

Annales de la Fondation Louis de Broglie

Vol. 6, n° 2, 1981

LA MESURE INDIRECTE ET LA MESURE DOUBLE

EN MÉCANIQUE QUANTIQUE*

par Francis FER

Ecole des Mines de Paris

60, Bld St-Michel

75006 PARIS

Résumé : En se maintenant strictement dans le cadre positiviste, probabiliste et hilbertien de la Mécanique quantique, l'auteur se livre à un examen critique de la théorie usuelle de la mesure indirecte et de la mesure double. Il montre que cette théorie ne peut pas découler logiquement de l'axiomatique classique,

*Travail exposé devant le séminaire de la Fondation Louis de Broglie le 19 Mars 1979

notamment de l'axiome de la réduction d'état. Il propose donc une version modifiée (déjà usitée par ailleurs dans la littérature) de cet axiome, qui permet une théorie correcte des mesures indirecte et double. Il en résulte en particulier : a) qu'une mesure portant sur un sous-système n'altère ni la représentation mathématique du système complémentaire ni ses distributions de probabilité originelles ; b) que la mesure n'apporte pas autre chose qu'une information permettant de rectifier les probabilités de mesures ultérieures d'après les règles classiques du calcul des probabilités.

TABLE DES MATIERES

- 1.- Enoncé du problème
- 2.- Les axiomes classiques de la mesure et leurs conséquences (rappel des énoncés, modalités de description effective d'un système quantique)
- 3.- Notations et définitions (rappel de formules tensorielles, opérateurs à spectre continu et leur discrétisation, définition des mesures "asservie", indirecte et couplée)
- 4.- La théorie de la mesure indirecte d'après Von Neumann (ses résultats, leur critique, et critique de la notion de simultanéité des mesures)
- 5.- Modification de l'axiome de la réduction d'état
- 6.- Théorie de la mesure asservie et de la mesure indirecte (condition d'asservissement, exemples : Compton-Simon, spin total nul, interprétation)
- 7.- Mesures couplées (mesures immédiatement consécutives, décalées dans le temps)
- 8.- Retour sur les spectres continus
- 9.- Déduction de l'axiome des probabilités de mesures simultanées
- 10.- Raccord avec la théorie classique des probabilités
- 11.- Deux remarques sur le caractère informationnel de la mesure.

§1

1.- ENONCE DU PROBLEME

Considérons un système physique C dans lequel on sait distinguer deux composants C_1 et C_2 dont C est la réunion (jusqu'à nouvel ordre il n'est pas besoin de préciser si C_1 et C_2 sont ou non en interaction). Nous désignerons par un symbole tel que a_1 une grandeur physique "attachée" au sous-système C_1 , c'est-à-dire sans rapport aucun avec C_2 , et de même par un symbole tel que a_2 une grandeur physique attachée à C_2 , c'est-à-dire sans rapport avec C_1 . Naturellement les grandeurs a_1 et a_2 peuvent être également considérées comme attachées au système global C.

Nous reprendrons le terme de *mesure indirecte* (dite parfois aussi "de deuxième espèce") pour qualifier le type de mesure suivant : voulant connaître une grandeur a_2 attachée à C_2 , on effectue sur C_1 la mesure d'une grandeur a_1 convenablement choisie (si elle existe) et on déduit par inférence logique -donc en vertu d'un certain formalisme théorique- la valeur cherchée de a_2 de celle observée de a_1 . La justification de ce type de mesure ne peut évidemment reposer que sur la théorie de la mesure que j'appellerai *double*, c'est-à-dire de la mesure effective, soit simultanée, soit consécutive (ces deux termes restant à préciser), des deux grandeurs a_1 et a_2 .

Si en Mécanique classique la mesure indirecte (et même la mesure en général) ne pose pas de problème, il n'en va pas de même en Mécanique quantique. Celle-ci vit en effet, depuis près d'un demi-siècle, sur une théorie de la mesure indirecte issue d'un théorème de Von Neumann (le théorème de la décomposition diagonale d'une fonction d'onde) et sur les conclusions qu'il en a tirées -ou qu'on en a tirées : la recherche de paternité est très difficile en cette affaire, et au fond elle importe peu aujourd'hui. Ce qui importe, c'est que

§1

ces conclusions, mettons de Von Neumann, sont totalement illégitimes par rapport à son axiomatique de départ, qui n'est autre que l'axiomatique usuelle de la Mécanique quantique ; c'est un premier point que je démontrerai plus loin (§4 B). D'autre part elles sont en fait inapplicables à la mesure indirecte ; l'objectif visé par Von Neumann n'était pas celle-ci, mais la démonstration qu'on peut "riper" à volonté la frontière entre système observé et appareil de mesure, et les opérateurs -assez artificiels au demeurant- qu'il a forgés à cet effet sont sans rapport aucun avec ceux qui se présentent dans une mesure réelle, comme on le verra (§4 B).

Le problème reste donc posé d'une théorie correcte de la mesure indirecte et, corrélativement, de la mesure double.

Commençons par préciser avec soin les termes de la question à traiter.

A un instant t_0 on attribue au système global C, sur la base d'informations antérieures, une certaine représentation mathématique, censée renfermer toutes les prévisions probabilistes possibles à cet instant.

Toujours au même instant on effectue sur le sous-système C_1 la mesure d'une grandeur a_1 qui lui est attachée. En vertu des axiomes de la Mécanique quantique, cette mesure "modifie quelque chose" aux propriétés de C (et par suite de C_1 et de C_2), mais quoi exactement ?

La formulation précise que j'adopte est celle-ci : *en quoi la mesure faite sur C_1 modifie-t-elle les prévisions probabilistes que nous pouvons porter, postérieurement à t_0 , sur C_2 et sur C ?* (nous pourrions naturellement nous poser la même question pour C_1 seul, mais ici la réponse est quasi-immédiate, alors que celle qui est relative à C_2 et à C ne l'est pas).

§1

C'est ce que j'appellerai la question primordiale. Mais il est clair qu'on ne peut y répondre que si on sait résoudre ce problème dérivé : *en quoi la mesure faite sur C_1 modifie-t-elle la représentation mathématique du sous-système C_2 et celle de C ?*

C'est de propos délibéré que j'ai placé les deux questions dans cet ordre. La première est en effet la seule que nous ayons à nous poser du point de vue de la physique positiviste. Une question du genre : en quoi la mesure faite sur C_1 modifie-t-elle "le système C_2 lui-même" ? n'a pour la Mécanique quantique aucun sens, et il convient d'ajouter tout de suite qu'elle n'en aurait pas davantage en physique macroscopique. Dans quelque domaine que ce soit, *la théorie physique ne peut être qu'une chaîne mathématique permettant, à partir de mesures faites, de prédire le résultat de mesures ultérieures*. Cette prise de position ne date pas de la Mécanique quantique : on en trouvera par exemple une expression parfaitement affirmée dans Duhem ⁽¹⁾, 1906. Il lui est certes fréquemment arrivé de se mettre en infraction avec son pragmatisme de principe en prétendant limiter les concepts physiques de demain à ceux qui sont strictement nécessaires pour formaliser les mesures d'aujourd'hui. Mais on n'est pas obligé de la suivre dans cette voie et, à partir du moment où elle ne vise qu'à *donner aux mots un contenu opérationnel et à contrôler la validité logique des résultats obtenus*, elle est de saine méthode scientifique et c'est pourquoi je m'y tiendrai. C'est assez pour dire que je ne m'occuperai en aucune façon d'ébranler ou de renforcer les paradoxes qui sont en rapport manifeste avec le problème posé : ils sont hors de mon sujet.

Quant à la deuxième question elle n'est, je l'ai dit, que le moyen obligé de la première. Il faut simplement ajouter qu'on ne doit admettre, pour les repré-

§2

sentations mathématiques cherchées, que celles qui ont un objectif probabiliste : c'est bien dans ce cadre qu'affirme vouloir se cantonner la Mécanique quantique.

Il en résulte, comme conséquence "technique", que le formalisme ne doit manipuler que des fonctions de carré sommable -les seules qui permettent de définir une probabilité- en leur adjoignant, le cas échéant, les variables de spin qui n'altèrent pas cette propriété. Nous resterons donc constamment dans des *espaces de Hilbert séparables* ; en particulier, et c'est très important, *les notions de valeurs propres et de vecteurs propres ne devront être comprises que dans l'acception que leur donne la théorie des dits espaces*.

2.- LES AXIOMES CLASSIQUES DE LA MESURE ET LEURS CONSÉQUENCES

Je dois rappeler brièvement ces axiomes, d'une part pour pouvoir me référer à leurs écritures, mais d'autre part et surtout parce que je veux en souligner certaines conséquences qui sont (presque ?) toujours passées sous silence, mais qui sont néanmoins d'une importance primordiale quand on se préoccupe d'appliquer le formalisme à une mesure *réelle* et non à une mesure "mentale". Je reprends les énoncés originels de Von Neumann ⁽²⁾^{*} ;

^{*}Le Von Neumann restant encore la base mathématique de la Mécanique quantique, en particulier dans le domaine qui nous occupe ici, j'aurai fréquemment à m'y référer, et avec la précision de la page ; j'emploierai pour cela l'abréviation V.N. suivie des lettres D (pour l'édition allemande de 1932) et A (pour l'édition américaine de 1955) et des numéros de page.

§2A

ce sont ceux qui sont encore en général enseignés aujourd'hui, bien qu'il faille noter dans la littérature, une tendance à modifier le second axiome, point fondamental sur lequel j'aurai à revenir.

A.- Enoncé des axiomes

Nous considérons un système physique C (sans nous préoccuper pour l'instant de sa décomposition éventuelle en sous-systèmes) descriptible dans un espace de Hilbert \mathcal{H} . Soient a et b deux grandeurs physiques attachées à C, A et B les opérateurs correspondants (bornés ou non) et

$$(1) \quad A = \int \lambda d E_\lambda, \quad B = \int \mu d F_\mu$$

leurs décompositions spectrales (les résolutions de l'identité $E(\lambda)$ et $F(\mu)$ sont supposées continues à droite). Nous abrègerons comme d'habitude $E(\lambda'') - E(\lambda')$ ($\lambda' < \lambda''$) en $E_{\lambda'}^{\lambda''}$, et, en un point de discontinuité, le saut

$E(\lambda) - E(\lambda - 0)$ par $\{E(\lambda)\}$. Ces notations posées, énonçons les deux axiomes de la mesure.

Axiome P (P pour probabilité ; V.N., D.104, A.200)

Nous supposons que, juste avant la mesure, C est représentée par un vecteur d'état ψ , normé bien entendu.

α.- Si on ne mesure qu'une seule grandeur, a par exemple, la probabilité pour que cette mesure fournisse un résultat appartenant à l'intervalle fermé (λ', λ'') est

$(E_{\lambda'}^{\lambda''}, \psi, \psi) = \|E_{\lambda'}^{\lambda''} \psi\|^2$. En particulier si A admet une valeur propre λ , la probabilité pour que la mesure de A fournisse cette valeur exacte est $(\{E_\lambda\}, \psi, \psi) = \|\{E_\lambda\} \psi\|^2$. Si on veut la probabilité de l'intervalle semi-ouvert

§2A

(λ', λ'') , il faut former $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda''} (E_\lambda^\lambda, \psi, \psi) = (E_\lambda^{\lambda''-0}, \psi, \psi)$.

β.- Sous la condition expresse que A et B sont commutatifs, la probabilité pour qu'une mesure simultanée* de a et de b donne des résultats appartenant respectivement aux intervalles (λ', λ'') et (μ', μ'') est $(E_\lambda^{\lambda''}, F_\mu^{\mu''}, \psi, \psi) = \|E_\lambda^{\lambda''} F_\mu^{\mu''} \psi\|^2$ (je rappelle que, A et B étant commutatifs, il en est de même des projecteurs). On particularise comme ci-dessus au cas d'intervalles semi-ouverts et de valeurs propres.

Axiome R (R pour réduction d'état ; V.N., D.112, 117, 177, A. 215, 224, 335)

α.- Si la mesure de l'opérateur A seul donne un résultat appartenant à l'intervalle (λ', λ'') , le vecteur d'état après la mesure, que nous désignerons par ψ' , est astreint à vérifier la relation

$$(2) \quad E_\lambda^{\lambda''} \psi' = \psi'$$

c'est-à-dire à appartenir à la variété fermée dans laquelle projette $E_\lambda^{\lambda''}$, que nous notons comme d'habitude $E_\lambda^{\lambda''} \mathcal{H}$. En particulier si la mesure a fourni une valeur propre λ de A, ψ' est astreint à vérifier

$$(2 \text{ bis}) \quad \{E(\lambda)\} \psi' = \psi'$$

* ce qui ne peut signifier que : rigoureusement simultanée. La notion de simultanéité paraissait sans doute évidente à Von Neumann, car il ne la définit même pas. Il faut cependant s'interroger sur le sens opérationnel de la notion de simultanéité rigoureuse, ce que je ferai plus loin (§4C).

§2B

c'est-à-dire à se trouver dans la variété propre $\{E_\lambda\} \mathcal{H}$ de A.

Les écritures (2) et (2bis) autorisent à normaliser ψ' , ce qu'on fait.

β .- Si, les opérateurs A et B étant toujours supposés *commutatifs*, on mesure *simultanément* les grandeurs a et b, et que ces mesures donnent des résultats appartenant respectivement à $\{\lambda', \lambda''\}$ et $\{\mu', \mu''\}$, le vecteur d'état après la mesure ψ' est astreint à vérifier

$$(3) \quad E_{\lambda'}^{\lambda''} F_{\mu'}^{\mu''} \psi' = \psi'$$

à quoi s'ajoute la condition de normalisation. On a une particularisation analogue à (2bis) dans le cas de valeurs propres, et on traite comme en α le cas d'intervalles semi-ouverts.

Je rappelle enfin que, si on tient compte de l'axiome P, l'axiome R est équivalent (cf Von Neumann, référence précédente) à l'assertion suivante : si on a mesuré une grandeur, trouvé un certain résultat, et qu'on recommence *immédiatement après* la même mesure, on doit retrouver le même résultat *en toute certitude*.

B.- Les modalités de description effective d'un système quantique

La Mécanique quantique dispose dans ses principes qu'un système physique est, selon les cas (qu'il n'est pas nécessaire de détailler ici) susceptible de deux représentations mathématiques distinctes :

- soit par un vecteur d'état ψ , élément d'un espace de Hilbert convenable ;
- soit par un mélange, c'est-à-dire par un ensemble au

§2B

plus dénombrable de vecteurs d'état ψ_n affectés de poids P_n .

En cela la Mécanique quantique ne fait que reprendre une règle universelle de la physique théorique, qui consiste à faire correspondre, à un être physique qu'on suppose bien défini comme tel, un être mathématique lui-même parfaitement défini. Cet axiome n'est pas autre chose qu'une affirmation d'existence, sans laquelle il serait impossible de raisonner.

Mais il ne suffit pas de savoir qu'une telle représentation existe : il est indispensable, en vue des prévisions ultérieures, d'accéder à sa détermination. C'est le second axiome de la mesure qui, comme on sait, joue ce rôle, en prenant appui sur l'observation du résultat d'une mesure dite préparatoire.

Il est tacitement et universellement admis que cette étape ne soulève pas de difficulté. Le raisonnement traditionnel, qui semble bien remonter à Von Neumann, consiste à "se donner", pour l'appareil de mesure préparatoire, un opérateur à *spectre ponctuel simple* (pouvant à la rigueur présenter des dégénérescences finies, ce qui ne pose pas de gros problèmes). Constatant alors la survenue d'une valeur propre de cet opérateur, on en déduit, en vertu de l'axiome R, α , "l'état propre dans lequel se trouve" le système, c'est-à-dire le vecteur d'état qu'on doit lui attribuer.

Malheureusement cette conclusion éminemment simple a l'inconvénient de rester confinée dans les limbes du formalisme, et de ne pouvoir sur aucun point se raccorder à l'expérimentation. Il y a à cela deux raisons, qui peuvent d'ailleurs se cumuler, et dont la seconde est directement reliée au sujet qui nous occupe.

α.- La première est que les seules mesures qu'on sache effectivement réaliser sont, soit des mesures de position (cf (3)), soit des mesures d'impulsion (plus exactement de directions d'impulsion : cas d'un collimateur dans une mesure préparatoire, trace dans une chambre à bulles ; on peut d'ailleurs discuter sur l'espèce à laquelle ces mesures appartiennent). De toutes façons les deux opérateurs correspondants ont un spectre purement continu, c'est-à-dire ne possédant aucune valeur propre au sens hilbertien du terme (V.N., D. 64, A. 123). Les résultats de telles mesures ne peuvent donc pas fournir de valeur exacte, mais seulement se situer dans un intervalle de la forme (λ', λ'') ; la longueur de cet intervalle dépend de la précision de l'instrument utilisé, mais est toujours différente de zéro. Le projecteur correspondant $E_{\lambda}^{\lambda''}$ est alors forcément de dimension infinie (c'est une propriété bien connue des spectres continus) ; par conséquent, lorsqu'on applique l'axiome R, α pour déterminer le vecteur d'état après la mesure, tout ce qu'on en sait est qu'il appartient à une variété fermée $E_{\lambda}^{\lambda''}, \mathcal{H}$ de dimension infinie.

Il ne sert absolument à rien, pour obvier à ce fait, de chercher à recourir à l'axiome R, β et d'invoquer à cette fin des "ensembles d'observables compatibles". En admettant que la mesure de tels ensembles puisse être expérimentalement mise en oeuvre (en dehors de cas triviaux comme la mesure simultanée de x, y, z , ce qui est évidemment faisable mais ne change rien au raisonnement qui suit) un argument théorique leur ôte toute utilité : si en effet des observables a, b, c , etc. sont compatibles, c'est que leurs opérateurs A, B, C , etc. commutent ; on sait alors (V.N., D. 90, A. 173 ; voir aussi (4), chap. IX) qu'ils sont des fonctions d'un même opérateur X , donc qu'ils sont construits sur la même résolution de l'identité ; si par suite A, B, C , etc. ont des spectres

continus, il est exclu que celui de X soit ponctuel (parce que les points de discontinuité de sa résolution de l'identité se retrouveraient dans celles de A, B, C , etc.). Il est donc inutile d'espérer, par une "intersection", en quelque sorte, de mesures et d'opérateurs, déterminer le vecteur d'état par un opérateur à spectre ponctuel simple : il a toujours pour lieu après la ou les mesures une variété infinie.

On objectera peut-être à ces considérations le cas de l'opérateur hamiltonien, qui est susceptible dans de nombreuses circonstances d'avoir un spectre ponctuel simple ou à dégénérescences finies, et celui de l'opérateur de spin, pour lequel il en est toujours ainsi. Mais l'hamiltonien n'est pas un opérateur de mesure : une énergie ne se mesure pas, elle se calcule, et il est clair que la réduction d'état ne peut pas attendre le résultat d'un calcul. Quant à l'opérateur de spin, il ne se mesure pas à l'état pur, mais toujours en couplage (de façon plus précise en produit tensoriel) avec un opérateur de position, de sorte que celui-ci imprime la marque de son spectre continu.

β.- Je reprends ici une analyse déjà faite par D. Fargue (5) ; mais il n'est pas inutile d'y insister.

Une seconde raison d'indétermination pour le vecteur d'état après la mesure se présente quand la grandeur mesurée n'est attachée qu'à un sous-système C_1 du système "of interest" C -ce qui est précisément le cas des mesures double et indirecte. L'opérateur de mesure, appelons-le A_1 , est alors incomplet, et il en résulte que, même s'il est à spectre ponctuel simple dans son propre espace de Hilbert, le vecteur d'état du système global C après la mesure est laissée indéterminé dans une variété infinie. Il est immédiat de s'en convaincre quand on a affaire à des espaces L^2 . Symbolisons en effet par q_1 et q_2 les deux groupes de coordonnées

§2B

décrivant respectivement C_1 et C_2 ; l'opérateur A_1 n'agit que par l'intermédiaire du groupe q_1 . Soit λ_1 une de ses valeurs propres et $\phi_1(q_1)$ la fonction propre correspondante dans l'espace $L^2(q_1)$. Dans l'espace $L^2(q_1, q_2)$ descriptif de C , toute fonction de la forme $\phi_1(q_1)f_2(q_2)$, où $f_2(q_2)$ est une fonction *quelconque* de $L^2(q_2)$, est fonction propre de A_1 pour la valeur propre λ_1 , c'est-à-dire est une fonction d'onde admissible pour le système global C après la mesure. Ici encore, par conséquent, cette fonction est indéterminée dans une variété infinie. Et il est évidemment impossible de se désintéresser de C : il n'y aurait plus lieu de parler de mesure double ni indirecte.

Le résultat est a fortiori valable si A_1 est à spectre continu.

Cette propriété d'indétermination s'étend à des espaces de Hilbert plus généraux, notamment à ceux qui décrivent des systèmes à spin. On le verra en détail au paragraphe 3A ci-après.

Pour résumer toute cette discussion, on voit donc que, *compte tenu des possibilités expérimentales et de l'espèce extrêmement restreinte des mesures qu'elles autorisent, l'application de l'axiome R de la réduction d'état ne nous apporte jamais que cette information limitée : le vecteur d'état est indéterminé - inconnu si on préfère - dans une variété fermée de dimension infinie qui, elle, est parfaitement déterminée.*

Von Neumann a très bien vu le problème (D. 114, A. 228), mais il en a éludé les conséquences. Il s'est en effet borné à traiter le cas d'un opérateur à spectre ponctuel multiple, mais à dégénérescences finies (V.N., D. 174, A. 330). Il est alors possible de lever l'indétermination, à condition de probabiliser la variété

§2B

té (ce qui a une application directe en Mécanique statistique, pour un système d'énergie fixée). Mais cette opération, qui introduit évidemment un axiome supplémentaire, n'est en outre possible que pour une variété de dimension finie ; elle reste donc une vue de l'esprit dans tous les cas où il s'agit de mesures réelles. Quant à probabiliser une variété de dimension infinie, il n'y faut pas songer : c'est impossible, on le sait. Il faut donc bon gré mal gré se résigner à l'indétermination.

Cet état de choses ne remet nullement en question l'axiome premier de la Mécanique quantique, à savoir la représentation mathématique d'un système par un vecteur d'état (ou, mutatis mutandis, par un mélange) : il n'y a aucune incompatibilité entre d'une part la manipulation théorique d'êtres mathématiques bien définis et d'autre part l'impossibilité d'accéder expérimentalement à la connaissance de leur valeur exacte. La Mécanique quantique en est ici strictement au même point, et pour le même motif, que la Mécanique classique, qui raisonne bien sur les coordonnées d'un point matériel tout en sachant pertinemment que leur mesure exacte est impossible ; dans les deux cas c'est l'erreur inhérente à la mesure qui est la cause de l'imprécision de notre *information*. Mais le flou de celle-ci ne doit pas nous empêcher de raisonner sur une *représentation mathématique univoque* : sinon aucune science ne serait possible.

Il reste qu'il faut se préoccuper, tout comme en Mécanique classique, de la répercussion qu'entraîne l'indétermination du vecteur d'état ψ_0 après la préparation du système, c'est-à-dire son incertitude^x ini-

^x ce mot au sens de la théorie des erreurs et non pas, bien entendu, au sens de Heisenberg.

tiale, sur l'erreur qui affecté une mesure déterminative ultérieure. En Mécanique quantique le problème s'énoncera ainsi : sachant que le vecteur d'état initial ψ_0 peut être n'importe où dans une variété connue, que sont, après évolution du système, puis interposition d'un appareil de mesure, les probabilités d'observer telle ou telle valeur de la grandeur mesurée ? Il est clair qu'en général ces probabilités différeront suivant la place de ψ_0 dans sa variété d'origine, et il serait donc nécessaire d'en savoir un peu plus.

On peut se poser ce problème sur un plan général, je veux dire pour une mesure quelconque pratiquée sur un système considéré globalement. Je n'entrerai pas dans son étude, pour ne pas sortir de mon sujet. J'avance toutefois -prudemment, sur la base d'un examen sommaire- que l'effet de l'incertitude initiale ne diffère pas essentiellement de ce qu'il est en Mécanique classique.

Par contre, sur le plan plus particulier des systèmes composites que nous allons traiter, nous aurons à prendre garde à cet effet sur les propriétés des mesures double et indirecte. On verra (§6B) qu'il n'entraîne, sur les exemples examinés, aucune altération des conclusions principales.

3.- NOTATIONS ET DEFINITIONS

Revenons maintenant à notre système composite $C = C_1 \cup C_2$. J'affecterai constamment par la suite de l'indice 1 les êtres se rapportant au sous-système C_1 , de l'indice 2 ceux qui se rapportent à C_2 , les êtres relatifs à C étant dépourvus d'indice ; en particulier je symboliserai comme ci-dessus par q_1 les coordonnées (configuration et spin) qui définissent C_1 , par q_2 celles qui définissent C_2 .

A.- Rappel de formules tensorielles

Il est pratiquement impossible, à moins de se perdre dans des écritures extrinsèques très compliquées, de traiter mathématiquement les systèmes composites avec le degré de généralité qui s'impose, sans recourir au formalisme tensoriel. Comme celui-ci n'est pas d'un usage universel en Mécanique quantique, j'en rappelle brièvement les éléments et surtout je note les formules dont j'aurai besoin ultérieurement.

Plaçons-nous d'abord dans le cas où C , C_1 , C_2 se composent de particules sans spin et sont par conséquent descriptibles par de simples fonctions d'onde de carré sommable. C_1 est descriptible par l'ensemble des fonctions de la forme $f_1(q_1) \in L^2(q_1)$, dont nous désignerons par \mathcal{H}_1 l'espace de Hilbert ; de même C_2 est descriptible par l'ensemble des fonctions $f_2(q_2) \in L^2(q_2)$, d'espace de Hilbert \mathcal{H}_2 . Le système global C est descriptible par les fonctions $f(q_1, q_2) \in L^2(q_1, q_2)$ formant un espace de Hilbert \mathcal{H} .

On sait (voir par exemple ⁽⁶⁾) que, si on se donne une base quelconque $\phi_{1j}(q_1)$ ($j = 1$ à $+\infty$) de \mathcal{H}_1 et une base quelconque $\phi_{2k}(q_2)$ de \mathcal{H}_2 , l'ensemble des fonctions à deux indices indépendants $\phi_{1j}(q_1) \phi_{2k}(q_2)$ constitue une base de \mathcal{H} ; une fonction quelconque de \mathcal{H} est donc de la forme $f(q_1, q_2) = \sum_{jk} c^{jk} \phi_{1j}(q_1) \phi_{2k}(q_2)$, avec $\sum_{jk} |c^{jk}|^2 < +\infty$.

Si on devait rester constamment dans des espaces L^2 cette notation suffirait. Pour pouvoir composer des espaces de Hilbert plus généraux (particules à spin), il faut remplacer la multiplication ordinaire des fonc-

tions représentatives des basés par la multiplication tensorielle des vecteurs de base -en notation abstraite $\phi_{1j} \otimes \phi_{2k}$. Un élément f de $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \otimes \mathcal{K}_2$ est alors par définition de la forme $f = \sum_{jk} C^{jk} \phi_{1j} \otimes \phi_{2k}$ (avec une

loi de covariance bien définie dans les changements de base). Si on prend $C^{jk} = C_1^j C_2^k$ on obtient les éléments de \mathcal{K} de la forme $\sum_j C_1^j \phi_{1j} \otimes \sum_k C_2^k \phi_{2k} = f_1 \otimes f_2$, qui ne forment qu'un sous-espace strict de \mathcal{K} . Pour un exposé plus complet et une formulation intrinsèque, on pourra consulter (7).

Soient maintenant deux opérateurs A_1 et A_2 , définis et à valeurs respectivement dans \mathcal{K}_1 et \mathcal{K}_2 ; nous les supposons d'abord *bornés*. Le produit tensoriel $A_1 \otimes A_2$, défini et à valeurs dans \mathcal{K} , s'obtient par définition comme suit : si $f = \sum_{jk} C^{jk} \phi_{1j} \otimes \phi_{2k}$ est un élément de \mathcal{K} on prend

$$(4) \quad A_1 \otimes A_2 f = \sum_{jk} C^{jk} A_1 \phi_{1j} \otimes A_2 \phi_{2k}$$

le deuxième membre étant, on le montre, indépendant des bases choisies.

Désignons par I_1, I_2, I les opérateurs identité dans $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ et \mathcal{K} respectivement ; on a évidemment $I = I_1 \otimes I_2$. On appellera *extensions* A_1 et A_2 de A_1 et A_2 à \mathcal{K} les opérateurs

$$(5) \quad \tilde{A}_1 = A_1 \otimes I_2, \quad \tilde{A}_2 = I_1 \otimes A_2.$$

On vérifie aisément que \tilde{A}_1 et \tilde{A}_2 commutent quels que

soient \tilde{A}_1 et \tilde{A}_2 . Dans des espaces L^2 l'extension \tilde{A}_1 de A_1 revient tout simplement à appliquer la règle habituelle qui consiste à faire agir A_1 sur les coordonnées du groupe q_1 , les coordonnées q_2 étant alors traitées comme des paramètres.

Ces règles s'appliquent en particulier aux opérateurs de projection. On notera les deux formules suivantes. Si P_1 et Q_1 sont deux projecteurs quelconques de \mathcal{K}_1 , P_2 et Q_2 deux projecteurs quelconques de \mathcal{K}_2 , on a

$$(6) \quad (P_1 \otimes P_2) \cdot (Q_1 \otimes Q_2) = P_1 Q_1 \otimes P_2 Q_2$$

on déduit immédiatement de cette égalité et de (5)

$$(7) \quad \tilde{P}_1 \cdot \tilde{P}_2 = P_1 \otimes P_2$$

Le produit tensoriel $P_1 \otimes P_2$ a une interprétation géométrique immédiate : Si on prend une base de la variété $P_1 \mathcal{K}_1$ de \mathcal{K}_1 , une base de la variété $P_2 \mathcal{K}$ de \mathcal{K}_2 , et qu'on compose ces deux bases par produit tensoriel (comme on a composé une base de \mathcal{K} à partir de celles de \mathcal{K}_1 et \mathcal{K}_2), on obtient un système orthonormé de vecteurs de \mathcal{K} qui est une base de la variété $(P_1 \otimes P_2)\mathcal{K}$.

Venons-en à la décomposition spectrale. On démontre d'abord que, si $E_1(\lambda)$ et $E_2(\mu)$ sont deux résolutions de l'identité quelconques de \mathcal{K}_1 et \mathcal{K}_2 , les familles de projecteurs de \mathcal{K}

$$(8) \quad \tilde{E}_1(\lambda) = E_1(\lambda) \otimes I_2, \quad \tilde{E}_2(\mu) = I_1 \otimes E_2(\mu)$$

sont deux résolutions de l'identité dans \mathcal{K} . $\tilde{E}_1(\lambda)$ et $\tilde{E}_2(\mu)$ commutent quels que soient λ et μ .

Soient alors deux opérateurs auto-adjoints et bornés de \mathcal{K}_1 et \mathcal{K}_2 , de décompositions spectrales

$$(9) \quad A_1 = \int \lambda dE_{1\lambda}, \quad A_2 = \int \mu dE_{2\mu}$$

On montre que les extensions A_1 et A_2 ont pour décompositions spectrales

$$(9bis) \quad \tilde{A}_1 = \int \lambda d\tilde{E}_{1\lambda}, \quad \tilde{A}_2 = \int \mu dE_{2\mu}$$

Lorsque les opérateurs A_1 ou A_2 ne sont pas bornés, la définition de leurs extensions A_1 ou A_2 par les équations (4) et (5) n'est plus valable ; on définit alors ces extensions précisément par leurs décompositions spectrales (9bis).

Nous allons maintenant retrouver, dans ce formalisme général, le caractère infini des variétés propres (quand il en existe) des extensions A_1 et A_2 que nous avons démontré plus haut (§2B,β) sur les espaces L^2 . Reportons-nous en effet à (8). On y voit tout d'abord que, lorsque λ est une valeur propre de A_1 , c'est-à-dire un point de discontinuité de $E_1(\lambda)$, c'est aussi un point de discontinuité de $\tilde{E}_1(\lambda)$, donc une valeur propre de \tilde{A}_1 , et inversement. Mais on y voit également que la variété propre correspondante de A_1 est sous-tendue par l'ensemble des vecteurs $u_{1\alpha}(q_1) \otimes \phi_{2k}(q_2)$ ($\alpha=1$ à n ou $+\infty$, $k=1$ à $+\infty$) où les $u_{1\alpha}$ sont une base de $\{E_1(\lambda)\mathcal{H}_1\}$ et les ϕ_{2k} une base de \mathcal{H}_2 : la variété $\{\tilde{E}_1(\lambda)\mathcal{H}\}$ est donc toujours de dimension infinie, quand bien même λ serait une valeur propre simple de A_1 ; a fortiori si la dégénérescence de λ est infinie.

Cette circonstance se présente en particulier pour les opérateurs de spin. On a l'habitude, pour expliquer la mesure de spin, de raisonner sur l'opérateur de spin "pur" σ (σ pour σ_x , σ_y ou σ_z), c'est-à-dire défini dans

le seul espace des variables de spin. Mais, dans les conditions expérimentales réelles, la mesure du spin passe par une mesure de position (ou d'impulsion si on se réfère seulement aux angles solides des faisceaux émergents), de sorte que, si on veut appliquer *correctement* l'axiome P de prévision des probabilités, on *doit* faire intervenir les opérateurs $\sigma \otimes q$ (q : opérateur de position) ou $\sigma \otimes p$ (p : opérateur d'impulsion). D'après la discussion du paragraphe 2B,α, ces opérateurs q et p introduisent des projecteurs de dimension infinie, de sorte que les variétés propres de l'opérateur de spin "réel", $\sigma \otimes q$ ou $\sigma \otimes p$, sont également de dimension infinie bien que celles de σ seul soient de multiplicité finie.

B.- "Discrétisation" des opérateurs à spectre continu

D'après ce paragraphe 2B,α que je viens de rappeler, les opérateurs de mesures réelles sont à spectre continu. Mais, pour des raisons que j'indiquerai au paragraphe 8, il est impossible de les utiliser tels quels dans la théorie de la mesure que je vais appeler "asservie" (§ C ci-dessous) ; par ailleurs leur mesure expérimentale est toujours entachée d'une erreur qu'il est impossible d'éliminer du formalisme*. Il est donc à la fois nécessaire et licite de passer par le procédé suivant, dû à Von Neumann (D.115, A.220).

*Ce serait au contraire possible pour des opérateurs à spectre ponctuel, pour lesquels on connaît à l'avance les résultats de mesure possibles : ce sont les valeurs propres, théoriquement connues, de ces opérateurs ; il suffirait alors de prendre pour résultat de la mesure la valeur propre la plus proche de la valeur expérimentalement obtenue (V.N., D.116, A.222), ce qui débarrasse la théorie des erreurs de mesure.

§3B

Soit de manière générale

$$A = \int \lambda dE_\lambda$$

un opérateur (borné ou non) à spectre continu. Partageons son spectre en intervalle $(\lambda_j, \lambda_{j+1}]$ ($j = -\infty$ ou m à n ou $+\infty$) dont la longueur est de l'ordre du double de l'erreur de mesure ; dans chaque intervalle choisissons une valeur μ_j (le milieu par exemple), et définissons une fonction en escalier $e(\lambda)$ par

$$e(\lambda) = \mu_j \quad \text{pour } \lambda \in (\lambda_j, \lambda_{j+1}]$$

Formons alors l'opérateur

$$(10) \quad B = e(A) = \int e(\lambda) dE_\lambda = \sum_j \mu_j (E(\lambda_{j+1}) - E(\lambda_j))$$

B est un opérateur à spectre purement ponctuel, ayant les μ_j pour valeurs propres et pour projecteurs correspondants $F_j = E(\lambda_{j+1}) - E(\lambda_j)$. Il est visible, pour reprendre l'expression de Von Neumann, que la mesure approchée de A est équivalente à la mesure exacte de B (cf note précédente).

Il est immédiat de se rendre compte que le remplacement de A par B ne modifie en rien l'évaluation des probabilités par l'axiome P, ni surtout le résultat de l'application de l'axiome R de la réduction d'état : que l'on adopte μ_j ou l'intervalle $(\lambda_j, \lambda_{j+1}]$ pour résultat de la mesure, le vecteur d'état après celle-ci est toujours dans la variété $E(\lambda_{j+1}) - E(\lambda_j) \mathcal{H}^*$, varié-

* cette variété reste la même qu'on la définisse sur un intervalle fermé ou semi-ouvert, puisque le spectre est continu.

§3C

té de dimension infinie, je le rappelle, puisque $E(\lambda)$ est continue.

C'est ce type d'opérateur, (10), dont je me servirai jusqu'à nouvel ordre.

C.- Mesure asservie, mesure indirecte, mesure couplée

Soit une grandeur physique a_1 attachée au sous-système C_1 et représentée dans \mathcal{H}_1 par un opérateur A_1 . a_1 peut aussi être regardée comme attachée au système global C , et à ce titre il est universellement admis -c'est ce que nous ferons- qu'il faut lui faire correspondre dans \mathcal{H} l'extension \hat{A}_1 de A_1 . De même pour une grandeur a_2 attachée à C_2 .

En vertu de ce que je viens de dire nous supposons que A_1 et A_2 sont à spectre *purement ponctuel*. Désignons par λ_{1j} ($j = 1$ à m ou $+\infty$) et λ_{2k} ($k = 1$ à n ou $+\infty$) les valeurs propres de A_1 et A_2 .

Effectuons sur C un couple de mesures de a_1 et a_2 . Ces mesures peuvent être, soit *rigoureusement simultanées* (cf note du paragraphe 2A), soit *consécutives* (par convention c'est alors a_1 qui sera la première). Dans le deuxième cas nous ne considérons que des mesures *immédiatement* consécutives, c'est-à-dire séparées par un laps de temps aussi petit que l'on veut (il faut donc faire un passage à la limite).

Proposons-nous d'abord de classer les différentes éventualités qui peuvent se présenter au cours de ces mesures, en admettant pour un instant que nous avons le moyen, si nous connaissons la représentation mathématique du système juste avant les mesures, de prédire, pour la mesure consécutive comme pour la mesure simultanée, la probabilité d'observer un couple donné de valeurs $(\lambda_{1j}, \lambda_{2k})$, probabilité que nous désignerons par

§3C

$\Pr(\lambda_{1j} \text{ et } \lambda_{2k})$. Deux cas sont à considérer :

a.- Mesure asservie

Il se trouve que $\Pr(\lambda_{1j} \text{ et } \lambda_{2k})$ n'est différente de zéro que pour des couples de valeurs propres en bijection bien définie ; nous noterons cette bijection en reprenant, pour l'indice de λ_2 , celui de λ_1 accentué : à λ_{1j} correspond $\lambda_{2j'}$. On a donc $\Pr(\lambda_{1j} \text{ et } \lambda_{2k}) = 0$ pour tout $k \neq j'$, quel que soit j . Cela signifie qu'à chaque valeur observée de a_1 correspond une et une seule valeur certaine de a_2 . J'introduirai le terme de mesures *asservies* l'une à l'autre (terme plus strict que corrélées) pour qualifier ce type de relation entre a_1 et a_2 .

Quand la théorie prédit que les mesures de a_1 et a_2 sont asservies, on peut se contenter de faire une seule des deux mesures, pour laquelle nous prendrons par convention a_1 ; on en déduit alors la valeur de a_2 par application de la théorie. Nous qualifions d'*indirecte*, comme je l'ai dit en commençant, cette mesure de a_2 . Il est trivial de noter, mais c'est indispensable pour la suite, que *la mesure indirecte ne comporte qu'une seule mesure réellement effectuée* au lieu des deux que nous avons ci-dessus. Néanmoins, pour des raisons évidentes de vérification expérimentale, il est clair qu'elle va prendre appui sur la théorie de la mesure asservie ; le tout est de savoir exactement comment.

b.- Mesure couplée

Le second cas à envisager est celui où, pour certaines valeurs de l'indice j sinon toutes, la probabilité $\Pr(\lambda_{1j} \text{ et } \lambda_{2k})$ est différente de zéro pour plus d'une valeur de k . En admettant qu'on connaisse les valeurs de $\Pr(\lambda_{1j} \text{ et } \lambda_{2k})$ pour tout j et k , la connaissance du résultat

§3C

de la première mesure ne permet de prédire le résultat de la seconde qu'en probabilité, et non plus de façon certaine comme dans le cas de la mesure asservie. Je dirai ici que nous avons affaire à des mesures *couplées*, qualificatif qui laisse totalement ouverte la question de la dépendance ou de l'indépendance des probabilités des deux mesures.

Ces définitions données, il faut tout de suite souligner une différence, certes élémentaire, mais essentielle, entre les cas a et b : *ils ont trait à des situations expérimentales totalement distinctes.*

Dans le cas de la mesure asservie l'observateur peut, sur une *expérience individuelle* et constatant une valeur λ_{1j} de a_1 , porter un jugement certain sur le résultat, $\lambda_{2j'}$, à attendre de la mesure de a_2 ; et il peut vérifier cette prédiction sur l'expérience individuelle considérée -plus exactement, comme chaque fois en physique qu'il s'agit de vérifier une loi, sur un grand nombre d'expériences individuelles reproductibles.

Dans le cas de la mesure simplement couplée au contraire, l'observateur ne peut, sur une expérience individuelle, tirer aucune conclusion de la connaissance de λ_{1j} , tout comme, dans le jeu de pile ou face, la connaissance du résultat d'une épreuve ne permet pas de porter aucune prédiction certaine sur le résultat de l'épreuve suivante. La seule prédiction que peut faire l'observateur est probabiliste, et sa vérification expérimentale exige par conséquent un *ensemble statistique* de mesures de a_1 et a_2 , dont celles qui font apparaître λ_{1j} pour a_1 ne forment qu'un sous-ensemble strict. L'expérience individuelle n'a plus, dans ce cas, aucun intérêt.

4.- LA THEORIE DE LA MESURE INDIRECTE D'APRES VON NEUMANN

Nous avons maintenant en main tous les éléments nécessaires pour discuter la théorie traditionnellement admise de la mesure indirecte, théorie qu'on fait remonter à Von Neumann, encore qu'on lui fasse dire un peu plus qu'il n'en a dit en réalité.

A.- Les résultats de Von Neumann

On peut les diviser en trois étapes, que je rappelle brièvement.

Tout d'abord un théorème (V.N., D.229, A.429). Soit $\psi(q_1, q_2) \in \mathcal{K}$ une fonction d'onde^x quelconque représentant le système composite $C = C_1 \cup C_2$. Il existe alors, dans \mathcal{K}_1 et \mathcal{K}_2 respectivement, deux suites *orthonormées* $u_{1\alpha}(q_1)$ et $u_{2\beta}(q_2)$ ($\alpha, \beta = 1$ à n ou $+\infty$) déterminées par la donnée de ψ et *uniques* (à des exponentielles imaginaires près, bien entendu), telles que ψ se met sous la forme diagonale

$$(11) \quad \psi(q_1, q_2) = \sum_{\alpha} \sqrt{p_{\alpha}} u_{2\alpha}(q_1) u_{2\alpha}(q_2)$$

$$(p_{\alpha} > 0, \sum_{\alpha} p_{\alpha} = 1).$$

Si j'ai souligné l'unicité de cette décomposition, c'est qu'il n'est pas rare, dans la littérature de voir faire appel à deux décompositions distinctes, l'une telle que (11) et une autre de la forme $\psi = \sum_{\beta} \sqrt{q_{\beta}} v_{1\beta} v_{2\beta}$,

^xJe me borne à reprendre le cas traité par Von Neumann, qui se limite aux espaces L^2 ; mais l'équation (11) s'étend aisément à des espaces de Hilbert plus généraux.

les suites $v_{1\beta}$ et $v_{2\beta}$ étant encore supposées *orthonormées*. Or une telle double décomposition est impossible dans des espaces de Hilbert (elle devient au contraire possible si on sort de ces espaces, témoin l'exemple donné par Einstein, Podolsky et Rosen⁽⁸⁾, qui fait intervenir des fonctions δ), et s'appuyer sur son existence supposée ne peut évidemment que conduire à des conclusions erronées. Pour plus ample vérification, je renvoie au texte précité de Von Neumann.

La deuxième étape du raisonnement est la suivante (V.N., D.231, A.434). Complétons d'abord, si c'est nécessaire, les deux suites $u_{1\alpha}$ et $u_{2\beta}$ dans leurs espaces respectifs de manière à former une base $\phi_{1j}(q_1)$ de \mathcal{K}_1 et une base $\phi_{2k}(q_2)$ de \mathcal{K}_2 ; la suite $\phi_{1j} \phi_{2k}$ forme une base de \mathcal{K} . Donnons-nous ensuite une suite de valeurs réelles toutes *distinctes* λ_{1j} , une suite analogue λ_{2k} , et formons les deux opérateurs définis dans \mathcal{K}_1 et \mathcal{K}_2

$$(12) \quad A_1 = \sum_j \lambda_{1j} P_{\phi_{1j}}, \quad A_2 = \sum_k \lambda_{2k} P_{\phi_{2k}}$$

le symbole P_{ϕ} désignant le projecteur sur le vecteur normé ϕ . A_1 et A_2 sont auto-adjoints et par conséquent représentent, d'après un autre axiome de Von Neumann (à vrai dire aujourd'hui controversé) deux grandeurs physiques a_1 et a_2 attachées à C_1 et à C_2 .

Les extensions \tilde{A}_1 et \tilde{A}_2 à l'espace \mathcal{K} étant des opérateurs commutatifs, les grandeurs a_1 et a_2 considérées comme attachées à C sont simultanément mesurables (V.N., D.117, A.223). Si alors on fait une mesure simultanée de a_1 et a_2 , la probabilité de leur trouver les valeurs λ_{1m} et λ_{2n} est, en vertu de l'axiome P, β (§2A),

§4A

$\|P_{\phi_{1m} \phi_{2n}} \psi\|^2 = |(\psi, \phi_{1m} \phi_{2n})|^2$. On voit alors, en se reportant à (11), que cette expression n'est différente de zéro que si le couple ϕ_{1m}, ϕ_{2n} s'identifie à un couple $u_{1\alpha}, u_{2\alpha}$ de même indice α (la valeur de la probabilité étant alors p_α). Il en résulte qu'une *mesure simultanée* de a_1 et a_2 ne peut donner comme résultats que des couples de valeurs $\lambda_{1\alpha}, \lambda_{2\alpha}$ de même indice. Nous sommes ici dans un des cas de mesure asservie envisagés au paragraphe 3C.

Jusqu'ici rien que de fondé. Mais c'est alors que Von Neumann tient l'extraordinaire argumentation suivante, (D.231, A.434) que je traduis littéralement de l'édition originelle allemande : "Par conséquent notre proposition^x signifie ceci : a_1 et a_2 sont simultanément mesurables, et si l'une^{xx} des deux est mesurée sur ψ , la valeur de l'autre est de ce fait déterminée univoquement (on retrouve cette formulation en termes presque identiques quelques pages plus loin - D.234, A.440- ce qui par conséquent ne laisse aucun doute sur la pensée de l'auteur).

C'est donc dans cette argumentation, universellement acceptée depuis 1932, que réside la légitimation de la mesure indirecte, dont je reprends une fois de plus la définition : en mesurant *une seule* des deux grandeurs a_1 et a_2 , on a le droit de porter une prévision certaine sur la valeur de l'autre.

A quoi la jurisprudence, si je peux m'exprimer ain-

^x celle que je viens de souligner à l'instant

^{xx} c'est moi qui souligne

§4B

si, a ajouté un complément très important : c'est que, si on mesure a_1 sur le sous-système C_1 et qu'on trouve la valeur propre $\lambda_{1\alpha}$ de l'opérateur A_1 défini par (12), la fonction d'onde du système global C est réduite au seul terme monôme $u_{1\alpha}(q_1)u_{2\alpha}(q_2)$ de (11) et la fonction d'onde de C_2 au seul terme $u_{2\alpha}(q_2)$. D'où l'on tire évidemment des conclusions surprenantes sur la "télépathie" entre C_1 et C_2 . Il reste que Von Neumann n'est pour rien dans cette affaire : il s'est borné à l'application de l'axiome P des probabilités, alors que le prolongement qu'on a donné par la suite à son raisonnement concerne l'axiome R de la réduction d'état.

Quoi qu'il en soit de l'origine des deux assertions, je me propose de montrer qu'elles sont aussi irrecevables l'une que l'autre tant qu'on reste dans le cadre, dénué de toute équivoque, des axiomes de la mesure reproduite au paragraphe 2A.

B.- Critique de l'argumentation de Von Neumann

La faille de cette argumentation saute aux yeux : elle réside dans le fait qu'on applique à une expérience comportant une mesure unique un résultat établi pour une mesure double, et simultanée. Il y a là un pas qu'en bonne logique on n'a pas le droit de franchir. Naturellement il se pourrait que la conclusion, quoique hâtive, fût juste : nous allons voir qu'il n'en est rien.

En vertu du mode de raisonnement probabiliste classique - qui est valable pour la Mécanique quantique comme pour n'importe quelle théorie probabiliste - le problème de la mesure indirecte, *pour être correctement posé*, doit s'énoncer comme suit. A un instant donné, on mesure la grandeur a_1 attachée à C_1 ; connaissant le résultat de cette mesure, soit $\lambda_{1\alpha}$, quelle est la probabilité pour

qu'une mesure *postérieure* de la grandeur a_2 attachée à C_2 fournisse une valeur donnée $\lambda_{2\beta}$? en abrégé, quelle est la probabilité conditionnelle $\Pr(\lambda_{2\beta} \text{ si } \lambda_{1\alpha})$?

J'attire l'attention sur le terme "postérieure", qui est impératif. Si en effet on envisageait de faire la mesure de a_2 rigoureusement au même instant que celle de a_1 , on tournerait en rond dans le cercle de la mesure double simultanée, et se poser la question d'une mesure indirecte n'aurait pas de sens. Si donc on prend zéro pour instant de la mesure de a_1 , la mesure de a_2 doit être envisagée à un instant $\tau > 0$, et nous pouvons symboliser la probabilité cherchée par $\Pr(\lambda_{2\beta} \text{ si } \lambda_{1\alpha} ; \tau)$.

Mais entre 0 et τ le système C, ou C_2 , évolue et cette probabilité varie ; si on veut une réponse bien définie, il faut prendre la probabilité limite, soit $\lim_{\tau \rightarrow 0} \Pr(\lambda_{2\beta} \text{ si } \lambda_{1\alpha} ; \tau)$. A priori rien n'assure que cette limite

soit égale à la valeur qu'on obtient en faisant brutalement $\tau = 0$ dans l'expression de la probabilité, soit $\Pr(\lambda_{2\beta} \text{ si } \lambda_{1\alpha} ; \tau = 0)$, d'autant plus que celle-ci est la probabilité de la mesure double simultanée et s'écrit aussi bien $\Pr(\lambda_{1\alpha} \text{ et } \lambda_{2\beta} ; \tau = 0)$. La différence d'écriture fait ressortir la différence des notions et précise la question qui se pose.

Avant d'y répondre un éclaircissement important est nécessaire. Chez Von Neumann la succession des étapes est la suivante. On se donne d'abord une fonction d'onde $\psi(q_1, q_2)$, et c'est sur sa décomposition diagonale (11) qu'on construit ensuite les opérateurs de mesure (12). J'ai déjà dit plus haut (§1) quel était l'objectif que poursuivait Von Neumann en adoptant cette démarche : justifier (D.224, A.421) un déplacement arbitraire de la frontière entre système observé et appa-

reil de mesure.

L'objectif de la mesure indirecte, quoique connexe, est différent. Sur le système qu'il étudie, l'expérimentateur se fixe d'abord les grandeurs physiques a_1 et a_2 à mesurer, c'est-à-dire les opérateurs de mesure ; et ce n'est qu'ensuite qu'il peut se demander comment doit être préparé le système pour qu'il se prête à la mesure indirecte de l'une ou l'autre grandeur, c'est-à-dire quelle doit être la fonction d'onde du système pour que les deux mesures soient asservies. Il nous faut donc inverser la démarche de Von Neumann et poser a priori nos opérateurs de mesure.

Soient

$$(13) \quad A_1 = \sum_j \lambda_{1j} E_{1j}, \quad A_2 = \sum_k \lambda_{2k} E_{2k}$$

les opérateurs, définis dans \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 respectivement, correspondant à a_1 et a_2 ; ils sont, d'après la discussion du paragraphe 3B, supposés à spectre ponctuel, mais à dégénérescences quelconques.

Faisons sur le système une mesure de la grandeur a_1 seule. Si nous voulons connaître l'effet de cette mesure sur la représentation mathématique du système global C - connaissance indispensable pour porter des prévisions sur la mesure de a_2 , nous devons considérer a_1 comme attachée aussi à C et lui faire alors correspondre comme opérateur l'extension \hat{A}_1 de A_1 . Comme \hat{A}_1 et A_1 ont même valeurs propres, le résultat de la mesure ne peut être qu'une des quantités λ_{1j} de (13). Supposons qu'on observe λ_{1m} . Pour déterminer le vecteur d'état après la mesure et comme celle-ci est solitaire, nous devons appliquer l'axiome R, α (§2A) et non l'axiome R, β qui ne peut pas jouer ici. En vertu de R, α donc, et si nous désignons par

§4B

$\psi' \in \mathcal{H}$ le vecteur d'état de C après la mesure, ψ' est astreint à vérifier la relation

$$(14) \quad \hat{E}_{1m} \psi' = \psi' \quad \text{soit} \quad (E_{1m} \otimes I_2) \psi' = \psi'$$

plus la relation de normalisation, et ces deux relations seulement.

On remarque que (14) est totalement indépendante de la représentation de C avant la mesure (vecteur d'état, mélange ou variété), et c'est pourquoi il était inutile de spécifier celle-ci.

Or, ainsi que nous l'avons noté à la fin du paragraphe 3A, la variété $\hat{E}_{1m} \mathcal{H}$ est de dimension infinie quand bien même la valeur propre λ_{1m} serait simple pour A_1 , et l'équation (14) nous apprend seulement que ψ' peut être n'importe quel vecteur de cette variété.

Cette assertion surprendra sans doute, tant on a l'habitude d'admettre, en s'appuyant sur la décomposition diagonale (11), que la mesure de a_1 réduit la représentation de C à un monôme bien déterminé de la forme $u_{1\alpha}(q_1)u_{2\alpha}(q_2)$ (c'est même un des points clefs d'une argumentation bien connue d'Einstein (8,9)). Mais il faut remarquer, pour commencer, qu'il y a manifestement contradiction entre cette conclusion communément acceptée et la propriété, non moins couramment admise, de l'axiome R d'effacer toute trace de la représentation du système ; la contradiction provient de ce qu'on applique au système global une réduction d'état basée tant bien que mal sur l'opérateur incomplet A_1 , alors qu'il faut user de son extension A_1 ; et c'est pourquoi j'ai pris la précaution un peu lourde de rappeler plus haut qu'en règle générale c'est pourtant cette extension que tout le monde reconnaît comme valable.

§4B

D'autre part il est aisé de contrôler l'application que je viens de faire de l'axiome R, α en recourant à l'équivalence (§2A) que Von Neumann a donnée de cet axiome, à savoir que si on recommence immédiatement sur ψ' (normée) la mesure de a_1 on doit retrouver sûrement la valeur λ_{1m} . C'est bien ce qui se passe : la probabilité de trouver λ_{1m} sur ψ' est, d'après l'axiome P, α , $(\hat{E}_{1m} \psi', \psi')$ donc, en vertu de (14), $(\psi', \psi') = 1$.

ψ' étant ainsi régi par l'équation (14), nous pouvons maintenant calculer les probabilités relatives à la mesure postérieure de a_2 : supposé que le résultat de la mesure de a_1 est λ_{1m} , quelle est la probabilité pour que la mesure de a_2 fournisse le résultat λ_{2k} , k donné quelconque ? Le délai τ entre la mesure de a_1 et celle de a_2 ne crée aucune difficulté puisque, lorsque $\tau \rightarrow 0$, l'opérateur d'évolution unitaire tend vers l'identité, et que par suite les probabilités d'une mesure de a_2 immédiatement consécutive à celles de a_1 sont à prendre sur ψ' . La probabilité de la valeur λ_{2k} est alors, d'après l'axiome P, α , $(\hat{E}_{2k} \psi', \psi')$, soit, en remplaçant ψ' par sa valeur du premier membre de (14)

$$\text{Pr}(\lambda_{2k} \text{ si } \lambda_{1m}) = (\hat{E}_{2k} \hat{E}_{1m} \psi', \psi')$$

soit encore, en tenant compte de (7)

$$(15) \quad \text{Pr}(\lambda_{2k} \text{ si } \lambda_{1m}) = (E_{1m} \otimes E_{2k} \psi', \psi') = \|E_{1m} \otimes E_{2k} \psi'\|^2$$

Mais l'équation (14) s'écrit aussi bien, puisque $I_2 = \sum_{\ell} E_{2\ell}$ ($\ell = 1$ à n ou $+\infty$, avec $n \geq 2$ sauf si A_2 est l'opérateur identité, cas sans intérêt à écarter)

$$\sum_{\ell} (E_{1m} \otimes E_{2\ell}) \psi' = \psi'$$

Cette équation exprime que ψ' n'a de composantes non nulles que dans les variétés $(E_{1m} \otimes E_{2\ell})\mathcal{H}$ (m fixé, $\ell = 1$ à n ou $+\infty$) ; si on désigne par $\psi'_{m\ell}$ ces composantes, elles ne sont astreintes qu'à vérifier la condition de normalisation $\sum_{\ell} \|\psi'_{m\ell}\|^2 = 1$, de sorte que les probabilités (15) pour toutes les valeurs de k , $\|\psi'_{mk}\|^2$, sont arbitraires à l'une d'entre elles près.

Il s'ensuit les deux conclusions que voici :

- après la mesure de a_1 le système global C est représenté par un vecteur d'état indéterminé dans la variété définie par (14), et la probabilité d'une valeur quelconque de a_2 est tout aussi indéterminée ; il ne peut donc exister aucune relation entre la mesure de a_1 et celle de a_2 : *il n'y a pas d'asservissement des deux mesures l'une à l'autre ;*

- *l'application rigoureuse de l'axiome R interdit donc d'expliquer la mesure asservie et de justifier la mesure indirecte.*

A moins d'abandonner ces deux objectifs, ce à quoi nul physicien ne se résignerait, nous sommes inéluctablement conduits à la révision de l'axiome R.

C.- Critique de la notion de mesure (rigoureusement) simultanée

Le désaccord entre le résultat de Von Neumann rappelé au paragraphe A et celui que je viens d'établir se traduit simplement en termes mathématiques : dans l'axiomatique traditionnelle les prévisions portées sur deux mesures rigoureusement simultanées ne sont pas la limite,

pour $\tau \rightarrow 0$, des prévisions portées sur deux mesures consécutives de τ . *Il y a discontinuité dans l'application des axiomes R, a et R, b.*

Cette discontinuité provient d'une méconnaissance des réalités physiques qui pèsent sur l'exécution de la mesure. La mesure "rigoureusement simultanée" est en effet une notion mathématique, *purement idéale, mais n'ayant aucun contenu opérationnel*. Il n'existe aucun chronomètre permettant de garantir que l'intervalle de temps qui sépare deux événements est *rigoureusement nul* ; tout ce que peut la meilleure électronique actuelle est de distinguer des époques distantes de 10^{-9} à 10^{-12} s et, même si on arrive à améliorer cette séparation, on ne descendra jamais à zéro. D'ailleurs, quand bien même on disposerait d'un chronomètre parfait, il faudrait pour qu'il soit utile que les événements eux-mêmes soient *rigoureusement instantanés*, et il est douteux que, par exemple, le noircissement d'un grain photographique sous l'impact d'un électron soit si soudain (naturellement on peut prendre le biais de dire que ce noircissement se passe "en dehors du temps" ; mais alors il devient incohérent de parler de simultanéité).

La simultanéité est donc une notion qui ne peut s'extraire du réel que par un passage à la limite, commode ou nécessaire pour le traitement mathématique, mais qui n'a de correspondance physique que si les résultats, nombres ou fonctions, qu'on prétend observer *restent continus jusqu'à la limite comprise* : si la théorie prévoit une discontinuité pour $\tau = 0$, celle-ci est invérifiable puisqu'on n'a aucun moyen de s'assurer qu'un laps de temps est nul.

La révision que nous devons entreprendre de l'axiome de la réduction d'état devra donc satisfaire, entre autres, à cette prescription que la réduction obtenue

§5A

après deux mesures simultanées est bien un cas limite de la réduction obtenue après deux mesures consécutives.

5.- MODIFICATION DE L'AXIOME DE LA REDUCTION D'ETAT

En résumé l'axiome R doit être amendé de telle sorte que : α) il permette d'expliquer correctement la mesure asservie et par là de justifier la mesure indirecte ; β) il redonne, par passage à la limite, l'axiome R, β relatif à la mesure simultanée pour lequel on ne voit pas de sujet de doute. Ces deux propriétés ne peuvent évidemment être vérifiées qu'a posteriori, ce qui sera fait aux paragraphes 6 et 9.

L'énoncé que je vais donner ci-dessous n'est pas nouveau ; il a déjà été adopté, sous une forme peut-être un peu moins détaillée, par certains auteurs (¹⁰), ou admis côte à côte avec l'axiome de Von Neumann sous le nom peut-être un peu sibyllin de "mesure morale" (¹¹). Je l'appellerai simplement axiome R'.

A.- Enoncé de l'axiome R'

Soit $T = \int \lambda dE_\lambda$ un opérateur auto-adjoint dans un espace de Hilbert \mathcal{H} .

Considérons d'abord le cas d'un système décrit par un vecteur d'état bien déterminé ψ . Si on fait une mesure sur ψ et qu'on trouve un résultat compris dans l'intervalle (λ', λ'') , le nouveau vecteur d'état ψ' après la mesure est la PROJECTION, qu'on ramène ensuite à la norme unité, de l'ancien, ψ , dans la variété

$$E_{\lambda'}^{\lambda''} \mathcal{H} ; \text{ autrement dit } \psi' = E_{\lambda'}^{\lambda''} \psi / \|E_{\lambda'}^{\lambda''} \psi\|.$$

Si le système était décrit par un mélange, la même mesure provoque un nouveau mélange dont les vecteurs d'état sont les PROJECTIONS (renormalisées) de ceux de l'ancien mélange sur la variété $E_{\lambda'}^{\lambda''} \mathcal{H}$, affectés de poids

§5B

inchangés.

Si le système était décrit par un vecteur d'état indéterminé dans une variété fermée, le nouveau vecteur d'état ψ' est à prendre arbitrairement dans la projection de l'ancienne variété sur $E_{\lambda'}^{\lambda''} \mathcal{H}$.

Enfin si on ne disposait d'aucune information sur la représentation du système avant la mesure de T, le vecteur d'état ψ' après la mesure est simplement astreint à appartenir à la variété $E_{\lambda'}^{\lambda''} \mathcal{H}$. Ce cas^x est évidemment celui de la mesure préparatoire.

La particularisation de cet énoncé au cas où T admet des valeurs propres est immédiate.

Il n'est pas nécessaire, contrairement à ce qui se passait pour l'axiome R, de prévoir spécialement le cas d'une mesure simultanée de deux grandeurs compatibles : ce cas particulier se déduira tout naturellement de l'énoncé précédent (§9).

B.- Commentaires

Le point essentiel qui différencie cet énoncé R' de celui de Von Neumann, R, α , que j'ai rappelé au paragraphe 2A, est le suivant. Avec l'axiome classique, le vecteur d'état ψ antérieur à la mesure est complètement effacé par la connaissance du résultat de la mesure, le vecteur d'état après celle-ci, ψ' , n'étant astreint qu'à se trouver dans la variété propre attachée à la valeur propre observée, en vertu de l'équation (2), et

^xC'est un cas particulier du précédent : ψ est n'importe quel vecteur de \mathcal{H} .

étant par suite *totale*ment indépendant de ψ . Avec l'énoncé R' ci-dessus par contre, et comme ψ' est la projection de l'ancien vecteur ψ sur la variété propre $E_{\lambda'}^{\lambda''} \mathcal{K}$, il subsiste toujours* une influence de l'ancien vecteur d'état sur le nouveau, ce qui peut choquer les habitudes acquises. Mais c'est en définitive cette propriété un peu schismatique qui permet d'expliquer la mesure asservie, tout comme elle nous permettra de faire ressortir l'aspect "informationnel" de cette théorie probabiliste qu'est la Mécanique quantique.

Passons maintenant à quelques remarques de détail.

a.- Il est clair en premier lieu que l'axiome R' est compatible avec l'axiome P, auquel nous ne touchons pas : le seul cas en effet où ψ' ne soit pas défini est celui où $\|E_{\lambda'}^{\lambda''} \psi\| = 0$; mais ce cas a une probabilité nulle de se présenter.

b.- L'équivalence que Von Neumann a donnée à son axiome R, α est respectée. Si une mesure faite sur le vecteur d'état ψ donne un résultat appartenant à l'intervalle (λ', λ'') et qu'on recommence immédiatement après la même mesure sur le nouveau vecteur d'état ψ' , la probabilité d'obtenir un résultat appartenant à (λ', λ'') est

$$(E_{\lambda'}^{\lambda''}, \psi', \psi') = \left(E_{\lambda'}^{\lambda''}, \frac{E_{\lambda'}^{\lambda''} \psi}{\|E_{\lambda'}^{\lambda''} \psi\|}, \frac{E_{\lambda'}^{\lambda''} \psi}{\|E_{\lambda'}^{\lambda''} \psi\|} \right) = 1$$

*En effet cette influence ne disparaîtrait complètement si ψ était orthogonal à la variété $E_{\lambda'}^{\lambda''} \mathcal{K}$: mais ce cas a une probabilité nulle de se produire, en vertu de l'axiome P, α .

on retrouve donc en toute certitude, dans la seconde mesure, le même intervalle (λ', λ'') qu'avait fourni la première.

c.- Si, avant la mesure, le vecteur d'état ψ du système est connu, le vecteur d'état ψ' après la mesure est également connu ; la même observation est valable pour des opérateurs statistiques. L'axiome R' n'introduit donc pas d'indétermination là où il n'y en avait pas, contrairement à l'axiome R, α (dont Von Neumann avait très bien vu le défaut dans le cas d'un opérateur statistique : D. 185, A. 348).

d.- Par contre, en général, l'axiome R' ne lève pas l'indétermination s'il y en avait une : si avant la mesure le système est représenté par une variété fermée \mathcal{M} dans laquelle ψ est indéterminée, ψ' est indéterminée dans la variété projection $E_{\lambda'}^{\lambda''} \mathcal{M}$; on montrerait aisément que, pour que l'indétermination soit levée, c'est-à-dire pour que $E_{\lambda'}^{\lambda''} \mathcal{M}$ se réduise à un vecteur, il faut et il suffit que le projecteur P sur \mathcal{M} et le projecteur $E_{\lambda'}^{\lambda''}$ commutent, et que le produit $E_{\lambda'}^{\lambda''} P$ soit un projecteur à une dimension ; il est clair que cela n'arrivera que dans des cas exceptionnels.

e.- A titre de curiosité, on peut voir que l'axiome R' coïncide avec l'axiome R, α quand l'application de ce dernier ne provoque pas d'indétermination sur ψ' , ce qui n'arrive que dans le cas -tout idéal- où la mesure fournit une valeur propre simple de T.

RÉFÉRENCES

- (1) P. Duhem, La théorie physique, son objet, sa structure, Rivière et Cie, Paris, 1906
- (2) J. Von Neumann, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Springer, Berlin, 1932. Traduction américaine (pratiquement littérale) par R. Beyer : Mathematical foundations of Quantum Mechanics, Princeton Univ. press, Princeton, N.J., 1955
- (3) L. de Broglie, La théorie de la mesure en Mécanique ondulatoire, Gauthier-Villars, Paris, 1957
- (4) F. Riesz et B. Sz. Nagy, Leçons d'analyse fonctionnelle, Akademiai Kiado, Budapest, 1953
- (5) D. Fargue, Ann. Fond. L. de Broglie, 3, 87, 1978
- (6) A.Y. Khinchin, Mathematical foundations of quantum statistics, Graylock press, Albany, N.Y., 1950
- (7) E. Prugovecki, Quantum mechanics in Hilbert space, Academic press, N.Y. et Londres, 1971
- (8) Einstein, Podolsky et Rosen, Phys. Rev., 47, 777, 1935
- (9) Albert Einstein, Philosopher-scientist, ed. by P.A. Schilpp, Cambridge Univ. press, 1970 (p. 85)
- (10) Cohen-Tannoudji, Diu et Laloe, Mécanique quantique, Herman, Paris, 1973
- (11) B. d'Espagnat, Conceptual foundations of Quantum Mechanics, Benjamin, Menlo park, Calif. 1971.