignés radialement dans des plans parallèles au plan de l'équateur, dirigés soit vers l'axe de rotation ou dans la direction opposée. Il en résulte un champ magnétique dipolaire aléatoire parallèle ou antiparallèle à la direction de rotation selon que les dipôles électriques sont alignés dans la direction inverse ou dans la direction de l'axe de rotation.

On considère tous les dipôles électriques dont les centres des charges se trouvent, à un instant donné, sur un cylindre de rayon r , centré sur l'axe de rotation. Le champ magnétique créé par ces dipôles, tournant autour de l'axe, résulte des deux champs, l'un créé par les charges positives, l'autre créé par les charges négatives des dipôles.

Ces considérations et le fait qu'il s'agit d'un phénomène aléatoire permettent de calculer la fonction d'autocorrélation du champ magnétique résultant. On peut ainsi établir des formules donnant le carré moyen de l'amplitude du champ magnétique au

centre du corps tournant, et ceci pour différentes configurations géométriques, telles qu'un disque plat, une sphère, etc⁽¹⁶⁾.

Pour une sphère de densité uniforme tournant autour d'un de ses diamètres à une vitesse angulaire Ω , on obtient

$$\langle H^2 \rangle = 1/8 \cdot \frac{G}{c^2} \cdot \frac{M^2 \Omega^2}{R^2} \quad (8)$$

La valeur ainsi calculée, ou plutôt $\sqrt{\langle H^2 \rangle}$, correspond à l'amplitude moyenne du champ magnétique au centre de la sphère dirigée dans la direction de rotation ou dans la direction inverse.

Dans le Tableau I on donne les paramètres relatifs à certains corps célestes.

TABLEAU I

Corps céleste	M gr.	R cm.	Ω s ⁻¹	$\sqrt{\langle H^2 \rangle}$ gauss	H _{exp} gauss
La Terre	$5,98 \cdot 10^{27}$	$6,37 \cdot 10^8$	$7,2 \cdot 10^{-5}$	2	0,6 - 0,7
Le Soleil	$1,99 \cdot 10^{33}$	$6,96 \cdot 10^{10}$	$2,8 \cdot 10^{-6}$	$2,4 \cdot 10^2$	2,6 - 50
Jupiter	$1,9 \cdot 10^{30}$	$7,13 \cdot 10^9$	$1,8 \cdot 10^{-4}$	$1,4 \cdot 10^2$	11 - 14
Etoile à neutrons	$1,99 \cdot 10^{33}$	$3 \cdot 10^6$	12,5	$2,5 \cdot 10^{13}$	$10^{12} - 10^{13}$
La Galaxie	$2,2 \cdot 10^{44}$	$3,8 \cdot 10^{22}$	$8 \cdot 10^{-15}$	$0,6 \cdot 10^{-6}$	$10^{-6} - 10^{-5}$

On peut faire à propos du Tableau I les remarques suivantes :

- les formules donnant $\langle H^2 \rangle$ ont été établies pour un corps ayant une densité et une vitesse angulaire uniformes.

- la formule utilisée pour la Galaxie est celle établie pour un disque plat $\langle H^2 \rangle = 2GM^2\Omega^2/c^2R^2$.

- les valeurs expérimentales H_{exp} sont relatives au champ aux pôles, elles sont plus faibles que celles du centre.

- exceptée la valeur H_{exp} relative à la terre, toutes les autres valeurs ne sont pas mesurées directement. Même celle de Jupiter

est déduite des mesures faites aux confins de son atmosphère.

- les conditions de densité et rotation uniformes ne sont qu'approximativement satisfaites pour la terre et, peut être, pour une étoile à neutrons. Des formules donnant $\langle H^2 \rangle$ pour une densité et une rotation nonuniformes peuvent être établies si l'on connaît les variations de la densité et de la vitesse angulaire avec le rayon.

- les formules donnant $\langle H^2 \rangle$ contiennent trois paramètres M, R et Ω . Dans le Tableau I ces paramètres varient dans les proportions suivantes : M \rightarrow 1 à 10^{16} ; R \rightarrow 1 à 10^{16} et Ω \rightarrow 1 à 10^{15} . Il y a peu de lois physiques qui s'appliquent dans des domaines de variation aussi grands. Si, de plus, on considère les cylindres de l'expérience décrite ci-dessous, les domaines de variation sont encore considérablement élargis.

Des calculs semblables à ceux qui conduisent à l'éq(8) permettent d'établir la relation donnant le moment magnétique. Pour une sphère on obtient

$$P = a \frac{G^{1/2}}{c} \cdot MR^2\Omega \quad (9)$$

où a est une constante numérique de l'ordre de l'unité. Comme le moment angulaire pour la sphère est donné par

$$U = b \cdot MR^2\Omega \quad (10)$$

où b est une constante numérique de l'ordre de l'unité. Le rapport des eqs(9) et (10) donne

$$P/U \approx \frac{G^{1/2}}{c} = 10^{-14} \text{ cgs} \quad (11)$$

Le rapport du moment magnétique d'un corps tournant à son moment angulaire est une constante universelle. Cette relation est vérifiée dans le cas du soleil et des planètes ; elle est alors, quelquefois, appelée la loi de Bode pour le magnétisme planétaire. La loi donnée par l'éq(11) est, cependant, plus générale que celle appelée la loi de Bode et mérite de porter le nom de Blackett-Wilson.

Bien que basées sur des modèles différents on notera la similitude formelle des équations (6) et (11). Les considérations qui suivent soulignent les différences entre le modèle proposé ici et ceux de Blackett et de Wilson.

L'analyse de la variation du champ en fonction du temps est basée sur les considérations suivantes : l'éq(8) est obtenue quand

tous les dipôles induits sont rangés dans la même direction, soit dirigés vers l'axe de rotation soit dans la direction inverse. A cette situation d'équilibre se superposent des fluctuations où des dipôles changent aléatoirement de direction. Ces fluctuations s'effectuent avec une constante de temps de l'ordre du temps de relaxation é.m. T_L du corps tournant. Pour une sphère de rayon R , de conductibilité σ et de perméabilité μ le temps de relaxation est donné par

$$T_L = \frac{4 \sigma \mu R^2}{\pi} \quad (12)$$

Si, du fait des fluctuations, un domaine du corps voit tous ses dipôles dirigés en sens inverse de la direction des dipôles du reste du corps et si ce domaine est suffisamment étendu, tenant compte de la nature "coopérative" du phénomène - la tendance au renversement des dipôles est d'autant plus grande que le nombre des dipôles inversés est plus grand - les dipôles de l'ensemble du corps se renversent ; ce qui correspond au renversement de la direction du champ magnétique. Ce renversement se produit, comme le confirme l'expérience, dans un temps très court τ , beaucoup plus court que T_L , de sorte que l'on ait $1/T_L \ll 1/\tau$.

Nous avons ici tous les ingrédients d'un système fluctuant ayant deux modes, soumis à un phénomène coopératif. De nombreux phénomènes coopératifs ont été étudiés, la plupart répondent à un traitement mathématique unique bien connu⁽¹⁷⁾ ; c'est celui qui sera utilisé plus loin.

On peut résumer les résultats de la manière suivante :

- le champ magnétique d'un corps tournant est dû à un processus aléatoire dont le résultat est un dipôle magnétique dirigé soit dans la direction de la rotation soit en sens inverse.
- les valeurs absolues des amplitudes moyennes du champ magnétique dans la direction normale ou la direction opposée sont égales.
- la valeur moyenne du champ, intégrée sur un temps long comparé au temps de relaxation é.m. T_L , est nulle.
- les passages par zéro du champ magnétique ont lieu à des instants distribués suivant une loi de Poisson stationnaire.

Ces résultats sont en bon accord avec les observations paléomagnétiques du champ terrestre⁽¹⁶⁾.

On peut maintenant aborder l'étude de l'aspect coopératif du phénomène. Soient $\rho_1 = n_1/n_0$ et $\rho_2 = n_2/n_0$ les fractions du nombre total n_0 des dipôles dirigés, respectivement, vers l'axe

de rotation et dans la direction inverse. L'équation différentielle d'évolution des populations relative à ce type de problèmes est bien connue, c'est une équation semblable à celle dite l'équation de compétition de Volterra. Pour ρ_1 on a

$$\frac{d\rho_1}{dt} = -\frac{1}{T_L} \rho_1 + \frac{1}{\tau} \rho_1 \rho_2 \quad (13)$$

la deuxième équation de Volterra est remplacée ici par la condition $\rho_1 + \rho_2 = 1$.

Le premier terme du deuxième membre de l'éq(13) correspond à l'évolution de la population à l'équilibre, alors que le deuxième terme correspond à la phase du renversement et exprime le caractère coopératif du phénomène. L'étude va se faire en deux étapes ; dans la première on étudie la phase du renversement et dans la seconde on étudie la phase de l'équilibre.

Tenant compte de ce qui précède et du fait que $1/T_L \ll 1/\tau$ on peut remplacer l'éq(13) par

$$\frac{d\rho_1}{dt} = \frac{1}{\tau} \rho_1 \rho_2 \quad (14)$$

et, utilisant la relation $\rho_1 + \rho_2 = 1$, on obtient

$$\frac{d\rho_1}{dt} = \frac{\rho_1}{\tau} - \frac{\rho_1^2}{\tau} \quad (15)$$

Dans ce genre d'études il est de coutume d'introduire un paramètre d'ordre ψ ⁽¹⁷⁾

$$\psi = \sqrt{\rho} \cdot e^{i\phi} \quad (16)$$

où ψ est une fonction du temps t et, pour des corps de dimensions étendues, des coordonnées de l'espace. ϕ est une phase, fonction de mêmes variables, éventuellement. Ici la phase ϕ prend l'une des deux valeurs soit 0 soit π . L'éq(15) s'écrit alors

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{2\tau} \psi - \frac{1}{2\tau} |\psi|^2 \psi \quad (17)$$

L'éq(17) est rapprochée d'une équation du mouvement du type

$$m \frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{d\psi}{dt} = -\frac{dV}{d\psi}$$

où V est une "fonction potentiel" (local dans un élément de volume d^3x) et m une masse très faible, ce qui permet de négliger le terme $m \frac{d^2\psi}{dt^2}$ devant le terme de frottement $\frac{d\psi}{dt}$. On trouve alors que

l'"énergie totale" est donnée par :

$$W = \int (V+E) d^3x = \int \left[-\frac{1}{4\tau} |\psi|^2 + \frac{1}{8\tau} |\psi|^4 + E \right] d^3x$$

où l'intégrale est étendue à tout le volume. E est l'"énergie" du champ fluctuant. En fait il ne s'agit pas d'une vraie énergie, aussi bien pour W que pour E mais cette assimilation facilite la discussion du problème. L'équation du mouvement s'écrit alors

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{dV}{d\psi} + F(t) \quad (18)$$

où F(t) représente la "force" fluctuante.

Pour qu'elle soit complète on doit introduire dans l'expression de V d'autres termes tels que des termes dépendant de $\nabla\psi$, mais qui sont négligeables dans le cas présent. Dans le cas où F(t) représente un processus Markoffien des méthodes générales qui permettent de traiter le problème existent⁽¹⁷⁾. Ici ces méthodes ne seront pas utilisées ; une analyse simple permet de tirer les conclusions nécessaires à la compréhension du phénomène et au traitement des résultats expérimentaux.

Si on trace la courbe V(ψ) -le potentiel déterministe- en fonction de ψ -le paramètre d'ordre- on obtient la courbe bien connue de la figure 1. L'équilibre est obtenu pour $\frac{d\psi}{dt} = 0$. Les trois points d'équilibre sont obtenus pour $\psi = 0$, c'est un équilibre instable ; les deux autres points d'équilibre sont pour $|\psi|^2 = 1$, soit $\psi = \pm 1$. Ces deux points correspondent à des positions d'équilibre stable, où les dipôles sont tous dirigés soit vers l'axe de rotation soit dans la direction inverse.

Si le terme F(t) n'existait pas le système une fois arrivé à une position d'équilibre stable reste indéfiniment dans cette position. C'est grâce aux fluctuations, c'est-à-dire à l'existence du terme F(t) que le passage d'une position d'équilibre à l'autre est possible.

A l'équilibre le système est soumis à des fluctuations ; son équation d'évolution est l'éq(13) où le deuxième terme du second membre est nul, c'est-à-dire le système répond aux oscillations de fluctuation avec une constante de temps T_L .

On sait que F(t), le terme provenant du champ de zéro n'est pas un processus Markoffien. Cependant, étant donnée la bande passante très étroite (T_L étant très grand) on peut assimiler

F(t) à un processus Markoffien ; ici on le prendra comme un bruit blanc. Dans ces conditions on peut définir une "bande passante efficace" B^* de sorte que la durée moyenne d'intégration du circuit équivalent est $T_0 = 1/B^*$. Soient R la résistance et L la self inductance équivalentes du corps tournant, son temps de relaxation é.m. est alors $T_L = 2L/R$. De même, on calcule $B = R/4L$. On trouve alors $T_0 = 2T_L$. T_0 est encore le temps moyen entre deux renversements successifs des populations des dipôles. On en conclut que ce temps est le double du temps de relaxation é.m. du corps tournant.

L'expérience

Le mécanisme responsable du champ magnétique d'un corps tournant proposé dans le paragraphe précédent et l'esquisse de la théorie correspondante sont suffisants pour comprendre les résultats expérimentaux obtenus. Disposant d'un modèle et d'une théorie, il était tentant de réaliser une expérience, où certains paramètres étaient à la disposition de l'expérimentateur, permettant d'infirmer ou de confirmer l'existence du phénomène physique considéré.

On donnera ici une description succincte de l'expérience réalisée ; une description plus détaillée se trouve dans Surdin⁽¹⁸⁾. Dans ce qui suit on propose une nouvelle méthode pour traiter les résultats expérimentaux ; on arrive, cependant, à des conclusions similaires que celles de⁽¹⁸⁾.

Pour des raisons évidentes la configuration du corps tournant doit avoir une symétrie de révolution. Faire tourner rapidement une sphère présentait des difficultés techniques on a choisi la forme cylindrique. Le calcul de $\langle H^2 \rangle$ ne présente pas de difficultés, on obtient

$$\langle H^2 \rangle = 1/4 \cdot \frac{G}{c^2} \cdot \frac{M^2 \Omega^2}{R^2} \cdot Q(\alpha) \quad (19)$$

où Q(α) est une fonction de forme avec $\alpha = h/R$, 2h étant la hauteur du cylindre.

Il était souhaitable, pour vérifier l'indépendance de l'effet

* La bande passante efficace est la largeur d'un filtre rectangulaire dont la hauteur est égale à la hauteur maximale du filtre réel (en énergie) et ayant la même surface totale que celui-ci.

des matériaux utilisés, d'expérimenter avec d'au moins deux cylindres de matériaux très différents ; ainsi l'un des cylindres (T) était en tungstène fritté de densité $\delta = 17,6$, et l'autre (B) était en bronze de densité $\delta = 8,8$. Pour des raisons de facilité expérimentale les deux cylindres avaient la même géométrie.

De simples considérations sur les contraintes mécaniques et la nécessité d'une vitesse périphérique inférieure à la vitesse du son pour une vitesse angulaire $\Omega = 2 \cdot \pi \cdot 1000 \text{ s}^{-1}$ (objectif proposé) ont conduit de choisir pour le rayon $R = 5 \text{ cm}$. De plus, afin d'éviter des oscillations de flexion on prend $2h = 15 \text{ cm}$, d'où $\alpha = 3/2$. Pour cette géométrie on a

$$H_0 = \sqrt{\langle H^2 \rangle} \cong 0,25 \cdot \frac{G^{1/2}}{c} \cdot \frac{M \Omega}{R} \quad (20)$$

Avec les deux cylindres à $\Omega = 2 \cdot \pi \cdot 500 \text{ s}^{-1}$ on calcule alors

$$H_{0T} = 2,8 \cdot 10^{-8} \text{ gauss} \quad \text{et} \quad H_{0B} = 1,4 \cdot 10^{-8} \text{ gauss.}$$

Pour mesurer directement un champ magnétique de cette amplitude un magnétomètre ayant une sensibilité meilleure que 10^{-8} gauss et un temps de réponse plus court que T_L , soit 10^{-3} s , est nécessaire.

De plus, il faut réduire le champ magnétique local et ses variations à des valeurs inférieures au champ magnétique que l'on se propose de mesurer. Tenant compte de ces difficultés on a abandonné la mesure directe.

Une méthode plus simple et moins coûteuse a été mis en oeuvre, elle utilise les renversements du champ pour induire dans une bobine cylindrique, entourant le cylindre tournant, une f.é.m. $E(t)$ présentant des impulsions de très courte durée, alternativement positives et négatives, aux instants de renversement du champ magnétique, c'est-à-dire à des instants distribués selon une loi de Poisson. L'amplitude de cette f.é.m. est donnée par

$$E_s = \frac{F \pi R^2 N 2H_0}{\Theta} \cdot 10^{-8} \text{ volts} \quad (21)$$

où Θ est l'intervalle de temps apparent pendant lequel le champ magnétique se renverse de $+H_0$ à $-H_0$; N est le nombre de tours de la bobine détectrice et F est un facteur numérique qui tient compte du fait que la f.é.m. induite E_s est due à un champ moyen H_0 . Pour la géométrie utilisée on calcule $F = \sqrt{2}/\pi$.

Afin de réduire la capacité répartie, la bobine était constituée de quatre enroulements séparés de 800 spires chacun, mis en série. La fréquence de résonance, qui est sensiblement la bande passante de la bobine, était de 35 kHz. Les cylindres étaient

faits de matériaux non magnétiques, $\mu = 1$.

L'estimation du rapport signal/bruit a montré que la détection directe de E_s était pratiquement impossible. De plus, l'expérience a montré que l'homogénéité des cylindres n'est pas parfaite et que l'axe du cylindre en tournant ne coïncide pas toujours avec celui du bobinage. Il en résulte une f.é.m. induite dans la bobine à la fréquence de rotation. Pour éliminer cette f.é.m. on utilise un filtre passe-bas ayant une fréquence de coupure aiguë.

La méthode de détection est basée sur la spécificité de la fonction d'autocorrélation $\phi_{ss}(\tau)$ du signal $E(t)$ et, en particulier sur sa différence avec la fonction d'autocorrélation du bruit $\phi_{bs}(\tau)$ (19). Un calcul direct donne pour la fonction d'autocorrélation du signal à la sortie du filtre, rapportée à l'entrée :

$$\phi_{ss}(\tau) = \frac{f_s E_s^2}{2\pi\omega_0^2 \tau} \sin\omega_0\tau - \frac{f_s^2 E_s^2}{4\omega_0^2} \exp(-f_s |\tau|) \quad (22)$$

où E_s est l'amplitude de l'impulsion du signal, f_s la fréquence moyenne du signal, c'est aussi l'inverse du temps moyen entre deux renversements du champ magnétique et ω_0 la pulsation de coupure du filtre. La fonction d'autocorrélation du bruit (blanc), considéré comme résultant d'une suite stationnaire d'impulsions positives et négatives toutes de même amplitude E_b se produisant à des instants distribués selon la loi de Poisson avec une fréquence moyenne f_b et dont le nombre d'impulsions ayant le même signe est lui aussi aléatoire, est donnée par

$$\phi_{bs}(\tau) = \frac{f_b E_b^2}{2\pi\omega_0^2 \tau} \sin\omega_0\tau \quad (23)$$

Si R_e est la résistance équivalente de l'entrée du détecteur et T la température du circuit, on a

$$f_b E_b^2 = 2\pi\omega_0^2 4kR_e T \quad (24)$$

Des valeurs particulières des fonctions de corrélations sont :

$$\phi_{bs}(0) = 4k R_e T \omega_0$$

$$\phi_{ss}(0) = \frac{f_s E_s^2}{2\pi\omega_0^2} \left(\omega_0 - \frac{\pi f_s}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} \phi_{ss}(\tau_0) &= 0 & \text{pour } \tau &= \tau_0 \\ \frac{d}{d\tau} \phi_{ss}(\tau) &= 0 & \text{pour } \tau &= \tau_m \end{aligned} \quad (25)$$

τ_0 et τ_m sont des valeurs spécifiques à la fonction d'autocorrélation du signal. Ce sont les solutions de deux équations transcendentes.

Les eqs(25) ont été utilisées pour calculer à partir des valeurs expérimentales de $\phi_{ss}(\tau)$ la fréquence moyenne f_s et la valeur de E_s ; comme on connaît la valeur de Θ on peut déduire la valeur de H_0 à partir de l'éq(21).

On conçoit que pour mettre en oeuvre cette méthode l'expérience n'aurait de sens que si on pouvait faire tourner très vite un cylindre massif. On obtient des conditions expérimentales acceptables en faisant tourner les deux cylindres décrits plus haut sur paliers à gaz à l'aide d'une turbine à gaz. Pour éviter les parasites les moteurs électriques et l'éclairage fluorescent étaient bannis. Un équilibrage dynamique soigné des cylindres tournants, des précautions élémentaires concernant l'aérodynamique des paliers à gaz et de la turbine permettent d'éviter les résonances mécaniques et obtenir une stabilité de mouvement requise pour les mesures. Ainsi, on obtient pour les deux cylindres des vitesses angulaires avoisinant $\Omega = 2.\pi.500 \text{ s}^{-1}$.

L'ensemble de mesure comportait, après la bobine de détection, une chaîne d'amplification, à très faible bruit d'entrée, suivie du filtre passe-bas et d'un corrélateur en temps réel. Les caractéristiques de l'ensemble de mesure ont été soigneusement étudiées et leur stabilité de fonctionnement était suffisante pour effectuer des mesures prolongées et à des intervalles de plusieurs jours.

La procédure de mesure était la suivante : on fait tourner le cylindre à une vitesse angulaire de rotation Ω et on trace la fonction totale d'autocorrélation $\phi_t(\tau)$. Puis on arrête le cylindre et on trace la fonction d'autocorrélation du bruit seul $\phi_b(\tau)$. Du fait de l'indépendance du signal du bruit on déduit la fonction d'autocorrélation du signal en effectuant sur les courbes obtenues l'opération $\phi_t(\tau) - \phi_b(\tau) = \phi_s(\tau)$. Un exemple de l'enregistrement de $\phi_t(\tau)$ est donné dans la figure 2., celui de $\phi_b(\tau)$ est donné dans la figure 3. La figure 4. donne pour même expérience

ce $\phi_s(\tau) = \phi_t(\tau) - \phi_b(\tau)$. On voit sur ces courbes les valeurs correspondantes aux eqs(25).

Les résultats expérimentaux sont résumés dans le Tableau II.

TABLEAU II.

Cylindre	$\phi_{ss}(0)$	τ_0	τ_m	$\phi_{ss}(0)$	$\phi_{ss}(0)$
	10^{-14} v^2	10^{-3} sec	10^{-3} sec	$\frac{\phi_{ss}(0)}{\phi_{ss}(\tau_m)}$	$\frac{\phi_{ss}(0)}{\phi_{bs}(0)}$
(B)					
$\Omega = 2.\pi.450 \text{ s}^{-1}$	$1,1 \pm 0,13$	$4,09 \pm 0,5$	$7,1 \pm 0,65$	$-1,8 \pm 0,8$	$1,6 \pm 0,4$
(T)					
$\Omega = 2.\pi.435 \text{ s}^{-1}$	$3,25 \pm 0,19$	$3,64 \pm 0,2$	$7,2 \pm 0,4$	$-1,3 \pm 0,15$	$4,7 \pm 0,5$

A propos de ce tableau on peut faire les observations suivantes :

- la dispersion des mesures relatives au cylindre (B) est plus importante que celle relative au cylindre (T) ce qui correspond à un rapport signal/bruit supérieur pour ce dernier.
- la courbe de la figure 3. correspond bien au bruit calculé théoriquement.
- les valeurs τ_0 et τ_m sont indépendantes de la vitesse angulaire de rotation.
- pour différentes vitesses angulaires de rotation les courbes sont semblables à celle donnée en figure 4.. On vérifie que la fonction d'autocorrélation du signal $\phi_{ss}(0)$ est bien proportionnelle à Ω^2 , en accord avec la théorie.

Le traitement des résultats expérimentaux est effectué comme suit : pour le cylindre (B) on utilise la valeur expérimentale de $\tau_0 = 4,09.10^{-3} \text{ s}$ et l'éq(22) pour déterminer $f_s = 92 \text{ s}^{-1}$, soit $T_0 = 1,08.10^{-2} \text{ s}$. Avec cette valeur de f_s , la valeur expérimentale de $\phi_{ss}(0)$ et l'éq(25b) on détermine $E_s = 0,8.10^{-6} \text{ v}$. Comme la durée du renversement du champ magnétique est très courte le temps Θ est le "temps de réponse" du circuit d'entrée ; sa bande passante étant de 35 kHz, on prend $\Theta \cong 3,4.10^{-5} \text{ s}$. Utilisant alors l'éq(21), on obtient : $H_{0B} = 1,8.10^{-8} \text{ gauss}$ à $\Omega = 2.\pi.450 \text{ s}^{-1}$, en bon accord

avec la valeur calculée par l'éq(20). Pour ce cylindre $T_L = 6,10^{-3}$ s, on trouve $T_0/T_L = 1,8$, assez proche de la valeur, 2, prévue par la théorie, mais la même valeur que celle correspondant à la terre.

Pour le cylindre (T) on utilise la relation $T_0/T_L = 1,8$, d'où $f_s = 164$ s⁻¹. Utilisant cette valeur et l'éq(22) on trouve par le calcul $\tau_0 = 3,9.10^{-3}$ s en assez bon accord avec le résultat expérimental du Tableau II. Appliquant, ensuite, la même procédure que pour le cylindre (B) on trouve ici $E_s = 1,2.10^{-6}$ V et $H_0 = 1,9.10^{-8}$ gauss à $\Omega = 2.\pi.435$ s⁻¹, en assez bon accord avec la valeur calculée.

La mesure de la résistance équivalente au bruit de la bobine et du préamplificateur donne $R_e = 460$ ohm. D'après l'éq(25a) on calcule pour $\phi_{bs}(0) = 0,51.10^{-14}$ V², alors que la valeur expérimentale est de $0,68.10^{-14}$ V². A l'entrée de l'amplificateur la valeur efficace du bruit est $e_b = 0,52.10^{-6}$ V. La comparaison de cette valeur avec celle de E_s relatives aux deux cylindres justifie à postériori la méthode de détection utilisée.

Discussion et conclusion

Avant de tirer les conclusions de cette étude il est indispensable de discuter les effets parasites possibles.

Un simple examen des enregistrements des fonctions d'autocorrélation montre que les effets parasites "externes", dus aux courants industriels à 50 Hz ou à des fréquences plus élevées ont été éliminés. Les effets parasites "internes", dus à l'hétérogénéité (de masse, magnétique, de structure, etc.) correspondent à des f.é.m. induites à la fréquence de rotation. Ces effets parasites ont été éliminés par le filtre passe-bas, comme le montrent les enregistrements.

L'effet gyromagnétique produit un champ constant, indépendant du temps ; il ne sensibilise pas la bobine de détection.

Un autre effet parasite, difficile à éliminer celui-ci, serait dû à des charges électriques statiques s'accumulant sur le cylindre tournant. Le mécanisme serait le suivant : du fait des frottements sur l'air le cylindre acquiert une charge statique croissante en fonction du temps jusqu'à ce que le potentiel élec-

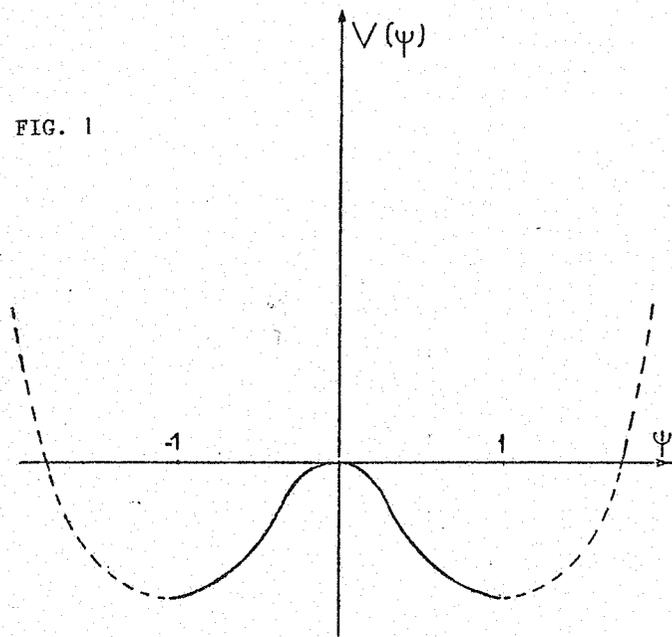
trostatique du cylindre atteigne le potentiel disruptif. Le cylindre se décharge, du moins partiellement, puis le cycle recommence. Ce cycle pourrait être aléatoire dans le temps. On peut trouver un ensemble de données numériques vraisemblables qui correspondraient au champ magnétique prévu par l'éq(20). Toutefois, l'allure de la fonction d'autocorrélation relative à ce phénomène est très différente de celle observée expérimentalement.

Si on tient compte des considérations précédentes et de la cohérence interne des résultats obtenus, pour chaque cylindre et entre les cylindres on est amené à affirmer l'existence du champ magnétique d'un corps tournant ayant les propriétés du modèle proposé.

RÉFÉRENCES

- (1) A. SCHUSTER, Brit. Assoc. Rep. (1891) cité par [6]
- (2) A. SCHUSTER, Proc. Phys. Soc. (London) 24 121 (1912)
- (3) H.A. WILSON, Proc. Roy. Soc. 104A 451 (1923)
- (4) W.F.G. SWANN, Phil. Mag. 3 1088 (1927)
- (5) W.F.G. SWANN et A. LONGACRE, J. Franklin Inst. 206 421 (1928)
- (6) P.M.S. BLACKETT, Nature 159 658 (1947)
- (7) P.M.S. BLACKETT, Phil. Trans. Roy. Soc. 245A 309 (1952)
- (8) G. LUCHAK, Canad. J. Phys. 29 470 (1951)
- (9) W.M. ELSASSER, Phys. Rev. 69 106 (1946) ; 70 202 (1946) ; 72 821 (1947)
- (10) E.C. BULLARD, Proc. Roy. Soc. 197A 433 (1949) ; 199A 413 (1949)
- (11) D. GUBBINS, Rev. Geophys. Space Phys. 12 137 (1974) ; Icarus 30 186 (1977)
- (12) N. KUMAR et R. NANDINI, Phys. Rev. 7D 3586 (1973)
- (13) B. BRUNHES, J. de Phys. 5 705 (1906)
- (14) M. MATUYAMA, Japon Academy Proc. 5 203 (1929)
- (15) J.A. JACOBS, Phys. Rep. 26c N°5 (1976)
- (16) M. SURDIN, Ann. Inst. Henri Poincaré 15 N°3 203 (1971)
- (17) H. HAKEN, Rev. Mod. Phys. 47 N°1 Janvier (1975)
- (18) M. SURDIN, J. Franklin Inst. 303 N°6 495 (1977)
- (19) Y.M. LEE, Statistical Theory of Communications, pp 240-48, Wiley & Sons, New York (1967).

FIG. 1



Courbe donnant le "potentiel" V en fonction du paramètre d'ordre ψ .

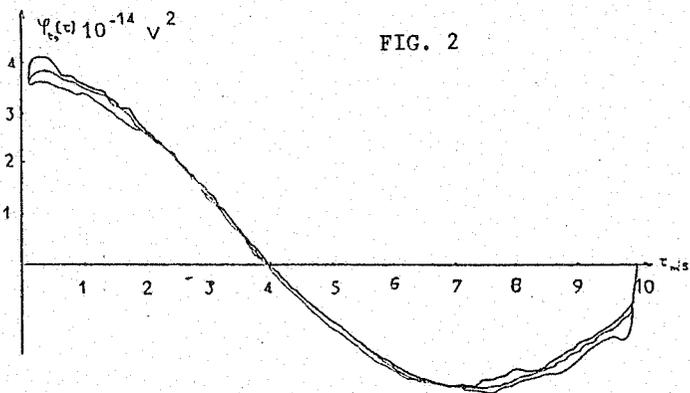
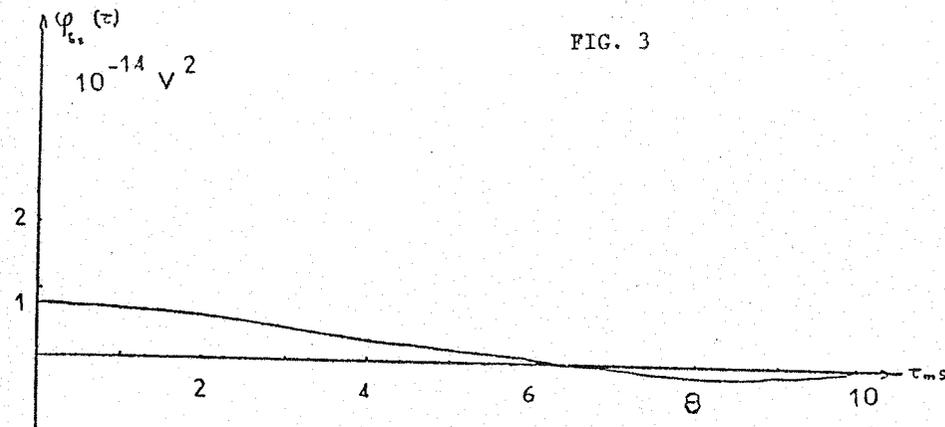


FIG. 2

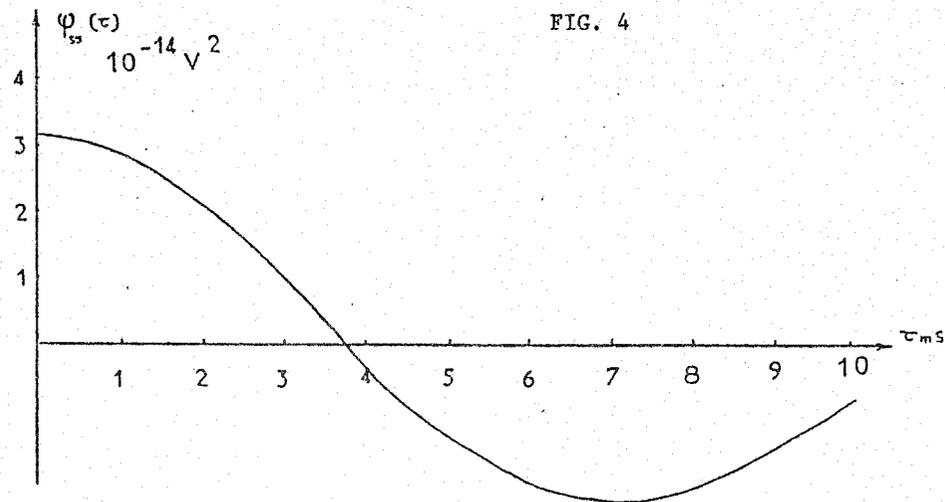
Enregistrement de la fonction d'autocorrélation totale $\phi_{ts}(\tau)$ pour le cylindre (T) à $\Omega = 2.\pi.435 \text{ s}^{-1}$.

FIG. 3



Enregistrement de la fonction d'autocorrélation du bruit $\phi_{bs}(\tau)$.

FIG. 4



Courbe donnant la fonction d'autocorrélation du signal $\phi_{ss}(\tau) = \phi_{ts}(\tau) - \phi_{bs}(\tau)$ résultant des deux enregistrements précédents.