Annales de la Fondation Louis de Broglie -
Vol. 6, n° 3, 1981

SÉPARATION DU FAISCEAU DANS L'EXPÉRIENCE DE STERN ET GERLACH

J.P. Amiet
Institut de Physique
Rue Breguet 1
CH-2000 Neuchâtel

P. Huguenin
Dept. of Physics,
Southern Illinois University
Carbondale, IL 62901

(manuscrit reçu le 2 Mars 1981)

1 Introduction

Les questions posées par la rédaction des Annales de la Fondation Louis de Broglie nous ont conduit à rédiger les pages qui suivent. Le problème fondamental nous paraît être le mécanisme de séparation du faisceau lorsque le spin se trouve de travers à l'entrée du séparateur de Stern-Gerlach. C'est donc sur le mouvement au sein du champ magnétique inhomogène que nous nous sommes concentrés.

Pour "voir ce qui se passe" nous avons choisi de travailler dans l'espace de phase à l'aide de l'isomorphisme de Weyl et Wigner. Grâce à l'analogie typographique entre des formules de mécanique statistique classique et quantique qui en découle, on peut aussi nourrir l'espoir de parvenir à une idéalisation acceptable de la mesure avec un écran de détection.

L'utilisation de l'isomorphisme de Weyl et Wigner n'est pas nouvelle mais ne fait pas encore partie du bagage usuel de l'étudiant en physique. L'expérience montre que ce formalisme est en réalité assez mal connu. Nous avons donc précisé nos notations dans les § 2 et 3 avant d'entamer le vif du sujet.

2 Rappel

En 1932, E.P. Wigner [1] proposait d'associer une fonction $\rho(q,p)$ sur l'espace de phase à toute fonction d'onde $\psi(q)$ par la formule

$$\rho(q,p) = \int \psi^{\star}\left(q + \frac{u}{2}\right) e^{i\frac{pu}{\hbar}} \psi\left(q - \frac{u}{2}\right) du \qquad (2.1)$$

L'extension de cette formule à un opérateur densité se fait trivialement par linéarité relativement aux poids des états mélangés. La formule se généralise pour un nombre n arbitraire de degrés de libertés de façon évi-

dente.

Les propriétés suivantes sont faciles à vérifier :

$$\rho(q,p) \in \mathcal{R} \qquad (2.2)$$

$$\int \rho(q,p) \frac{dp}{2\pi\hbar} = \psi^{\star}(q)\ \psi(q) \in \mathcal{R}_+ \qquad (2.3)$$

$$\int \rho(q,p) \frac{dq}{2\pi\hbar} = \Phi^{\star}(p)\ \Phi(p) \in \mathcal{R}_+ \qquad (2.4)$$

La fonction ρ ressemble fortement à une densité de probabilité. Elle permet de calculer les densités de probabilités sur l'espace de configuration aussi bien que sur l'espace des impulsions par intégration sur p, respectivement q, comme en (2.3), respectivement (2.4). Ce n'est pas une probabilité parce que ρ peut prendre des valeurs négatives dans certains domaines de l'espace de phase. On lui donne le nom de *quasi-probabilité*.

Il est évidemment tentant de chercher à éliminer les valeurs négatives par d'autres choix d'associations, mais, à notre avis, il n'y a aucune chance d'aboutir dans cette direction. Ce serait la découverte d'une théorie probabiliste usuelle équivalente à la mécanique quantique.

Essayons donc d'interpréter les oscillations de ρ au lieu de les éliminer. Pour cela considérons deux états cohérents de Glauber centrés en $x = \pm a$ et d'impulsion moyenne nulle.

$$\psi_{\pm}(x) = (2\pi\ q_0^2)^{-\frac{1}{4}} \exp\left(-\left(\frac{x \mp a}{2q_0}\right)^2\right) \qquad (2.5)$$

Il leur correspond

$$\rho_{\pm}(x) = 2\ \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(q\mp a)^2}{q_0^2} + \left(\frac{p}{p_0}\right)^2\right]\right\} > 0 \qquad (2.6)$$

avec $p_0 = \dfrac{\hbar}{2q_0}$.

Considérons le mélange statistique, ou superposition incohérente, des états ± avec probabilité $\frac{1}{2}$:

$$\rho_{\text{mélange}} = \frac{1}{2}(\rho_+ + \rho_-) > 0 \qquad (2.7)$$

La quasi-probabilité est ici positive avec deux maxima. Si les deux états sont spatialement bien séparés, c'est-à-dire si

$$a \gg q_0 \qquad (2.8)$$

les maxima seront placés en $q = \pm a$, $p = 0$. Une interprétation probabiliste traditionnelle de ce mélange ne donne lieu à aucun problème.

Considérons maintenant la superposition des fonctions d'ondes. Il existe alors des "corrélations" de nature quantique entre ces deux régions de l'espace, sans que la probabilité de présence dans l'espace de configuration ne soit notablement affectée. Cette fois

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\ (\psi_+ + \psi_-) \qquad (2.9)$$

La normalisation est arbitrairement bonne à condition de choisir a suffisamment grand. Dans cette hypothèse, le calcul livre

$$\rho_{\text{superposition}} = \rho_{\text{mélange}} + \delta\rho \qquad (2.10)$$

$$\delta\rho = 2\ e^{-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{p}{p_0}\right)^2 + \left(\frac{q}{q_0}\right)^2\right)} \cos ap \qquad (2.11)$$

Cette correction à la quasiprobabilité précédente est localisée autour de l'origine. Elle a une amplitude indépendante de l'éloignement des deux paquets mais elle oscille d'autant plus rapidement que a est grand. Par intégration sur p, les oscillations s'effacent et on a bien

$$\psi^{\star}(q)\psi(q) \cong \frac{1}{2}\left(\psi_+^{\star}(q)\psi_+(q) + \psi_-^{\star}(q)\psi_-(q)\right) \qquad (2.12)$$

ce qui est attendu pour des fonctions d'ondes spatialement séparées. En revanche, dans l'espace des impulsions il apparaît une structure liée à l'espacement des deux paquets. Ainsi, loin de vouloir éliminer les oscillations de la quasiprobabilité, nous proposons de les prendre pour ce qu'elles sont : une manifestation du caractère quantique des états du système considéré.

L'association de Wigner entre opérateur densité et fonction sur l'espace de phase se généralise (2) à tous les opérateurs dont les éléments de matrice pris dans l'espace de configuration sont des distributions tempérées. Nous désignerons par une minuscule la fonction de Wigner associée à un opérateur désigné par une majuscule.

$$\begin{aligned} m(q,p) &= \int e^{+\frac{i}{\hbar}q.u} < q - \frac{u}{2}\ |M|\ q + \frac{u}{2} > d\underline{u}^n \\ &= 2^n\ \mathrm{Tr}(M\Pi(q,p)) \end{aligned} \qquad (2.13)$$

où

$$\Pi(q,p) = \frac{1}{2^n}\int \left|q + \frac{u}{2}\right> e^{\frac{i}{\hbar}qu} \left<q - \frac{u}{2}\right| d\underline{u}^n \qquad (2.14)$$

On vérifie sans peine les règles de correspondance suivantes

$$\begin{array}{ccc} 1 & \leftrightarrow & 1 \\ q & \leftrightarrow & Q \\ p & \leftrightarrow & P \end{array} \qquad (2.15)$$

De plus, pour des opérateurs à trace :

$$\mathrm{Tr}(AB) = \int a(q,p)b(q,p)\,\frac{d\underline{q}^n d\underline{p}^n}{(2\pi\hbar)^n}\,, \qquad (2.16)$$

ce qui implique à $B = 1$

$$\mathrm{Tr}A = \int a(qp)\,\frac{d\underline{q}^n d\underline{p}^n}{(2\pi\hbar)^n} \qquad (2.17)$$

3 Extension du formalisme

Les propriétés presque miraculeuses de l'isomorphisme de Wigner proviennent du choix très astucieux du champ d'opérateurs $\Pi(q,p)$. En fait, il s'agit du translaté sur l'espace de phase de l'opérateur parité ([3]). Ainsi les propriétés fondamentales

$$\Pi^2 = 1 \qquad (3.1)$$

$$\Pi(x)\Pi(y)\Pi(z) = e^{i\phi(x,y,z)}\Pi(x-y+z) \qquad (3.2)$$

$$\phi(x,y,z) = -\phi(y,x,z) = -\phi(x,z,y) \qquad (3.3)$$

$$\int \Pi(x)\,\frac{d^{2n}x}{(\pi\hbar)^n} = 1 \qquad (3.4)$$

sont des conséquences naturelles issues de la géométrie et de la théorie de représentation des groupes ([3]). Inversement, si l'on se donne la forme explicite de ϕ

$$\phi(x,y,z) = \frac{2}{\hbar}\,\ell(x-y,\ z-y) \qquad (3.5)$$

$$\ell(x,y) = p_x\cdot q_y - q_x\cdot p_y \qquad (3.6)$$

les formules ci-dessus définissent le champ Π de façon unique (à équivalence près). La normalisation a été choisie de telle sorte que Π soit unitaire. Elle a l'inconvénient de compliquer quelque peu les propriétés de trace

$$\mathrm{Tr}(\Pi(x)\Pi(y)) = (\pi\hbar)^n\,\delta^{2n}(x-y) \qquad (3.7)$$

Il est facile de calculer l'image du produit d'opérateurs dans l'espace des fonctions sur l'espace de phase E. Ce produit dénommé produit de Moyal sera noté par o :

$$(aob)(x) = \int e^{i\phi(x,y,z)}a(y)b(z)\,\frac{d^{2n}y\,d^{2n}z}{(\pi\hbar)^{2n}} \qquad (3.8)$$

En particulier, pour toute fonction dérivable $f(q,p)$

$$\begin{aligned} \vec{q}of(\vec{q},\vec{p}) &= \vec{q}f + \frac{i\hbar}{2}\vec{\nabla}_p f \\ \vec{p}of(q,p) &= \vec{p}f - \frac{i\hbar}{2}\vec{\nabla}_q f \end{aligned} \qquad (3.9)$$

L'image du commutateur ou crochet de Moyal permet de définir un produit de Lie qui, en première approximation d'un développement asymptotique en puissance de h redonne le crochet de Poisson. Pour les observables p et q, on a les résultats exacts :

$$\begin{aligned} \frac{1}{i\hbar}\left(p_k of - fop_k\right) &= \{p_k,\ f\} = -\frac{\partial f}{\partial q^k} \\ \frac{1}{i\hbar}\left(q^k of - foq^k\right) &= \{q^k,\ f\} = \frac{\partial f}{\partial p_k} \end{aligned} \qquad (3.10)$$

Cette coïncidence entre crochet de Moyal et crochet de Poisson est un petit peu plus générale. Elle persiste pour le crochet d'une fonction arbitraire avec tout polynôme de degré 2 en q et p.

Ainsi, pour les hamiltoniens polynomiaux de degré 2 au plus, les équations d'évolution de Von Neumann pour l'opérateur densité coïncident exactement avec les équations de Liouville de la mécanique statistique appliquée à la fonction de Wigner de ce même opérateur densité.

Nous avons donc, *pour la mécanique linéaire* [4], la possibilité de calculer l'évolution temporelle des états par substitution de variables dans l'expression de la densité de quasi-probabilité. Deux exemples sont utiles à notre propos. Tout d'abord, la particule libre

$$\rho_t(\vec{q},\vec{p}) = \rho_0(\vec{q} - \frac{\vec{p}}{m}\, t,\ \vec{p}) \qquad (3.11)$$

Ce résultat *exact* peut surprendre le lecteur (trop) averti : la physique quantique n'a pas disparu complètement. Elle est implicite dans les conditions initiales. ρ_0 doit être une quasi-probabilité, et, à ce titre elle doit représenter un opérateur positif de trace 1. Ces conditions mathématiques se conservent par l'évolution (3.11) ce qui assure la validité des inégalités de Heisenberg à tout instant. La fameuse dispersion du paquet d'onde libre n'a pas d'autre origine. On l'obtient ici par intégration sur les variables d'impulsion.

La particule uniformément accélérée peut être décrite de la même façon. Dans ce cas, pour une accélération $\vec{\gamma}$ donnée on a

$$\rho_t(\vec{q},\vec{p}) = \rho_0(\vec{q} - \frac{\vec{p}}{m}\, t + \frac{1}{2}\,\vec{\gamma}\, t^2,\ \vec{p} - m\vec{\gamma}t). \qquad (3.12)$$

On traiterait de même les forces harmoniques, mais dans

les cas plus compliqués les effets quantiques se manifestent dans la dynamique par des relations intégrales entre ρ_0 et ρ_t. En particulier les effets de diffraction dus à des discontinuités de potentiel sont difficiles à décrire dans ce formalisme.

4 Introduction du spin

Pour une particule de spin 1/2, l'espace de Hilbert est le produit tensoriel $C \otimes \mathcal{H}$. Les opérateurs d'observables et d'états s'écrivent de façon générale

$$A = \int \left(a_0(x)\, 1_2 + \vec{a}(x)\vec{\sigma}\right) \otimes \Pi(x)\ \frac{d^6x}{(\pi\hbar)^3} \qquad (4.1)$$

où visiblement

$$A \in L(C_2 \otimes \mathcal{H}) \qquad (4.2)$$

et

$$a(x) = \begin{pmatrix} a_0(\vec{q},\vec{p}) \\ a_1(\vec{q},\vec{p}) \\ a_2(\vec{q},\vec{p}) \\ a_3(\vec{q},\vec{p}) \end{pmatrix} \qquad (4.3)$$

est un champ quadri-dimensionnel sur E dans l'atlas galiléen. Deux observables seront identiques si et seulement si leurs fonctions a_μ sont les mêmes (au sens des distributions).

En posant

$$(\sigma^\mu) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} \qquad (4.4)$$

l'inverse de (4.1) s'écrit

$$a_\mu(x) = \frac{1}{2^4} \mathrm{Tr}_{sp}(\sigma^\mu \, \Pi(x) A) \qquad (4.5)$$

L'adjoint A' de A correspond à a^*. Les opérateurs auto-adjoints correspondent à des champs a_μ réels. Le produit de Moyal se généralise malheureusement de façon compliquée. Soit c le produit de a par b ; on aura

$$\begin{aligned} c_0 &= \sum_\mu a_\mu \circ b_\mu \\ c_k &= a_0 \circ b_k + a_k \circ b_0 - i\, \varepsilon_{k\ell m}\, a_\ell \circ b_m \end{aligned} \qquad (4.6)$$

Les états sont des opérateurs positifs, c'est-à-dire qu'ils s'expriment comme produit d'un opérateur avec son adjoint. La forme de (4.6) montre qu'il est impossible d'avoir un état dont la partie scalaire (indice $_0$) soit identiquement nulle.

Du point de vue de la théorie des groupes, il faut considérer deux types d'action sur les observables de la forme (4.1). D'une part, l'action des transformations unitaires sur C_2 se résume en une rotation du vecteur $\vec{a}$, qui ne touche pas le scalaire a_0. D'autre part, les transformations métaplectiques de $\mathcal{H}$ se résument en substitutions symplectiques des arguments. Physiquement, il est possible d'imaginer que les détecteurs de spin (direction de a) sont tournés indépendamment des détecteurs de position ou d'impulsion. Dans cette circonstance, le groupe nécessaire pour exprimer la cinématique est produit direct du groupe symplectique avec le groupe des rotations représenté ici par SU_2, puisqu'il s'agit du spin 1/2. Cette argumentation ne recouvre pas encore tout. L'opération physique passive la plus simple consiste à tourner simultanément tous les détecteurs. Dans ce cas, la transformation s'exprime sous la forme :

$$a \to a' \qquad a'(x) = \begin{cases} a_0(R\vec{q}.R\vec{p}) \\ R^{-1}\vec{a}(R\vec{q}.R\vec{p}) \end{cases} \qquad (4.7)$$

Dans (4.7), le lien entre rotation d'espace et rotation de spin est important, car les interactions qui permettent la "mesure" du spin produisent un couplage grâce auquel une mesure de position détermine une inconnue de spin.

Nous avons parlé ici des rotations, ce qui nécessite une métrique sur l'espace de configuration et définit automatiquement une polarisation de E. Il semble donc que la notion de spin réclame la donnée d'une polarisation. A ce sujet, que l'on pense à la notion de moment cinétique !

L'évolution réversible de la particule de spin 1/2 est gouvernée par un hamiltonien qui doit satisfaire des conditions de covariance galiléenne passive. La discussion détaillée de cet opérateur a été faite par C. Piron ([5]) à partir de "premiers principes". Il résulte une expression de H qui dépend de 2 champs vectoriels polaires $\vec{A}$ et $\vec{E}$, d'un champ vectoriel axial $\vec{B}$ et d'un champ scalaire V sur l'espace de configuration Eq. La spécialisation à l'interaction électro-magnétique impose que tous ces champs soient issus des seuls potentiels vecteur magnétique et scalaire électrique. Les coefficients de proportionnalité sont empiriques. Le résultat peut être écrit

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A})^2 + e\phi + \left[\frac{\mu}{2}\vec{B} + \eta\left(\vec{E}\times(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A})\right)\right].\vec{\sigma},$$

où e est la charge de la particule, μ son moment magnétique et η un coefficient de couplage spin-orbite dont la relation avec μ découle de la relativité d'Einstein.

5 Mouvement d'une particule neutre dans un champ magnétique inhomogène

Dans l'expérience de Stern-Gerlach, on soumet un faisceau de particules neutres à un champ magnétique inhomogène. Ainsi $\vec{E} = 0$, $e = 0$, et H se simplifie considérablement

$$H = \frac{1}{2m} \vec{p}^2 + \frac{\mu}{2} \vec{B}.\vec{\sigma} \tag{5.1}$$

Il est donné sur l'espace de phase par ((4.1))

$$h_0 = \frac{1}{2m} \vec{p}^2, \qquad \vec{h} = \frac{\mu}{2} \quad \vec{B}(\vec{q}). \tag{5.2}$$

Les équations d'évolution de l'état W du système, décrit par son champ $w(x)$ (4.1), s'obtiennent en prenant le commutateur de h et w pour le produit (4.6). On obtient

$$\dot{w}_0 = - \frac{\vec{p}}{m} \vec{\nabla}_q \; w_0 + \frac{\mu}{2i\hbar} \sum_k \left(B_k o w_k - w_k o B_k\right)$$

$$\dot{\vec{w}} = - \left(\frac{\vec{p}\;\vec{\nabla}_q}{m}\right)\vec{w} + \frac{\mu}{2i\hbar}(\vec{B} o w_0 - w_0 o \vec{B}) - \frac{\mu}{2\hbar}\left((\vec{B} o) x \vec{w} - \vec{w} x (o \vec{B})\right)$$

Pour un champ d'induction magnétique quelconque, le produit de Moyal donne des expressions impossibles à évaluer de façon générale. En revanche, si $\vec{B}$ dépend au plus linéairement de la position $\vec{q}$, les crochets de Moyal et de Poisson sont identiques, et l'anticommutateur se réduit au produit ordinaire ; d'où

$$\begin{aligned} \dot{w}_0 &= - \frac{\vec{p}\,\vec{\nabla}_q}{m} w_0 + \frac{\mu}{2} \sum_k \{B_k, w_k\} \\ \dot{\vec{w}} &= - \frac{\vec{p}\vec{\nabla}_q}{m} \vec{w} + \frac{\mu}{2}\{\vec{B}, w_0\} - \frac{\mu}{\hbar} \vec{B} \times \vec{w} . \end{aligned} \tag{5.3}$$

Voyons tout d'abord le cas où le champ d'induction $\vec{B}$ est homogène. La solution est alors très simple, les crochets de Poisson s'annulent ; la propagation libre de la quasi-probabilité et la précession de Larmor se lisent directement. Choisissons des coordonnées telles que le champ $\vec{B}$ pointe en direction 3. On peut contrôler que toute solution de (5.3) pour un champ $\vec{B}$ constant est de forme :

$$\begin{aligned} w_0 &= f(\vec{q} - \frac{\vec{p}}{m} t, \vec{p}) \\ w_1 &= r(\vec{q} - \frac{\vec{p}}{m} t, \vec{p}) \cos\left[\phi(\vec{q} - \frac{\vec{p}}{m} t, \vec{p}) - \frac{\mu}{\hbar} B_3 t\right] \\ w_2 &= r(\vec{q} - \frac{\vec{p}}{m} t, \vec{p}) \sin\left[\phi(\vec{q} - \frac{\vec{p}}{m} t, \vec{p}) - \frac{\mu}{\hbar} B_3 t\right] \\ w_3 &= g(\vec{q} - \frac{\vec{p}}{m} t, \vec{p}) \end{aligned} \tag{5.4}$$

Les quatre fonctions arbitraires f, r, g et ϕ dépendent des 6 variables $\vec{q}$ et $\vec{p}$. Elles sont fixées par les conditions initiales.

Un faisceau non polarisé est caractérisé par son isotropie : $r = g = 0$. Dans ce cas, il se comporte comme une particule libre. Le champ homogène ne produit pas de polarisation. Si le faisceau est polarisé en direction 3, alors $r = 0$ et la polarisation reste en direction 3. Le champ magnétique n'a aucune influence. Si le faisceau est polarisé dans le plan perpendiculaire à $\vec{B}$, la polarisation tourne à la fréquence de précession $\frac{\mu B}{\hbar}$.

Considérons maintenant un champ inhomogène croissant en direction $\vec{e}_3$:

$$\vec{B} = \vec{e}_3(b + cq_3) \tag{5.5}$$

Ce n'est pas un champ d'induction physique puisque sa divergence n'est pas nulle. Mais on peut se convaincre que les effets d'une composante transversale (en direction 1 ou 2) nécessaire à rétablir la condition de divergence peuvent être rendus arbitrairement petits dans un domaine d'intérêt en choisissant b suffisamment grand. L'effet est lié à la courbure des lignes de champ. Les complications techniques d'intégration de (5.3) étant hors de proportion avec notre propos, nous utiliserons l'approximation (5.5). La solution générale de (5.3) avec la forme (5.5) de $\vec{B}$ s'obtient encore par des substitutions de variables dans les fonctions qui paramétrisent les conditions initiales. La contribution des crochets de Poisson est celle d'un champ de forces constant, et il apparaît un mouvement uniformément accéléré. On peut contrôler que la solution générale a la forme :

$$
\begin{aligned}
w_0 &= \frac{1}{2}\left[f\left(\vec{q} - \frac{\vec{p}}{m}t + \frac{\mu c}{4m}\vec{e}_2\, t^2,\ \vec{p} - \frac{\mu c}{2}\vec{e}_3\, t\right)\right. \\
&\qquad \left. + g\left(\vec{q} - \frac{\vec{p}}{m}t - \frac{\mu c}{4m}\vec{e}_2\, t^2,\ \vec{p} + \frac{\mu c}{2}\vec{e}_3\, t\right)\right] \\
w_3 &= \frac{1}{2}\left[f\left(\vec{q} - \frac{\vec{p}}{m}t + \frac{\mu c}{4m}\vec{e}_2\, t^2,\ \vec{p} - \frac{\mu c}{2}\vec{e}_3\, t\right)\right. \\
&\qquad \left. - g\left(\vec{q} - \frac{\vec{p}}{m}t - \frac{\mu c}{4m}\vec{e}_2\, t^2,\ \vec{p} + \frac{\mu c}{2}\vec{e}_3\, t\right)\right] \qquad (5.6) \\
w_1 &= r\left(\vec{q} - \frac{\vec{p}}{m}t,\ \vec{p}\right)\cos\left[\phi\left(\vec{q} - \frac{\vec{p}}{m}t,\ \vec{p}\right) - \frac{\mu}{\hbar}\left((b+cq_3)t - \frac{cp_3}{2m}t^2\right)\right] \\
w_2 &= r\left(\vec{q} - \frac{\vec{p}}{m}t,\ \vec{p}\right)\sin\left[\phi\left(\vec{q} - \frac{\vec{p}}{m}t,\ \vec{p}\right) - \frac{\mu}{\hbar}\left((b+cq_3)t - \frac{cp_3}{2m}t^2\right)\right]
\end{aligned}
$$

De nouveau, quatre fonctions arbitraires permettent de résoudre explicitement le problème pour n'importe quelles conditions initiales. Pour cerner la signification physique de ces fonctions, effectuons quelques traces partielles sur l'espace de spin C_2. Tout d'abord, la quasiprobabilité de présence :

$$\mathrm{Tr}_{sp}(\mathit{1}_2\, W) = 2w_0 = f + g \qquad (5.7)$$

Quelles que soient les conditions initiales, il apparaît 2 faisceaux. L'un, uniformément accéléré en direction $+\vec{e}_3$, est décrit par la fonction f. L'autre, décrit par g, est accéléré en direction $-\vec{e}_3$. L'accélération $\frac{\mu c}{2m}$ est directement proportionnelle au gradient du champ.

La quasiprobabilité de trouver le spin en direction $\pm\vec{e}_3$ est donnée par la trace partielle prise avec $1/2(1 \pm \sigma_3)$. On trouve

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}_{sp}\left((\mathit{1} \pm \sigma_3)W\right) = w_0 \pm w_3 = \begin{cases} f & \text{signe } + \\ g & \text{signe } - \end{cases} \qquad (5.8)$$

Ainsi, f est la quasiprobabilité d'avoir le spin en direction $+\vec{e}_3$ et g la quasiprobabilité d'avoir le spin en direction $-\vec{e}_3$. Ceci est parfaitement conforme à l'interprétation habituelle de l'expérience de Stern-Gerlach. Si, au moyen d'un écran, on supprime le faisceau décrit par g, il reste un état de polarisation $+\vec{e}_3$ qui est pur du point de vue spin. La partie la plus intéressante concerne la quasiprobabilité d'avoir le spin transversal au champ, par exemple en direction $\vec{e}$:

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}_{sp}(\mathit{1}_2+\sigma_2) = w_0 + w_2 = \frac{1}{2}(f+g) + r\sin\left[\phi - \frac{\mu}{\hbar}\left((b+cq_3)t - \frac{cp_3}{2m}t^2\right)\right] \qquad (5.9)$$

Cette fois, les choses paraissent paradoxales. Si f et g correspondent bien à 2 faisceaux accélérés, on lit sur (5.6) que r suit un mouvement libre ! Mais cette évolution libre de r est accompagnée d'une oscillation dont l'origine est la précession de Larmor corrigée par la variation d'intensité du champ ressenti le long de la trajectoire. Ces termes proportionnels à ct multiplient q_3 et p_3, et engendrent des oscillations sur l'espace de phase d'autant plus rapides que le champ est appliqué plus longtemps. Il faut examiner l'expression (5.9) à la lumière de la discussion du §2 ; plus spécialement c'est à (2.11) qu'il faut se référer : f et g représentent les maxima de probabilité de présence et r $\sin(\phi+\ldots)$ porte l'information de cohérence entre les deux faisceaux. Si au temps t = 0 le faisceau est polarisé transversalement, w_3 doit s'annuler et f = g. Si, plus précisément, le spin est avec certitude en direction $\vec{e}_1$ à cet instant, alors $w_0 = f = g = r$ et $\phi = 0$. La positivité des états interdit d'avoir r trop grand relativement à f et g.

Il est aussi instructif de calculer les traces partielles relativement aux coordonnées d'espace de phase. Ce calcul ne peut pas être effectué explicitement sans spécifier les fonctions arbitraires. Essayons cependant de pousser le calcul général aussi loin que possible. Pour intégrer la solution (5.6) sur l'espace de phase, effectuons le changement de variables

$$\vec{q}\,' = \vec{q} - \frac{\vec{p}}{m}\,t \qquad \vec{p}\,' = \vec{p} \qquad d^3q'd^3p' = d^3qd^3q \tag{5.10}$$

et groupons les grandeurs réelles w_1 et w_2 dans l'expression complexe

$$w_+ = w_1 + i\,w_2 \quad C \tag{5.11}$$

Il vient

$$w_0 = \frac{1}{2}\Big[f(\vec{q}\,' + \frac{\mu c}{4m}\vec{e}_3\,t^2,\ \vec{p}\,' - \frac{\mu c}{2}\vec{e}_3\,t) + g(\vec{q}\,' - \frac{\mu c}{4m}\vec{e}_3\,t^2,$$
$$\vec{p} + \frac{\mu c}{2}\vec{e}_3\,t)\Big]$$

$$w_3 = \frac{1}{2}\Big[f(\vec{q}\,' + \frac{\mu c}{4m}\vec{e}_3\,t^2,\ \vec{p}\,' - \frac{\mu c}{2}\vec{e}_3\,t) - g(\vec{q}\,' - \frac{\mu c}{4m}\vec{e}_3\,t^2,$$
$$\vec{p}\,' + \frac{\mu c}{2}\vec{e}_3\,t)\Big]$$

$$w_+ = r(\vec{q}\,',\vec{p}\,')\exp(-i\phi(\vec{q}\,',\vec{p}\,') - \frac{\mu b}{h}\,t)\exp - \frac{i\mu ct}{h}\Big[q_3' + \frac{p_3'}{2m}\,t\Big] \tag{5.12}$$

Les traces de w_0 et w_3 sont indépendantes du temps :

$$\mathrm{Tr}(w_0) = \frac{1}{2}\,(\mathrm{Tr}\,f + \mathrm{Tr}\,g)$$
$$\mathrm{Tr}(w_3) = \frac{1}{2}\,(\mathrm{Tr}\,f - \mathrm{Tr}\,g) \tag{5.13}$$

En revanche, la trace de w_+ est "hachée" par l'exponentielle en q_3' et p_3'. On retrouve la précession de Larmor

$$\mathrm{Tr}\,w_+(t) = e^{-i\frac{\mu b}{h}t}\,\mathrm{Tr}(w_+(0)e^{-\frac{i\mu ct}{h}(q_3' + \frac{p_3'}{2m}t)}) \tag{5.14}$$

Pour les grands temps, le module de ce nombre complexe tend vers zéro au moins comme $1/t^2$ [8]. Pour un état $w_1(0)$ gaussien, la décroissance est exponentielle de forme $e^{-\alpha t^4}$. Ainsi, asymptotiquement, la matrice de spin tend vers une forme diagonale.

6 Conclusion

Nous pensons avoir pu répondre oui à la première question : l'approximation WKB est, en réalité, un calcul exact au sein du séparateur.

Nous pensons que la deuxième question peut être éludée. Une mesure sans champ magnétique permet de contrôler la diffraction à l'entrée de l'appareil.

A la sortie de l'appareil, entre la région où règne le champ et celle des détecteurs, la particule obéit à un mouvement libre, mais les champs de fuite n'ont pas une dépendance spatiale linéaire. Il y a des effets de diffraction que nous croyons petits.

Malgré de grands efforts, nous ne sommes pas parvenus à répondre définitivement à la troisième question, celle de l'écran de détection. Le formalisme suggère des possibilités intéressantes mais le fait que la quasi-probabilité n'est pas toujours positive laisse la place à des "probabilités" négatives de détection dans des circonstances particulières. Cette difficulté est connue en théorie de la diffusion. Pour calculer une section efficace par la mécanique quantique, il faut placer le détecteur à l'infini ([6]). Nous pensons qu'il faut reprendre des idées de ce genre ou modifier les fondements de la mécanique quantique comme le propose C. Piron ([7]) pour répondre à cette question.

RÉFÉRENCES

([1]) E.P. Wigner, Phys. Rev. 40 (1932), 749
H.J. Groenewold, Physica 12 (1946), 405
J.E. Moyal, Proc. Cambridge Phil. Soc. 45 (1949), 99

([2]) B. Leaf, Jour. Math. Phys. 9 (1968), 65
P. Huguenin, Zeit. S. Naturforschung 28a (1973), 1090

([3]) J.P. Amiet, P. Huguenin, Mécaniques classique et quantique sur l'espace de phase, (Preprint Univ. de Neuchâtel 1979)
A. Grossmann, Comm. Math. Phys. 48 (1976), 191
A. Grossmann, P. Huguenin, Helv. Phys. Acta 51 (1978), 252

([4]) I. Daubechies, Jour. Math. Phys. 21 (1980), 1377
P. Huguenin, Letters in Mathematical Physics 2 (1978), 321

([5]) C. Piron, Foundations of Quantum Physics (Benjamin, 1976)

([6]) J.D. Dollard, Comm. Math. Phys. 12 193 (1969)
J.M. Jauch, R. Lavine, R.G. Newton, Helv. Phys. Acta 45 (1972), 325

([7]) C. Piron, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, t. 286 (24 Avril 1978), série A-713.

([8]) A.B. Migdal, Qualitative Methods in Quantum Theory (W.A. Benjamin, Inc. Reading, 1977), p. 22.