TRIBUNE DE DISCUSSION

(DEUXIÈME PROBLÈME)

LA MESURE EN MÉCANIQUE QUANTIQUE

Dans notre première tribune de discussion, parue dans notre précédent numéro (1980, vol. 5, n° 2, p. 65), nous avions, à propos de l'expérience de Stern et Gerlach, posé trois questions dont les solutions actuelles ne nous semblent pas connues, ou tout au moins pas pleinement satisfaisantes. Nous croyons pouvoir dire que ces questions ont retenu l'attention de plusieurs physiciens qui s'étaient déjà préoccupé de ce problème ; mais, comme il peut en intéresser d'autres qui n'auraient pas eu notre numéro 2 sous les yeux et qui seraient susceptibles de participer à la discussion, nous nous permettons de rappeler brièvement ces questions, en renvoyant pour plus de détails à notre numéro 2.

1. - Les explications existantes de l'expérience de Stern et Gerlach font toutes appel à l'approximation W.K.B. : sait-on, ou peut-on, justifier numériquement cette approximation dans ce cas précis ?

2. - La séparation des faisceaux qu'on constate expérimentalement est habituellement expliquée à partir des relations d'incertitude : leur pouvoir semble en l'occurrence discutable ; existe-t-il un formalisme plus précis qui permette de prédire théoriquement cette séparation ?

3. - La Mécanique quantique fournit, pour la densité de présence d'une particule, une expression de la forme $|\psi(t)|^2$ pour t quelconque, mais fixé ; mais l'expérience ne fournit les traces d'impact sur un écran qu'à un instant $t \geqslant 0$ mais inconnu : peut-on, à partir de la connaissance de $\psi(t)$ pour tout t, prédire la probabilité d'impact à un instant quelconque $t \geqslant 0$? Existe-t-il

une équivalence connue à ce problème ?

x

x x

L'intérêt suscité par ce sujet nous a poussés à élargir le cercle des questions pour en arriver finalement au problème général de la mesure en Mécanique quantique. C'est ce second sujet que nous voudrions soumettre aujourd'hui à nos lecteurs. Peut-être trouvera-t-on dans cette suite quelque manque de variété mais ce n'est pas de notre part une politique délibérée et la troisième tribune de discussion changera totalement de paysage.

x

x x

I - Conventions préliminaires

Avant de commencer, il nous est nécessaire de préciser trois points :

a. - C'est volontairement que nous nous astreignons à donner aux questions posées une formulation exclusivement mathématique : c'est la seule en effet dont la solution rigoureuse -si elle existe- apporte une réponse décisive. Des arguments qualitatifs, tels que ceux qu'on peut tirer des relations d'incertitude, quelque utiles qu'ils soient, prêtent à des contestations sans fin.

b. - Puisque nous parlons formalisme, nous ajouterons que nous nous plaçons ici dans un cadre strictement hilbertien : ne sont admises comme fonctions d'onde que des fonctions de carré sommable définies sur un $\mathcal{R}^n$, n dépendant bien entendu du système représenté (voir la justification de cette attitude dans ([1]), p. 223).

c. - Nous ne considérerons que des opérateurs auto-adjoints R dont la décomposition spectrale est de la forme

$$(1) \qquad R = \sum_i \lambda_i E_i$$

donc à spectre purement ponctuel, mais dont les projecteurs E_i peuvent être de dimension quelconque, de 1 à $+\infty$. Cette décomposition se présente d'elle-même, avec des spectres simples ou de multiplicités finies, pour quelques opérateurs d'intérêt physique ; mais à vrai dire, en tant qu'opérateurs de mesure, ils sont plutôt rares. Par contre l'opérateur position -le plus

important de tous puisqu'en dernière analyse toutes les mesures sont des mesures de position (cf. ([2]))- a un spectre purement continu ; mais, comme une position n'est jamais mesurée qu'avec une certaine erreur, on peut, suivant le procédé dû à Von Neumann (([1]), p. 220), le remplacer par un opérateur aussi voisin de lui qu'on veut (uniformément) et à spectre discret, mais dont toutes les variétés propres sont de dimension infinie. D'où la forme générale (1) adoptée ci-dessus.

x

x x

II - L'axiome de la mesure

Pour la commodité de l'exposé, nous le scinderons en deux parties bien connues. Soit un système représenté par la fonction d'onde ψ, sur lequel on mesure une grandeur physique $\mathcal{R}$ à laquelle on a fait correspondre l'opérateur R. Alors :

a) une mesure de $\mathcal{R}$ faite sur ψ donne pour résultat une valeur propre λ_i de R, avec une probabilité égale à $\|E_i \psi\|^2$;

b) cette mesure fait subir à la fonction d'onde une variation discontinue qualifiée de "réduction du paquet d'ondes", ce que nous abrègerons en "réduction d'onde" ; il existe aujourd'hui deux variantes de cette partie de l'axiome : la formulation originelle de Von Neumann, dans laquelle la nouvelle fonction d'onde est simplement astreinte à être contenue dans la variété propre définie par le projecteur E_i, et une autre version utilisée par certains auteurs ([3]), qui posent que la nouvelle fonction d'onde est la projection renormalisée de l'ancienne, soit $E_i \psi / \|E_i \psi\|$.

Comme notre ambition n'est autre que d'ouvrir une discussion, nous ne nous prononçons pas entre ces deux variantes.

Quoi qu'il en soit de ce dernier point, cet axiome pose un problème quand on veut le mettre en pratique. D'après lui en effet, toutes les données quantitatives relatives à la mesure reposent uniquement sur l'opérateur R. Mais cet axiome ne spécifie évidemment pas quel est l'appareil de mesure adapté à cet opérateur, et il n'énonce aucun principe directeur à cet égard. L'expérimentateur est en fait contraint, pour le choix de cet appareil, de revenir à la grandeur classique $\mathcal{R}$ et de fixer son choix en fonction de l'image classique que la physique se fait du corpuscule, c'est-à-dire de renoncer, ne serait-ce qu'un instant, à la représentation quantique. Il semble pourtant qu'en bonne logique la Mécanique quantique devrait être à même de fournir aussi les critères de choix de l'appareillage de mesure.

Nous ne sommes pas les premiers à poser ce problème, et le principe de son étude, sinon de sa solution, est connu. La mesure découle en effet d'une interaction entre le système à mesurer, qui est de dimensions corpusculaires et par suite non décelable directement, et le système que nous appellerons "système mesureur" (de préférence à "appareil de mesure" : nous dirons plus loin pourquoi) qui est de dimensions macroscopiques mais justiciable comme le premier de la représentation quantique. Cette interaction entraîne une évolution bien déterminée par une équation bien définie, et qui aboutit à une modification de l'état quantique du système mesureur qui, elle, est décelable à l'observation.

Ce principe d'explication a inspiré de multiples tentatives théoriques (voir par exemple [4][5]), mais il ne semble pas que les solutions proposées soient pleinement satisfaisantes. C'est pourquoi nous souhaiterions apporter notre contribution au débat en en réexaminant les prémisses et les modalités.

x

x x

III - Les conditions expérimentales de la mesure

C'est évidemment de ces conditions qu'il faut partir si on veut asseoir le formalisme sur des bases réalistes.

Si on passe en revue les différents modes de détection des corpuscules, il nous semble qu'on peut symboliser l'interaction entre système mesuré et système mesureur par une "réaction" de la forme

$$C + M \rightarrow C' + M' \qquad (2)$$

où C et M sont respectivement le système corpusculaire et le système mesureur avant l'interaction, M' le système mesureur après l'interaction, et C' un système corpusculaire, variable suivant les cas. Bien que ce ne soit pas d'une importance décisive pour la suite il n'est pas inutile de noter que, d'après ces cas, on peut classer les mesures en trois catégories :

α) mesure directe destructrice, où le système C disparaît en tant qu'entité autonome (capture d'un électron par une couche sensible : C' n'existe pas) oumême disparaît totalement (détection photo-électrique, C est le photon, C' l'électron émis) ;

β) mesure directe qu'on peut appeler préservatrice (trace dans une chambre de Wilson, C et C' sont la même particule) ;

γ) mesure indirecte, dans laquelle C est composé de deux sous-systèmes C_1 et C_2, dont l'un est mesuré par une des deux méthodes précédentes, ce qui permet d'en déduire la valeur de la grandeur recherchée pour l'autre (expérience de Compton-Simons, mesure indirecte d'un spin).

Si la nature du système C' ne soulève guère de questions, il n'en est pas de même du mesureur M', et nous pensons qu'il est nécessaire d'insister sur le fait que M', en tant que système, est toujours fortement différent de M. Ne serait-ce qu'en restant à l'échelle corpusculaire, il est clair qu'un atome ionisé par un photon n'est plus le même système que l'atome neutre d'avant la mesure.

Mais il est important de remarquer avec Louis de Broglie qui, le premier à notre connaissance [2], a attiré l'attention sur ce fait "qu'un dispositif de mesure comporte nécessairement l'apparition d'un phénomène macroscopique observable déclenché par un individu microphysique" ; sans cette modification macroscopique de M en M' il n'est pas de mesure possible. C'est pourquoi nous avons appelé M système mesureur plutôt qu'appareil de mesure. Ce dernier comporte en général toute une série de dispositifs annexes (amplificateurs, convertisseurs, etc.) qui ont pour seul but de faciliter l'observation.

IV - Première question

Esquissons-en tout de suite l'idée directrice.

L'opération effective de mesure repose sur une conversion d'information : au système C et à sa grandeur $\mathcal{R}$, inaccessibles directement, on substitue un système mesureur M', sur lequel on va choisir une grandeur $\mathcal{R}'$ macroscopiquement observable. Le système M' relevant de la Mécanique Quantique au même titre que C, on doit faire correspondre à $\mathcal{R}'$ un opérateur R' auquel on appliquera l'axiome de la mesure. Le problème est de savoir quelles conditions on doit imposer à R' pour que toutes les informations contenues dans cet opérateur correspondent exactement à celles qu'on attribue à l'opérateur R.

Passons à la mise en forme mathématique.

Supposons qu'à un instant initial $t = 0$ avant la mesure, C soit représenté par une fonction d'onde connue ψ, et M par une fonction d'onde ϕ également connue. La fonction d'onde du système global C + M à l'instant initial est donc $\theta = \psi\ \phi$, et elle devient, à un instant quelconque, $\theta' = U_t\ \theta$, où U_t est l'opérateur unitaire déterminé par l'hamiltonien global du système, lui aussi connu.

A cet instant t, θ' étant parfaitement déterminée, toutes les propriétés du système mesureur M' sont connues[x], mais en probabilité seulement, selon les canons de la Mécanique quantique.

Choisissons pour t l'instant de la mesure qu'on va effectivement pratiquer sur M'. Cette mesure est maintenant une simple lecture, c'est-à-dire la constatation de la valeur de la grandeur physique que nous avons appelée $\mathcal{R}'$. Soit

(3) $$R' = \sum_j \lambda'_j\ E'_j$$

la décomposition spectrale de l'opérateur correspondant. D'après la première partie de l'axiome de la mesure (cf § II), la probabilité d'observer la valeur propre λ'_j (ou l'un des états propres définis par E'_j) est $\|E'_j\ \theta'\|^2$. (La deuxième partie de l'a iome de la mesure, à savoir la réduction d'onde, n'a ici plus d'intérêt : elle est pratiquement invérifiable, et on peut par ailleurs douter que la lecture d'une grandeur macroscopique de M' perturbe

---

[x]Si le système corpusculaire C' de (2) existe, M' est représenté par un opérateur statistique ; mais cela ne change rien au fait que la connaissance de θ' détermine les propriétés de M', et nous pouvons pour plus de commodité continuer à raisonner sur θ'.

sa fonction d'onde).

Il se présente alors un double problème :

a) Il faut définir la grandeur physique que l'on considère comme déterminée par la lecture de M', et la chose n'est pas si simple.

En effet, pour que la lecture puisse s'effectuer, il faut que M' soit dans un état macroscopiquement stationnaire ; certes il arrive souvent -pas toujours- que se produise un phénomène de relaxation qui efface graduellement la trace de l'expérience, mais néanmoins on peut admettre l'existence de cette stationnarité pendant un certain laps de temps. On peut alors en inférer -et c'est ce que font la plupart des auteurs [6]- que cela implique que l'état quantique de M' est un état propre de son hamiltonien H'. Sans vouloir la réfuter ni la soutenir, cette position ne nous semble pas s'imposer, tout au moins a priori. Une valeur propre de H' est en effet l'énergie de M' et, après tout, est-ce une énergie qu'on observe dans une chambre à bulles ou sur une plaque photographique ?

On est donc conduit, parmi toutes les indications que fournit la lecture de M', à en choisir une à laquelle on fera ensuite correspondre l'opérateur R'. Doit-on prendre une grandeur proprement dite, traduisible en termes de valeurs propres, ou une propriété, traduisible en termes de projecteurs ? ou faut-il envisager d'autres éventualités ?

Le choix de R' reste donc assez ouvert : il est seulement soumis pour l'instant à cette stipulation assez vague qu'il doit correspondre à la "lecture" faite sur M'.

Mais on voit tout de suite apparaître un premier impératif, qui est que les probabilités $\|E'_j\ \theta'\|^2$ soient constantes dans le temps -au moins, peut-être, en moyenne définie sur l'intervalle précédant la relaxation évoquée ci-dessus. Faute de quoi la notion de prévision probabiliste sur un ensemble statistique de mesures n'aurait plus de sens puisqu'elle deviendrait invérifiable. De même, la stationnarité macroscopique indispensable à la lecture de M' n'aurait plus qu'une traduction mathématique douteuse.

b) Mais ce ne sont pas là les seules conditions qui pèsent sur le choix de R' : il faut que les prévisions que cet opérateur "effectif" attaché à M' permet de formuler, soient en exacte correspondance avec celles qu'on attribue à l'opérateur "idéal" R. Reprenons l'exemple R' = H', hamiltonien de M' ; si on applique les règles de Von Neumann sur la mesure indirecte, on infère de la lecture de M' un jugement certain sur l'état quantique de C' ou de C ; mais cela ne suffit pas : il faut encore s'assurer, pour C, que son état ainsi déduit est bien un état propre de R.

A la réflexion deux nouvelles conditions apparaissent alors.

Pour satisfaire à la première partie de l'axiome de la mesure (§ II), il faut d'abord que la constatation d'une valeur propre λ'_j (ou d'un état propre correspondant) de R' détermine univoquement la valeur propre -inaccessible directement- de l'opérateur R ; en d'autres termes il faut qu'à chaque projecteur E'_j de la décomposition (3) corresponde un et un seul projecteur de la décomposition (2) ; avec un léger artifice on peut exiger que cette correspondance soit bijective.

Mais ce n'est pas tout : il faut en outre que les deux probabilités correspondantes soient égales c'est-à-dire, si on convient de caractériser la bijection par l'identité des indices, que l'on ait $\|E'_j\ \theta'\|^2 = \|E_j\ \psi\|^2$ pour tout j. Cette égalité introduit déjà une relation entre les projecteurs E_j et E'_j, mais cette relation va être rendue plus étroite si on fait intervenir la deuxième partie de l'axiome de la mesure.

En vertu de cette deuxième partie de l'axiome en effet, le choix de R' (et l'observation de M', bien entendu) doit "expliquer", c'est-à-dire déterminer mathématiquement, la réduction de la fonction d'onde ψ de C. Mais nous devons ici distinguer deux cas.

Si la mesure est destructrice (§ III, cas α), la prise en considération de la réduction d'onde n'a aucun intérêt, le corpuscule originel C étant désormais perdu dans M' et impossible à suivre. Si par contre la mesure est préservatrice (cas β) ou indirecte (cas γ) le système corpusculaire C continue d'exister en totalité ou en partie, et le problème de la nouvelle fonction d'onde se pose effectivement. Limitons-nous au cas β, plus court à expliciter : alors, en tant que système, C' n'est autre que C, mais il est en général dans un autre état, celui que précisément la mesure est censée déterminer. Il faut par conséquent que la connaissance de λ'_j obtenue par la lecture de M' entraîne la connaissance, soit de la fonction d'onde de C', soit de la variété propre de R dans laquelle se trouve cette fonction (suivant la version que l'on a adoptée de l'axiome de la mesure - cf. § II). En d'autres termes il faut que le projecteur E_j soit entièrement

déterminé par E'_j pour tout j, et qu'il découle de la forme de θ' que la fonction d'onde de C' se trouve dans la variété propre définie par E_j.

Nous pouvons maintenant résumer notre première question comme suit.

L'opérateur théorique R attaché au système corpusculaire C étant donné, ainsi que le système mesureur M, peut-on trouver un opérateur R' attaché à M' évolué de M, et tel que :

1. - R' corresponde à l'opération de lecture faite sur M', cette correspondance restant à préciser ;

2. - les probabilités d'obtention des valeurs propres de R' (calculées sur θ') soient indépendantes du temps (rigoureusement, approximativement ?) ;

3. - il existe une bijection entre les résolutions de l'identité de R et de R' telle que l'ensemble des projecteurs E_j soit déterminé par l'ensemble des E'_j et inversement, et telle que les probabilités soient conservées, c'est-à-dire que $\|E_j\ \psi\|^2 = \|E'_j\ \theta'\|^2$.

Il est clair que toutes ces propriétés doivent être indépendantes de ψ.

x

x x

V - Deuxième question

Nous ne voudrions pas décevoir l'attente de nos lecteurs en laissant dans l'ombre un problème manifestement connexe du précédent, qu'ils se sont sans doute déjà posé, et qu'on a souvent posé dans la littérature, sans grands résultats semble-t-il.

C'est évidemment un truisme de dire que l'interaction entre un système microphysique et un appareil macroscopique existe bien ailleurs que dans le processus de mesure, et on sait que la théorie classique distingue, depuis Von Neumann, deux cas :

- l'un, dans lequel on affirme que l'appareil effectue une mesure, et où on applique (nous ne nous préoccupons plus du tout de l'étude qui précède) l'axiome rappelé au paragraphe II : la fonction d'onde du système corpusculaire subit un changement brusque, non descriptible par une équation d'évolution, mais déterminé par cet axiome. Une conséquence importante en est, comme on sait, que, sur un ensemble statistique de mesures, un cas pur est transformé en un mélange ;

- l'autre cas est celui où on affirme que l'appareil ne fait subir au système qu'une perturbation relativement légère, on fait seulement varier ses probabilités d'impact ici ou là, etc., bref n'est pas un appareil de mesure. On pose dans ce cas que le changement de la fonction d'onde est régi par l'équation de Schrödinger (ou toute autre du type différentiel). Il en résulte entre autres qu'un cas pur est transformé en un cas pur. Pour la commodité du langage, nous dirons qu'un tel appareil est un appareil de remaniement[x] du système microphysique.

Un des traits caractéristiques de cette distinction est qu'on peut toujours transformer un cas pur en un mélange, mais qu'on ne peut jamais faire l'inverse, en vertu des théorèmes de Von Neumann sur "l'entropie" d'un ensemble statistique de systèmes. Cette impossibilité théorique a des répercussions physiques évidentes. Par exemple, pour reprendre l'expérience de Stern et Gerlach, on peut se demander où se situe la mesure: dans l'aimant ou sur l'écran ? Il n'est pas si facile de répondre par des voies qualitatives : il faudrait savoir si, après l'aimant, le système est un cas pur ou un mélange, donc savoir si, physiquement, on peut recombiner les faisceaux, etc.(7).

On se sent alors d'autant plus perplexe que la décision que tel appareil est un appareil de mesure ou de remaniement est laissée au libre arbitre du physicien et à sa connaissance intuitive des phénomènes. Il est vrai que, dans la pratique, il se trompe rarement, si même jamais. Encore que, comme on vient de le voir, il puisse se poser des questions qui mènent à d'inépuisables débats. A toutes fins utiles, on aimerait bien cependant disposer d'un critère plus objectif que l'intuition.

Il nous semble, compte tenu de ce que nous avons dit en fin du paragraphe III, qu'on pourrait adopter le critère physique suivant : est un appareil de mesure celui qui, du fait de son interaction avec le système corpusculaire, subit une modification macroscopique ; est un appareil de remaniement celui qui ne subit pas de telle modification. Nous aimerions -cela fait partie de la question- connaître l'opinion de nos lecteurs sur cette proposition.

[x] on pourrait songer au mot perturbation, mais il risque de créer une confusion : une mesure consiste aussi en une perturbation.

Admettons-la. Il reste à la traduire en termes mathématiques, et c'est alors évidemment dans la structure des opérateurs hamiltoniens qu'il faut chercher.

Dans un appareil de remaniement, la théorie classique traite le phénomène en se donnant l'hamiltonien du système corpusculaire dans un champ externe fixé, avec évidemment un terme d'interaction provenant de ce champ. Mais elle fait abstraction de la réaction que le système corpusculaire exerce sur l'appareil et par conséquent n'introduit pas d'hamiltonien global. Or, si petite que puisse être cette réaction dans un certain nombre de cas, elle existe, et on ne peut savoir ce que l'appareil est devenu que si on rétablit cet hamiltonien global. C'est d'ailleurs ce que nous avons fait dans les paragraphes précédents pour l'explication de la mesure parce qu'alors nous avons supposé que l'effet de la réaction était notable.

Dès lors le problème mathématique nous semble pouvoir se réduire à ceci.

Soit un système corpusculaire C et un appareil macroscopique A, tous deux de constitution connue ; l'hamiltonien global du système C + A est donc connu. Peut-on trouver un moyen de partager de tels hamiltoniens en deux classes : celle pour laquelle la perturbation de l'appareil A reste d'ordre corpusculaire, et celle pour laquelle cela s'amplifie jusqu'à l'échelle macroscopique ?

Il est clair que la réponse, si elle est possible, ne dépend que de la seule structure des hamiltoniens globaux.

La Rédaction.

RÉFÉRENCES

(1) J. Von Neumann, Mathematical foundations of quantum mechanics, trad. par R.T. Beyer de l'édition allemande de 1932, Princeton University Press, Princeton, 1955.

(2) L. de Broglie, La théorie de la mesure en mécanique ondulatoire, Gauthier-Villars, Paris, 1957.

(3) M.O. Scully, State reduction in quantum mechanics, Physics Reports, 43C, n° 13, Juillet 1978.

(4) L. Landau et E. Lifchitz, Mécanique quantique, Editions Mir, Moscou, 1966, chap. I § 7.

(5) L.E. Ballentine, The statistical interpretation of quantum mechanics, Rev. of Mod. Phys., 42 n° 4, p. 358, Oct. 1970, article dans lequel on trouvera une liste de références complémentaires assez complète, excepté que nous avons constaté avec surprise que le nom de L. de Broglie n'y figurait pas ; cf. cependant (2).

(6) D. Bohm, Quantum mechanics, Prentice Hall, N.J., 1951.

(7) E.P. Wigner, The problem of measurement, Am. J. Phys., 31, p. 6, 1963.