TRIBUNE DE DISCUSSION

(PREMIER PROBLÈME)

L'EXPLICATION THÉORIQUE DE L'EXPÉRIENCE DE STERN ET GERLACH

Pour le premier problème que, comme suite à notre éditorial du n° 1, vol. 5, 1980, nous soumettons à la sagacité de nos lecteurs, nous avons choisi l'explication théorique de l'expérience de Stern et Gerlach.

Les raisons de ce choix sont simples. D'une part cette expérience est considérée comme administrant une preuve directe de la quantification du spin et elle a donc de ce fait un intérêt fondamental. D'autre part la mesure du spin est impliquée dans le grand débat sur le paradoxe E.P.R., ce qui lui confère un regain d'actualité et une deuxième source d'intérêt fondamental.

C'est pour la brièveté du langage qu'on parle de "mesure" du spin par un appareil non spécifié. En réalité, comme chacun sait, il n'existe pas de "spin-mètre", et la valeur du spin s'obtient par *inférence logique* à partir d'une mesure de position. Le prototype de cette dernière sorte de mesure est précisément l'expérience de Stern et Gerlach, et son traitement théorique consiste à établir l'inférence logique en question.

Les explications existant à ce jour n'apparaissent pas pleinement convaincantes, et nous voudrions mettre en lumière quelques points litigieux, sans prétendre être exhaustifs.

x

x x

Il est tout d'abord indispensable, puisqu'on doit raisonner sur une mesure expérimentale et lui appliquer la théorie quantique de la mesure, de passer en revue les éléments essentiels de l'appareillage[1], ceux qui vont donner lieu à transposition mathématique. On dispose d'une source de particules -un collimateur- qui par construction fixe le *domaine d'espace* D_0 dans lequel se produit l'émission*, qu'on caractérise d'ordinaire uniquement par la largeur de la fente. Le faisceau de particules passe ensuite dans un champ magnétique inhomogène qui *le sépare en deux* ; enfin ces deux faisceaux sont révélés par leur impact sur un *écran*.

Pour suivre à la lettre les prescriptions dérivées de l'axiomatique de la Mécanique quantique, le traitement théorique *calqué sur le dispositif expérimental* devrait être le suivant. Le collimateur joue le rôle d'instrument de *mesure préparatoire* (pour reprendre la terminologie consacrée), une particule est donc représentée, à un instant d'émission qu'on peut prendre pour zéro, par une fonction d'onde (à deux composantes) ψ_0 astreinte seulement à respecter les conditions d'émission ; ψ_0 est donc *l'un quelconque* des vecteurs d'une variété M d'un espace de Hilbert définie comme l'ensemble des fonctions d'onde ayant D_0 pour support** d'espace. M est de dimension infinie.

Une telle fonction d'onde est régie, pour $t \geqslant 0$, par une équation de Pauli dans l'hamiltonien de laquelle entre le champ magnétique dispersif, supposé connu. Théoriquement on sait donc calculer la transformée $\psi(t)$ à tout instant $t \geqslant 0$ de toute fonction d'onde initiale ψ_0 de M.

La troisième étape du raisonnement consisterait alors à calculer la densité de probabilité avec laquelle une particule représentée par $\psi(t)$ frappe l'écran, non pas à un instant $t_0 > 0$ fixé, mais à *un instant* t *quelconque* de l'intervalle $(0, +\infty)$.

Ce n'est pas du tout ainsi que l'on procède, et les explications proposées à ce jour(2) comportent toutes des cascades d'approximations qui les font s'écarter complètement de ce schéma idéal.

x

x x

*On devrait aussi, semble-t-il, tenir compte que les directions d'impulsion à l'émission sont enfermées dans un angle solide défini par le collimateur ; mais il est admis en règle générale qu'on n'a pas à tenir compte de cette seconde condition -cf plus loin, § 4.

**support au sens des mathématiques : sous-espace de l'espace de définition de la fonction sur lequel cette fonction est $\neq 0$.

On peut arguer que cela n'a pas d'importance, parce que la résolution du schéma idéal soulèverait des difficultés mathématiques insurmontables, et qu'il convient dans ces conditions de laisser la rigueur aux mathématiciens. En la circonstance présente, ce point de vue ne nous apparaît pas fondé.

S'il ne s'agissait que de la n-ième application d'une théorie dont la solidité des fondements a déjà été antérieurement et sérieusement éprouvée, il n'y aurait aucun inconvénient à user d'approximations de toutes sortes qui évitent des calculs fastidieux ou inextricables : la prédiction théorique n'est après tout, dans des cas de ce genre, qu'un guide pour l'expérimentation.

Quand il s'agit au contraire d'une vérification fondamentale de la théorie, cette optique n'est plus acceptable. Il est totalement inutile de se doter d'une axiomatique rigoureuse de la représentation, de l'évolution et de la mesure des propriétés d'un système si on doit aussitôt l'amender par des correctifs de portée incertaine dans son application à un phénomène *d'importance majeure et dont le rôle serait précisément de la tester* : la rigueur* devient ici un impératif catégorique faute duquel on ne peut plus certifier que la théorie est vérifiée. Qu'on nous permette de citer ici le principe clairement exposé par H. Poincaré dans l'introduction de ses "Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste"(3) : "le but de la Mécanique céleste n'est pas atteint quand on a calculé des éphémérides plus ou moins approchées sans pouvoir se rendre compte du degré d'approximation obtenu. Si l'on constate, en effet, une divergence entre ces éphémérides et les observations, il faut que l'on puisse reconnaître si la loi de Newton est en défaut ou si tout peut s'expliquer par l'imperfection de la théorie".

Or l'expérience de Stern et Gerlach nous semble, compte tenu de l'importance qu'on lui attribue et que nous avons rappelée au début, être de celles qui devraient être soumises à ce principe, et dont les explications existantes n'y satisfont malheureusement pas. Nous allons en préciser les défauts, tout au moins tels qu'ils nous apparaissent.

Nous n'écartons certes pas l'hypothèse que notre critique puisse tomber à faux sur tel ou tel point par insuffisance de

*en incluant dans celle-ci la sujétion qui consiste, quand on est obligé de consentir des approximations, à évaluer *numériquement* une majorante de l'erreur commise.

documentation ou d'analyse ; mais nous pensons que, si tel est le cas, les réfutations qui nous seront opposées seront de quelque utilité, non seulement pour les rédacteurs de cet article, mais pour bon nombre de physiciens.

x

x x

Première question

Pour la clarté de l'exposé, il est préférable de considérer d'abord le second point du programme défini au paragraphe 1, c'est-à-dire la séparation de la fonction d'onde initiale en deux trains d'onde pratiquement disjoints et aboutissant à la formation de deux taches distinctes sur l'écran.

Les démonstrations existantes utilisent une double démarche, avec des modalités légèrement variables suivant les auteurs, mais qui pour l'essentiel peut se schématiser ainsi : l'évolution temporelle de l'impulsion est obtenue par le traitement, purement quantique, de l'équation de Pauli (avec naturellement intervention de l'interaction champ-spin), tandis que la recherche de l'axe moyen des faisceaux émergents repose sur l'emploi de l'approximation W.K.B., réduite d'ailleurs à son premier ordre ce qui revient pratiquement à remplacer la Mécanique quantique par la Mécanique classique. C'est cette approximation qui appelle des réserves.

On sait en effet que la méthode W.K.B. repose sur un développement de la solution par rapport aux puissances de h et que ce développement diverge. Cette divergence est très vraisemblablement en relation avec l'étalement du paquet d'ondes et procède sans doute de la même raison profonde ; cette relation est à vrai dire assez mal élucidée, mais on peut présumer que la méthode W.K.B., en même temps qu'elle sert à construire la solution, rend compte de l'étalement du paquet d'ondes et par suite d'une cause possible de recouvrement des faisceaux, *à condition que son emploi soit légitimé.*

Il est bien connu qu'on a le droit de se servir de séries divergentes et qu'on peut obtenir avec elles un degré d'approximation voulu en prenant un nombre fini de termes, pourvu que le paramètre de développement, ici h, soit inférieur à une borne déterminée par le degré d'approximation visé et le nombre de termes conservé(4). Pour la série W.K.B. en particulier, les méthodes de Maslov(5) ont apporté de gros progrès analytiques permettant de cerner plus finement les conditions d'approximation.

Tant qu'il ne s'agit que de démontrer en principe que la Mécanique classique peut être considérée comme la limite, pour $h \to 0$, de la Mécanique quantique, la méthode W.K.B. ne pose aucun problème quoique h ait une valeur bien fixée : c'est en réalité un rapport de la forme h/K, où K est une quantité de même dimension que h et qui dépend du type de système étudié, qui doit être suffisamment petit ; et, pour une démonstration de principe, on peut toujours admettre qu'il en est ainsi.

Mais dans le présent cas, justement, cette quantité K est fixée par l'appareillage et par conséquent, pour qu'on soit certain que l'approximation W.K.B., à quelque ordre que ce soit, prédit bien théoriquement des faisceaux séparés, il faut s'assurer *numériquement* que la valeur de h est bien intérieure à un intervalle déterminé $(0, \varepsilon)$. Pour regarder la question sous un angle légèrement différent, il faut s'assurer que l'étalement du paquet d'ondes, dont on sait combien il peut être rapide dans certains cas, ne l'est pas trop dans l'expérience de Stern et Gerlach.

Il ne semble pas que cette vérification numérique ait jamais été faite, à notre connaissance. Mais comme nous visons précisément à rassembler le maximum d'informations, nous arrivons ainsi à notre première question :

Sait-on, ou peut-on, justifier numériquement l'approximation W.K.B. dans le cas de l'expérience de Stern et Gerlach ?

x

x x

Deuxième question

La séparation des faisceaux peut être masquée par une deuxième cause de dispersion, la largeur de la fente d'émission (largeur que nous compterons suivant la cote z). Les auteurs se sont préoccupés de ce facteur (plus peut-être que de l'étalement du paquet d'ondes) ; mais ils déterminent la dispersion minimale en impulsion en fonction de la largeur de la fente au moyen de la relation d'incertitude. Or, si naturel que paraisse ce procédé à première vue, nous pensons qu'il n'est pas légitime.

En effet, aux termes des résultats rigoureux de la Mécanique quantique, dans une relation telle que $\Delta z . \Delta p_z \geqslant \hbar/2$, Δz représente *l'écart quadratique moyen* de la position z pour une fonction d'onde ψ_0 *bien spécifiée* (Δp_z ayant une signification identique pour la même ψ_0). Or nous avons vu, § 1, que ψ_0 peut être l'une quelconque des fonctions d'onde de la variété M, c'est-à-dire des fonctions ayant D_0 pour support d'espace. On se trouve un peu embarrassé pour fixer la longueur de D_0 suivant la normale au plan de la fente ; mais, en admettant une géométrie "raisonnable", il est clair que l'écart quadratique Δz est inférieur à la largeur de la fente quelle que soit $\psi_0 \in M$. Ce qui est le plus ennuyeux, c'est qu'il peut lui être très inférieur, comme ce sera le cas pour une fonction en aiguille ayant D_0 pour support (ce qui signifie simplement que ce n'est pas la largeur de la fente qui détermine la localisation du corpuscule, parce que la fente est un instrument de mesure *préparatoire*, qui sélectionne une variété ∂M dont toutes les fonctions sont possibles*). Il en résulte que, dans l'inégalité $\Delta p_z \geqslant \hbar/2\Delta z$, ce n'est pas seulement $\hbar$ et la largeur de la fente qui déterminent le second membre, et qu'il est difficile d'avoir une estimation même du minimum de Δp_z. A quoi peut s'ajouter le fait que les explications existantes s'en tiennent toujours au minimum, ce qui n'a aucune raison d'être puisque la relation d'incertitude est une inégalité.

Δp_z étant ainsi très largement inconnu, il semble vraiment difficile de porter une conclusion sur le non-recouvrement des faisceaux.

Il faut enfin remarquer qu'il serait assez naturel de prendre pour dispersion initiale en impulsion, non pas l'écart quadratique moyen Δp_z déduit de l'incertitude de position, mais la dispersion réelle que donne le collimateur, et qu'un calcul élémentaire montre être de plusieurs ordres de grandeur supérieur à Δp_z. Il est vrai que c'est une pratique généralement acceptée en Mécanique quantique(6) de ne pas tenir compte, pour une mesure préparatoire, de deux conditions à la fois si elles portent sur des opérateurs non commutatifs ; mais cette pratique ne semble pas découler inflexiblement des axiomes, et elle constitue une contrainte physiquement assez artificielle.

---

*La mesure préparatoire est souvent négligée par la Mécanique quantique, dont elle est pourtant un point fondamental -et épineux. On trouvera à ce sujet une discussion assez poussée de la question dans(6).

Nous en arrivons ainsi à notre seconde question.

Cette argumentation est-elle réfutable ? Existe-t-il un moyen de mieux prédire théoriquement le non-recouvrement des faisceaux ?

x

x x

Troisième question

Nous avons enfin un dernier point à examiner, le plus surprenant peut-être.

Supposons qu'on ait déterminé, à partir de sa donnée initiale ψ_0, la fonction d'onde $\psi(t)$ qui décrit l'évolution d'une particule. Il reste à en déduire la répartition de probabilité de l'impact de cette particule sur l'écran. On va alors se heurter à un très sérieux obstacle.

Ce que l'axiomatique de la Mécanique quantique nous fournit en effet, c'est la probabilité pour qu'une mesure faite à un instant t_0 quelconque mais *fixé* localise la particule dans tel ou tel domaine de l'espace, c'est-à-dire, pour ce qui nous intéresse, dans tel ou tel volume de la couche sensible qui sert de détecteur. Mais l'écran est mis en place une fois pour toutes, bien avant l'émission de la particule considérée, et nous n'avons aucune raison de dire que la détection aura lieu à un instant plutôt qu'à un autre : l'axiomatique est muette à cet égard. Nous sommes donc obligés d'admettre que la mesure s'effectuera, d'elle-même, à n'importe quel instant $t > 0$, et par conséquent de poser le problème sous cette forme : $\psi(t)$ étant donnée, quelle est la probabilité pour que la particule soit localisée dans tel volume de la couche sensible à un instant quelconque postérieur à l'émission ? C'est l'énoncé que nous avions adopté au paragraphe 1.

Déduire cette probabilité de la densité de probabilité de présence classique $|\psi|^2(t)$ apparaît comme un problème très difficile ; il n'est en tout cas pas résolu à notre connaissance, et on peut même se demander s'il a jamais été soulevé.

Aussi certains auteurs (cf(2)) tournent-ils cette difficulté en remplaçant la probabilité définie ci-dessus par celle de trouver la particule, à un instant donné *quelconque*, dans l'un ou l'autre des faisceaux émergents. Si les calculs antérieurs ont bien abouti à la démonstration de l'existence de trains d'ondes séparés balayant les deux faisceaux, il est facile de voir que la probabilité ainsi obtenue est indépendante de l'instant choisi ; il suit de là que cette méthode est loin d'être dénuée de sens physique. Elle n'en est pas pour autant logiquement fondée, car on ne peut pas prétendre que l'écran est un instrument de mesure qui localise la particule dans un faisceau tout entier. Autrement dit la méthode revient à remplacer l'instrument de mesure réellement utilisé par un autre qui est totalement fictif. Il resterait donc à montrer l'équivalence de ces deux instruments, ce qui nous ramène au problème précédent.

Notre dernière question est donc :

Peut-on, à partir de la connaissance de la densité de probabilité de présence en tout point de l'espace à chaque instant, $|\psi|^2(t)$, déterminer la probabilité d'impact sur un écran ? Ou existe-t-il une équivalence connue à ce problème ?

x

x x

Nous serions heureux que ceux de nos lecteurs qui ont des lumières sur ce sujet nous envoient leurs réflexions, et s'ils pouvaient le faire dans un délai de 9 mois (délai qui paraît naturel), ce serait parfait. Bien entendu les autres questions théoriques que pourraient soulever nos lecteurs sur le même sujet seront les bienvenues.

La Rédaction.

RÉFÉRENCES

(1) W. Gerlach et O. Stern, Zeits. f. Phys., 3, 349 (1922)
Phipps et Taylor, Phys. Rev., 29, 309 (1927)
Wrede, Zeits. f. Phys., 41, 569 (1927)

(2) W. Pauli, Die Allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik, p. 65 de Handbuch der Physik V/1, Springer, Berlin, 1958 (réédition de l'article de la 2ème édition des Handbuch, XXIV/1, 1933)
D. Bohm, Quantum mechanics (Sec. 22.6), Constable, Londres, 1954
D.J. Blokhintsev, Mécanique quantique, § 111, Masson, Paris, 1967

(3) H. Poincaré, Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste (t. I, Introduction), Dover, N.Y., 1957 (reproduction de l'édition originale de 1892)

(4) Whittaker et Watson, A course of modern analysis (chap. VIII), Univ. press, Cambridge, 1958

(5) V.P. Maslov, Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques, Dunod-Gauthier-Villars, Paris, 1972

(6) E. Prugovečki, Quantum mechanics in Hilbert space (chap. IV, § 1.4), Acad. Press, N.Y. and London, 1971.