Annales de la Fondation Louis de Broglie
Vol. 6, n° 1, 1981

LES SOLUTIONS DU TYPE PARTICULE DANS UN MODELE A DEUX CHAMPS (ELECTROMAGNETIQUE ET SCALAIRE NON-LINEAIRE) EN INTERACTION

par : Federico EDJO,
Vladimir KASSANDROV,
Yakob TERLETSKY

Université de l'Amitié des Peuples,
MOSCOU B-302,
U.R.S.S.

(manuscrit reçu le 22 oct. 1980)

Sommaire : On donne le spectre des solutions régulières dans un modèle à interaction entre un champ électromagnétique et un champ scalaire à non-linéarité cubique. La liaison entre les caractéristiques dynamiques des solutions, particulièrement entre les valeurs du spin total et la charge électrique, est examinée. On montre que le modèle donné est valable pour décrire des particules avec une valeur entière quelconque (en unité $\hbar$) du spin.

Les solutions du type particule des équations de champ non-linéaires sont capables de décrire de nombreuses propriétés des particules élémentaires réelles. On entend par là, des solutions localisées dans un domaine restreint de l'espace et qui possédent des valeurs finies des intégrales du mouvement ([1]). Grâce à la non-linéarité des équations de champ les solutions du type particule peuvent interagir de façon non triviale ([2]), et déjà au niveau classique, pourraient même avoir un spectre discret des caractéristiques dynamiques (bien que jusqu'à présent on n'a pas encore trouvé un modèle semblable).

Dans le présent article, nous étudierons les propriétés des solutions du type particule sur la base du modèle d'interaction mutuelle entre un champ électromagnétique A_μ et un champ scalaire non-linéaire φ qui se décrivent par le lagrangien "*dimensionnel*" suivant :

$$(\mathcal{L})_{\text{dim}} = -\frac{1}{8\pi}\left\{\frac{(F_{\mu\nu})^2}{2} \pm (\partial_\mu + i\varepsilon A_\mu)\varphi^* (\partial_\mu - i\varepsilon A_\mu)\varphi \pm \sigma^2 (\varphi^*\varphi) \mp \frac{1}{2}\eta (\varphi^*\varphi)^2\right\}_{\text{dim}} \quad (1.1)$$

où $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$: tenseur électomagnétique ($\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$) et $\varepsilon, \sigma, \eta$: paramètres proportionnels.

Le modèle donné est une unification naturelle du modèle de Rosen ([3,4]) correspondant au cas $\eta = 0$ et au choix des signes inférieurs dans la formule (1.1), et du modèle scalaire avec une non-linéarité cubique ([5,6,7]) qui est obtenu de la formule (1.1) en absence du champ électromagnétique ($A_\mu = 0$). Avec cela l'introduction du terme scalaire non-linéaire dans le lagrangien de Rosen, élimine son défaut fondamental en rendant l'énergie des solutions du type particule (si on choisit les signes supérieurs dans (1.1)) positivement définie : voir ci-dessous (2.8). Un choix approprié des signes avec $A_\mu \neq 0$ et $\eta \neq 0$ conduit au modèle de Higgs ([8]) dans le lagrangien (1.1).

II - Equations de champ. Variables dynamiques

Comme il a été dit plus haut, en choisissant les signes supérieurs dans le lagrangien (1.1) et en utilisant les transformations :

$$(x_\mu)_{\text{dim}} = \frac{1}{\sigma} x_\mu, \quad (A_\mu)_{\text{dim}} = \frac{\sigma}{\sqrt{\eta}} A_\mu, \quad (\varphi)_{\text{dim}} = \frac{\sigma}{\sqrt{\eta}} \varphi$$

nous obtenons :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{8\pi}\left\{\frac{F_{\mu\nu}{}^2}{2} + (\hat{D}^*_\mu \varphi^*)(\hat{D}_\mu \varphi) + \varphi^*\varphi - \frac{1}{2}(\varphi^*\varphi)^2\right\}, \quad (2.1)$$

où

$$\hat{D}_\mu \equiv \partial_\mu - i\Omega A_\mu, \quad \hat{D}^*_\mu \equiv \partial_\mu + i\Omega A_\mu,$$

et

$$\Omega \equiv \frac{\varepsilon}{\sqrt{\eta}} \tag{2.2}$$

est le seul paramètre non-dimensionel qui reste dans le lagrangien. Le lien entre le lagrangien "*dimensionnel*" $(\mathcal{L})_{dim}$, l'énergie $(W)_{dim}$, le spin $(S)_{dim}$ et la charge électrique $(Q)_{dim}$ avec les valeurs non-dimensionnelles correspondantes $\mathcal{L}$, W, S, Q, est donné par les expressions :

$$\begin{aligned} (\mathcal{L})_{dim} &= \frac{\sigma^4}{\eta}\mathcal{L}, \quad (W)_{dim} = \frac{\sigma}{\eta} W \\ (S)_{dim} &= \frac{1}{\eta c} S, \quad (Q)_{dim} = \frac{1}{\sqrt{\eta}} Q \end{aligned} \tag{2.3}$$

En variant le lagrangien (2.1) compte-tenu de la jauge de Lorentz des potentiels : $\partial\mu A\mu = 0$, on obtient les équations de champ sous la forme :

$$\hat{D}_\mu \hat{D}_\mu \varphi = \varphi - (\varphi^* \varphi)\, \varphi \tag{2.4}$$

$$\Box A_\mu = + \frac{i\Omega}{2} [\varphi^* (\hat{D}_\mu \varphi) - (\hat{D}^*_\mu \varphi^*)\, \varphi] \tag{2.5}$$

De l'équation (2.4) et son expression complexe conjuguée, nous tirons l'identité suivante :

$$(\hat{D}^*_\mu \varphi^*)\, (\hat{D}_\mu \varphi) + \varphi^* \varphi = (\varphi^* \varphi)^2 + \frac{1}{2} \Box (\varphi^* \varphi) \tag{2.6}$$

A l'aide de la formule (2.6), le tenseur métrique $T_{\mu\nu}$, correspondant à la fonction de Lagrange (2.1), a la forme :

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \{ & F_{\mu\rho} F_{\rho\nu} + \frac{\delta_{\mu\nu}}{4} F_{\lambda\rho} F_{\lambda\rho} - \frac{1}{2} [(\hat{D}^*_\mu \varphi^*)(\hat{D}_\nu \varphi) \\ & + (\hat{D}^*_\nu \varphi^*)(\hat{D}_\mu \varphi)] + \frac{\delta_{\mu\nu}}{2} [(\varphi^* \varphi)^2 + \frac{1}{2} \Box (\varphi^* \varphi)] \} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Considérons maintenant le cas stationnaire. Alors

$$\varphi(\vec{r}, t) = \varphi(r) e^{-i\omega t}, \quad \partial_4 A\mu = 0, \quad A\mu = (\vec{A}, i\Phi)$$

et les densités de toutes les caractéristiques dynamiques ne dépendent pas du temps. Dans le cas des solutions du type particule qui sont régulières au point zéro et qui décroissent assez rapidement vers l'infini, on peut montrer facilement la relation :

$$\int T_{ab}\, d^3x = 0 \qquad a, b = 1, 2, 3$$

Alors l'expression de l'énergie W de telles solutions prend la forme :

$$W = \int T_{44} d^3x = \int (T_{44} + T_{aa}) d^3x = \int T_{\mu\mu} d^3x$$

En employant l'identité (2.6), nous pouvons calculer la trace $T\mu\mu$ du tenseur (2.7) et nous obtenons définitivement l'expression de l'énergie des solutions du type particule

$$W = \int T_{\mu\mu}\, d^3x = \frac{1}{4\pi} \int (\varphi^* \varphi)\, d^3x \tag{2.8}$$

de laquelle résulte le caractère positif de l'énergie de toutes les solutions stationnaires du type particule.

En introduisant le potentiel électrique "*réduit*" $\chi = \Omega\Phi(\vec{r}) - \omega$ de l'équation (2.5), nous obtenons l'expression de la charge électrique Q dans le cas stationnaire

$$Q = - \frac{\Omega}{4\pi} \int \chi (\varphi^* \varphi)\, d^3x \tag{2.9}$$

Il faut ici remarquer que les équations de champ sont invariantes par rapport à la transformation de conjugaison de charge

$$A\mu \longrightarrow - A\mu, \quad \varphi \longleftrightarrow \varphi^{*}$$

dans laquelle la charge électrique change le signe tandis que l'énergie reste invariante.

III. Liaison entre le spin total et la charge électrique dans le cas axial symétrique

Nous obtiendrons d'abord la représentation du vecteur moment de quantité de mouvement $\vec{S}$ pour les solutions stationnaires du type particule. Ce vecteur, évidemment, doit être identique au spin de la particule au repos. Nous avons

$$S_a = \varepsilon_{abc}\int x_b p_c d^3x \qquad a,\ b,\ c = 1,\ 2,\ 3$$

où la densité de l'impulsion 3 - dimensionnelle est égale à :

$$p_c \equiv iT_{c4} \equiv p_c^{(1)} + p_c^{(2)} + p_c^{(3)},$$

$$p_c^{(1)} = \frac{i}{4\pi} F_{cd}F_{d4}, \quad p_c^{(2)} = \frac{\Omega}{4\pi} (\varphi^{*}\varphi)\ \chi\ A_c$$

$$p_c^{(2)} = - \frac{i}{8\pi}\ \chi\ [(\partial_c\varphi^{*})\ \varphi - \varphi^{*}(\partial_c\varphi)]$$

Pour calculer la première partie du vecteur spin

$$S_a^{(1)} = \varepsilon_{abc}\int x_b p_c^{(1)} d^3x = - \frac{1}{4\pi\Omega}\ \varepsilon_{abc}\int x_b\ (\partial_c A_d - \partial_d A_c)\ (\partial_d\chi) d^3x,$$

en intégrant par partie et utilisant l'équation de champ (2.5), on obtient :

$$S_a^{(1)} = - \frac{\Omega}{4\pi}\ \varepsilon_{abc}\int x_b\ (\varphi^{*}\varphi)\ \chi A_c d^3x$$

En tenant compte de ce que :

$$S_a^{(2)} = \varepsilon_{abc}\int x_b p_c^{(2)} d^3x = \frac{\Omega}{4\pi}\ \varepsilon_{abc}\int x_b\ (\varphi^{*}\varphi)\ \chi A_c d^3x$$
$$= - S_a^{(1)},$$

nous trouvons finalement l'expression suivante du vecteur spin :

$$S_a = S^{(3)} = \varepsilon_{abc}\int x_b p_c^{(3)} d^3x = - \frac{i}{8\pi}\ \varepsilon_{abc}\int x_b \chi [\ (\partial_c\varphi^{*})\ \varphi - \varphi^{*}(\partial_c\varphi)]\ d^3x \qquad (3.1)$$

Considérons maintenant le cas symétrique axial, quand les densités de toutes les caractéristiques dynamiques ne dépendent pas de l'angle azimutal Ψ. Avec cela la fonction $\varphi(\vec{r})$ a la forme générale :

$$\varphi\ (\vec{r}) = \varphi\ (r,\theta)\ e^{il_z\Psi}$$

et de la condition d'uniformité $\varphi(\Psi + 2\pi) = \varphi(\Psi)$, il s'ensuit $l_z = 0,\ \pm\ 1, \ldots.$

Dans ce cas, l'expression (3.1), pour la seule composante du spin différente de zéro S_3 , prend la forme :

$$S \equiv S_3 = -\frac{i}{8\pi}\int \chi\,[(\partial_\psi \varphi^*)\varphi - \varphi^*(\partial_\psi \varphi)]\,d^3x$$
$$= -\frac{l_z}{4\pi}\int \chi\,(\varphi^*\varphi)\,d^3x \qquad (3.2)$$

En comparant la représentation (3.2) avec l'expression (2.9), on obtient la relation générale entre les valeurs possibles du spin et la charge électrique des solutions stationnaires symétriques axiales :

$$S = \frac{l_z}{\Omega}\,Q \qquad l_z = 0, \pm 1, \ldots \qquad (3.3)$$

Notons qu'une relation analogue ($S = (l_z + \frac{1}{2})Q$) a été établie pour la première fois dans le modèle d'interaction entre les champs électromagnétique et spinoriel ([9]). Pour le modèle de Rosen, cette relation a été trouvée dans l'article ([10]).

A l'aide des expressions (2.2) et (2.3), la relation entre les valeurs *"dimensionnées"* du spin et de la charge électrique est donnée par l'expression :

$$(S)_{dim} = \frac{l_z}{\varepsilon c}(Q)_{dim} \qquad (3.4)$$

La valeur $l_z = 0$ correspond aux particules de spin zéro, mais les solutions, dans ce cas, n'ont pas obligatoirement la symétrie sphérique. Supposons que, dans ce cas, $l_z = 1$, on a $(Q)_{dim} = e$ (charge élémentaire) et $(S)_{dim} = \hbar$, alors nous trouvons automatiquement, de la formule (3.4) l'expression suivante :

$$\varepsilon = \frac{e}{\hbar c} \qquad (3.5)$$

qui coincide avec la théorie quantique. En rapport avec cela, souligons que cette relation est une conséquence directe de la formule (3.4) qui a été obtenue dans la limite d'une <u>théorie classique</u>. A l'aide de l'expression (3.5), <u>la relation (3.4)</u> a la forme :

$$(S)_{dim} = l_z \hbar \frac{(Q)_{dim}}{e}$$

et ainsi on établit un lien entre la quantification de la charge électrique et le spin de la particule ; dans notre modèle, des solutions correspondant à la charge élémentaire $(Q)_{dim} = e$ avec un spin entier quelconque (en unités $\hbar$) $(S)_{dim} = l_z\hbar$ sont possibles. C'est pourquoi, les relations du type (3.3) établies déjà pour divers modèles de champs spinoriel et scalaire avec une interaction électromagnétique minimale, peuvent jouer un rôle important dans une théorie future des particules élémentaires.

IV. <u>Symétrie sphérique. Calculs numériques</u>

Dans le cas stationnaire à symétrie sphérique, c'est-à-dire quand

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi(r)e^{-i\omega t}, \quad \vec{A} \equiv 0, \quad \chi = \Omega\Phi(r) - \omega$$

les équations du champ (2.4) et (2.5) deviennent :

$$\Delta\varphi = (1 - \chi^2 - \varphi^2)\varphi$$
$$\Delta\chi = \Omega^2\chi\,\varphi^2 \qquad (4.1)$$

où

$$\Delta \equiv \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}$$

On peut chercher les solutions régulières des équations (4.1), qui ont la forme asymptotique, pour $r \longrightarrow 0$:

$$\varphi = \alpha - \frac{\alpha^2 + \delta^2 - 1}{6} r^2 + \ldots\ldots, \quad \alpha = \varphi(0)$$

$$\chi = \delta + \Omega^2 \delta \alpha^2 r^2 + \ldots\ldots, \quad \delta = \chi(0)$$

et pour $r \longrightarrow \infty$

$$\chi \simeq - \omega + \frac{\Omega Q}{r} ,$$

$$\varphi \sim e^{-\sqrt{1 - \omega^2}\, r} , |\omega| \leqslant 1$$

(pour $|\omega| = 1 \quad \varphi \sim e^{-\sqrt{8\Omega |Q| r}}$).

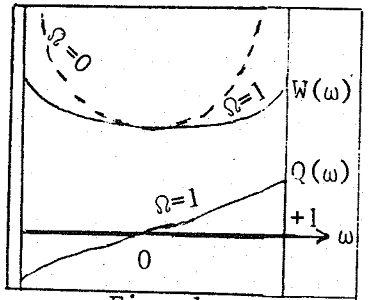

Fig. 1

Les calculs numériques sont effectués pour $\Omega = 1$. Pour chaque valeur de la grandeur ω dans l'intervalle admissible :

$$- 1 \leqslant \omega \leqslant + 1 \tag{4.2}$$

nous trouvons une solution "*fondamentale*" (sans noeud) correspondante avec des valeurs pour les amplitudes des fonctions α, δ et des caractéristiques dynamiques W et Q. La dépendance de l'énergie $W(\omega)$ et de la charge $Q(\omega)$ de cette famille de solutions par rapport aux valeurs de la grandeur ω, est représentée sur la fig. 1. La valeur $\omega = 0$ correspond à des solutions "*neutres*", pour lesquels $\chi \equiv 0$, $Q \equiv 0$, $W(0) \simeq 1.50$. L'énergie et la charge croissent simultanément avec $|\omega|$ de façon monotone et pour $|\omega| = 1$ atteignent les valeurs $W(1) \simeq 1.96$. $|Q(1)| \simeq 0.80$. Pour la comparaison, on a représenté, en pointillé sur la fig. 1, la dépendance de W (ω) pour $\Omega = 0$, qui est la suivante :

$$W(\omega) = \frac{W(0)}{\sqrt{1 - \omega^2}} \simeq \frac{1.50}{\sqrt{1 - \omega^2}} \quad (\Omega = 0) \tag{4.3}$$

Dans ce cas $\chi = - \omega = \text{const}$, $Q = 0$ et l'équation pour la fonction φ, grâce aux transformations

$$\varphi \longrightarrow \sqrt{1 - \omega^2}\varphi , \quad r \longrightarrow \frac{r}{\sqrt{1 - \omega^2}}$$

prend la forme :

$$\Delta\varphi = (1 - \varphi^2)\varphi$$

Les solutions de cette équation ont été étudiées dans l'article [6].

V. Conclusion

Pour une valeur fixée du paramètre fondamental "*non-positionné*" Ω le modèle proposé permet de décrire des particules neutres aussi bien que chargées avec une énergie positivement définie et une relation correcte entre le spin et la charge électrique. Le spectre des solutions du type particule, en général, a un caractère continu et dépend de la valeur de ω, qui est défini dans l'intervalle (4.2). Cependant, si nous prenons la "*solution limite*" [11] correspondant à la valeur $|\omega| = 1$ en qualité de solution physique, ce spectre devient discret. Avec celà particulièrement, le rapport des masses de la particule chargée et de la particule neutre est fixé et pour $\Omega = 1$, on a :

$$\frac{W(1)}{W(0)} \simeq 1.3 .$$

REFERENCES

(1) Friedberg R., Lee T.D., Sirlin A., Phys. Rev. D, 13, N° 10, p.2739 (1976)

(2) Grishin V.E., Katishev Yu.V., Majaldiani N.V., Majankov V.G., Shashka A.B., Prepint Obid. Inst. Yader. Isled. (Dubna) I P2-12359 (1979)

(3) Rosen N., Phys. Rev., 75, p.1079 (1939)

(4) Menius A.C., Rosen N., Phys. Rev., 62, p.436 (1949)

(5) Finkelstein R.J., Le Levier R., Ruderman M., Phys. Rev., 83, p.326 (1951)

(6) Glasko V.B., Leruste F., Terletsky Ya.P., Shushurin S.F., Zh.eksper.teor. Fiz., 35, p.452 (1958)

(7) Petiau G., C.r.Ac.Sc., 244, p.1890 (1957) ; Nuovo Cim., 10 , 9 suppl., p.452 (1958)

(8) Higgs P.W., Phys. Lett., 12, p.132 (1964) ; 13, p.508 (1964) ; Phys. Rev., 145, p.1156 (1966)

(9) Kassandrov V.V., Terletsky Ya.P., Probl.kvant. i stat. Fiz., Univ. druzh.nar., p.39 (1977)

(10) Edjò F., Kassandrov V.V., Probl.kvant. i stat. Fiz., Univ.druzh.nar., p.147 (1980) (en rédaction)

(11) Kassandrov V.V., Sovrem.zad. v tochn.nauk., Univ. druzh.nar., p.105 (1976)