Annales de la Fondation Louis de Broglie
Vol. 6, n° 3, 1981

LA MESURE INDIRECTE ET LA MESURE DOUBLE EN MÉCANIQUE QUANTIQUE*

par Francis FER
Ecole des Mines de Paris,
60, Bld St-Michel
75006 PARIS

Pour la première partie, voir vol. 6, n° 2, 1981, p. 87-126.

La numérotation des paragraphes, des formules et des références bibliographiques de la deuxième partie fait exactement suite à la première.

6.- THEORIE DE LA MESURE ASSERVIE ET DE LA MESURE INDIRECTE

Sur la base axiomatique ainsi définie, nous pouvons maintenant édifier une théorie irréprochable des mesures asservie et indirecte.

Reprenons les opérateurs de mesure A_1 et A_2 définis par (13). Je rappelle que nous considérons des mesures de a_1 et a_2 immédiatement consécutives (§4B), que nous avons convenu (§3C) de noter par λ_{1j} et $\lambda_{2j'}$ les valeurs propres de A_1 et A_2 que la mesure met en bijection, et qu'enfin nous sommes ici dans le cas particulier d'une théorie probabiliste où la vérification par expérience individuelle est accessible.

A.- Condition nécessaire et suffisante d'asservissement des mesures

Le résultat de base est le suivant.

Plaçons-nous dans le cas où le système global $C = C_1 \cup C_2$ est représenté juste avant la mesure, par un vecteur d'état bien déterminé ψ. Alors la condition nécessaire et suffisante pour que les mesures consécutives de a_1 et de a_2 soient asservies est que ψ satisfasse à la relation

$$(16) \qquad (\sum_j E_{1j} \otimes E_{2j'})\psi = \psi$$

ou, si on préfère, que ψ n'ait de composantes non nulles que dans les variétés $(E_{1j} \otimes E_{2j'})\mathcal{H}$.

Dém .- La condition est nécessaire. Supposons en effet que la mesure de a_1 ait donné la valeur λ_{1j} ; en vertu de l'axiome P,α, c'est donc que $\|\tilde{E}_{1j}\psi\| \neq 0$; par suite l'axiome R' nous donne, pour le vecteur d'état de C après la mesure, $\psi' = \tilde{E}_{1j}\psi/\|\tilde{E}_{1j}\psi\|$. Pour que la mesure de a_2 fournisse en toute certitude le résultat $\lambda_{2j'}$, il faut et il suffit, d'après l'axiome P,α, que ψ' soit dans la variété propre $\tilde{E}_{2j'}\mathcal{H}$, ou encore que $\tilde{E}_{2j'}\psi' = \psi'$, donc que

$$\tilde{E}_{2j'}\, \tilde{E}_{1j}\, \psi = \tilde{E}_{1j}\, \psi$$

En transformant le premier membre par (7) cette équation devient

$$E_{1j} \otimes E_{2j'}\, \psi = \tilde{E}_{1j}\, \psi$$

Faisons la somme de toutes ces égalités par rapport à j. Comme on a $\sum_j \tilde{E}_{1j} = I$, identité dans $\mathcal{H}$, le second membre donne ψ. Quant au premier membre, si les j forment une suite finie, il donne de plano le premier membre de (16) ; si les j forment une suite infinie, il suffit de remarquer que, les différents projecteurs $E_{1j} \otimes E_{2j'}$ étant orthogonaux, leur somme forme une suite croissante de projecteurs, donc est convergente, et le premier membre de (16) est encore bien défini. La condition (16) est donc bien nécessaire.

Montrons maintenant qu'elle est suffisante. Faisons une mesure de a_1 et soit λ_{1k} la valeur obtenue ; on a donc $\|\tilde{E}_{1k}\psi\| \neq 0$. En vertu de l'axiome R' le nouveau vecteur d'état est, à la normalisation près

$$\tilde{E}_{1k}\,\psi = E_{1k} \otimes I_2\, \psi = (E_{1k} \otimes I_2)(\sum_j E_{1j} \otimes E_{2j'})\psi$$

On a le droit de faire passer le signe $\sum_j$ en tête du dernier membre (suite croissante de projecteurs, donc convergence), de sorte qu'il vient

$$\tilde{E}_{1k}\,\psi = (\sum_j (E_{1k} \otimes I_2)(E_{1j} \otimes E_{2j'}))\psi$$

soit, en appliquant l'égalité (6) et en tenant compte que $E_{1j}\, E_{1k} = \delta_{jk}\, E_{1k}$

$$\tilde{E}_{1k}\,\psi = E_{1k} \otimes E_{2k'}\, \psi$$

Normalisons maintenant le premier membre pour obtenir ψ' ; on a

$$(17)\quad \psi' = \tilde{E}_{1k}\,\psi/\|\tilde{E}_{1k}\,\psi\| = E_{1k}\otimes E_{2k'}\,\psi/\|\tilde{E}_{1k}\,\psi\|$$

Faisons alors sur ψ' une mesure de a_2. La probabilité d'obtenir la valeur $\lambda_{2\ell}$ est $\|\tilde{E}_{2\ell}\,\psi'\|^2$. Mais on a, en vertu de (6) et de (17)

$$\tilde{E}_{2\ell}\,\psi' = (I_1\otimes E_{2\ell})(E_{1k}\otimes E_{2k'})\psi/\|\tilde{E}_{1k}\,\psi\|$$

$$= (E_{1k}\otimes E_{2\ell}\,E_{2k'})\psi/\|\tilde{E}_{1k}\,\psi\|$$

Or $E_{2\ell}\,E_{2k'} = 0$ si $\ell \neq k'$: la mesure de a_2 ne peut donc pas fournir d'autre valeur propre que $\lambda_{2k'}$, et elle fournit celle-ci en toute certitude puisqu'on a

$$\|\tilde{E}_{2k'}\,\psi'\| = \|E_{1k}\otimes E_{2k'}\,\psi\|/\|\tilde{E}_{1k}\,\psi\|$$

quantité égale à 1 d'après (17). C.Q.F.D.

Corollaire

Plaçons-nous maintenant dans le cas où le système C est représenté, avant les mesures, par un opérateur statistique $S = \sum_m p_m P_{\psi m}$ $(p_m > 0,\ \sum_m p_m = 1)$. *Alors la condition nécessaire et suffisante pour que les mesures de* a_1 *et* a_2 *soient asservies est que tous les vecteurs* ψ_m *vérifient la relation (16).*

Il en est encore de même si C est représenté par une variété fermée $\mathcal{H}$ *dans laquelle le vecteur d'état* ψ *est inconnu : la condition nécessaire et suffisante d'asservissement est que tous les vecteurs de* $\mathcal{H}$ *vérifient (16).*

Ces deux énoncés tombent sous le sens.

Il est facile de les traduire en écriture symbolique. On sait en effet que, si E est un projecteur quelconque et ψ un vecteur vérifiant $E\psi = \psi$, cette égalité est équivalente à $E\,P_\psi = P_\psi$. Il résulte alors de la forme de S que l'énoncé relatif à un opérateur statistique est équivalent à

$$(16\text{bis})\qquad \left(\sum_j E_{1j}\otimes E_{2j'}\right)S = S$$

De même, si on désigne par P le projecteur sur la variété $\mathcal{H}$, comme P est de la forme $P = \sum_n P_{\psi_n}$ où les ψ_n sont une base de $\mathcal{H}$, on a

$$(16\text{ter})\qquad \left(\sum_j E_{1j}\otimes E_{2j'}\right)P = P$$

En fait, dans les applications et comme on va le voir sur les exemples qui suivent, il sera en général plus aisé de se servir de la forme originelle du corollaire que de ces égalités.

B.- Exemples

Avant de dégager des conclusions physiques générales de ce formalisme, il est souhaitable de l'éclairer par quelques exemples.

a.- Mesures de deux impulsions asservies par addition

Considérons l'expérience de Compton-Simon ([12]) : diffusion d'un photon X par un électron. On connaît expérimentalement les conditions initiales : énergie et direction d'impulsion, du photon incident ; pour l'électron on estime qu'il est libre et pratiquement au repos.

Après la collision on peut mesurer dans une chambre de Wilson la direction d'impulsion de l'électron de recul ainsi que celle du photon diffusé. La théorie de la collision, qu'elle soit classique ou quantique, prévoit entre autres choses l'existence d'une relation entre ces deux directions émergentes. Les mesures correspondantes sont donc asservies, et on peut se proposer de vérifier si cet asservissement entre dans le cadre général qui vient d'être tracé.

Le calcul effectué à partir des données initiales rappelée ci-dessus est faisable et montre qu'il en est bien ainsi. Il est malheureusement assez long ; aussi vais-je l'abréger en convertissant les données initiales du photon : énergie et direction d'impulsion en les trois composantes de celle-ci (ce qui nécessite un bref passage par la Mécanique classique, mais dont, je le répète, on pourrait se passer) ; pour l'électron il n'y a évidemment rien à changer. On connaît donc les trois composantes de l'impulsion totale initiale des systèmes photon + électron.

Prenons pour les grandeurs a_1 et a_2 de la théorie générale les composantes respectives, sur Ox par exemple, des impulsions du photon et de l'électron, et soient A_1 et A_2 les opérateurs correspondants. On prend ces opérateurs sous la forme (13) c'est-à-dire qu'on a rendu leurs spectres ponctuels pour la raison et suivant le procédé exposés au paragraphe 3B ; on a en outre pu s'arranger pour que les valeurs propres λ_{1j} et λ_{2k} soient toutes multiples d'un même facteur (à savoir le double de l'erreur maximale qui affecte les mesures des deux composantes). Les extensions $\tilde{A}_1$ et $\tilde{A}_2$ de A_1 et A_2 sont (§3A) de la forme

$$\tilde{A}_1 = \sum_j \lambda_{1j}\, E_{1j} \otimes I_2, \quad \tilde{A}_2 = \sum_k \lambda_{2k}\, I_1 \otimes E_{2k}$$

Comme $\tilde{A}_1$ et $\tilde{A}_2$ commutent, leur somme représente l'opérateur composante sur Ox de l'impulsion totale ; et comme on a $I_1 = \sum_j E_{1j}$, $I_2 = \sum_k E_{2k}$, on voit que l'on peut écrire

$$\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 = \sum_{jk} (\lambda_{1j} + \lambda_{2k})\, E_{1j} \otimes E_{2k}$$

les sommations en j et k étant indépendantes. Mettons en correspondance les indices j et k pour lesquels $\lambda_{1j} + \lambda_{2k}$ a une même valeur μ_α ; cette correspondance est une bijection que nous noterons en écrivant $j'(\alpha)$ l'indice k qui correspond à j pour α donné. La décomposition spectrale de $\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2$ peut alors s'écrire

$$\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 = \sum_\alpha \mu_\alpha \Big(\sum_j E_{1j} \otimes E_{2j'(\alpha)}\Big) \tag{18}$$

Dans l'état initial du système on connaît séparément les composantes des deux impulsions, soit $a_1 = \lambda_{1j_0}$ et $a_2 = \lambda_{2k_0}$, et par suite leur somme, que nous désignerons par μ_0. Après la collision chacune des deux composantes a varié et sa valeur finale est déterminée en probabilité. La théorie complète de la collision permettrait de calculer ces probabilités, mais cela n'est pas nécessaire pour notre objet : il nous suffit de savoir que l'impulsion totale est conservée* (plus exactement que sa valeur reste dans le même intervalle qu'initialement, ce qui nous permet de la prendre égale à μ_0 en vertu du procédé de discrétisation des spectres). On sait donc qu'après la collision la probabilité que l'on ait $a_1 + a_2 = \mu_0$ est égale à 1 ; en vertu de l'axiome P,α

*sous réserve, tout comme en Mécanique classique, que les forces s'exerçant entre les deux particules soient centrales.

le vecteur d'état ψ est dans la variété propre correspondante de la décomposition spectrale (18), c'est-à-dire que l'on a

$$(\sum_j E_{1j} \otimes E_{2j'(0)})\psi = \psi$$

C'est exactement la condition (16) d'asservissement des mesures de a_1 et a_2.

Il apparaît clairement dans cet exemple qu'il n'est rien d'autre qu'un cas particulier de *probabilités liées, au sens habituel que la théorie générale des probabilités donne à ce terme.*

Voyons maintenant pourquoi l'indétermination qui affecte le vecteur d'état ψ_0, dont j'ai évoqué à la fin du paragraphe 2 les effets éventuellement nocifs, ne tire pas à conséquence dans le cas où nous sommes de mesure asservie. Vérifions tout d'abord que cette indétermination existe bien :la connaissance des valeurs λ_{1j_0} et λ_{2k_0} des impulsions initiales soumet les vecteurs d'état ψ_{10} et ψ_{20} de chaque particule aux seules conditions (§5A) E_{1j_0} $\psi_{10} = \psi_{10}$ et E_{2k_0} $\psi_{20} = \psi_{20}$; d'où une indétermination pour ces vecteurs individuels et pour le vecteur global $\psi_0 = \psi_{10} \otimes \psi_{20}$. Par le jeu de l'équation d'évolution, cette indétermination se répercute sur le vecteur d'état ψ au moment de la mesure.

Supposons que l'expérimentateur se pose cette question : me donnant *a priori* un intervalle (λ',λ'') de valeurs de a_1, que puis-je conclure si le résultat de la mesure tombe dans cet intervalle ? La réponse serait : le vecteur d'état ψ' après cette mesure est $\psi' = E_{1\lambda'}^{\lambda''}\,\psi$, donc serait indéterminé dans au moins une partie de la

variété $\tilde{E}_{1\lambda'}^{\lambda''}\,\mathcal{H}$, ce qui entraînerait une incertitude sur les probabilités des valeurs de a_2. On ne pourrait donc pas conclure à un asservissement des mesures.

Mais, dans le processus réel de l'expérimentation, on inverse les enchaînements. L'expérimentateur constate une valeur de a_1, qu'il localise dans un des intervalles prévus dans la discrétisation du spectre de A_1, caractérisé par une valeur propre $\lambda_{1\ell}$; la variété correspondante $\tilde{E}_{1\ell}\,\mathcal{H}$ est donc bien déterminée, mais *a posteriori*, et il suffit alors d'appliquer la théorie de la mesure asservie pour prédire en toute certitude la valeur de a_2. *L'indétermination qui pesait sur ψ_0 n'a donc joué aucun rôle.*

b.- <u>Système de deux particules de spin total nul</u>

Considérons un système C formé de deux particules C_1 et C_2 de spin 1/2, dont on sait qu'à l'émission le spin total dans une direction donnée, Oz par exemple (il est plus simple de raisonner sur ce cas que d'aborder directement celui de l'état singulet), est nul. Je fais remarquer en passant que, contrairement à l'exemple précédent où l'information initiale était fournie par une mesure préparatoire, ici c'est par voie théorique qu'on a cette information.

Raisonnons d'abord suivant la méthode consacrée, qui consiste à faire abstraction des variables de configuration. Désignons par σ_{1z} l'opérateur de spin de la particule C_1 dans l'espace vectoriel ε_1 de sa variable de spin, par ε_{1+} et ε_{1-} ses vecteurs propres ; nous prenons des notations homologues pour C_2 ; notons enfin par J_1 et J_2 les opérateurs identité dans ε_1 et ε_2. On sait que la condition pour que le spin total $\sigma_{1z} \otimes J_2 + J_1 \otimes \sigma_{2z}$

soit nul est que le vecteur d'état s dans l'espace $\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_2$ soit de la forme

$$s = k_1\, \varepsilon_{1+} \otimes \varepsilon_{2-} + k_2\, \varepsilon_{1-} \otimes \varepsilon_{2+}$$

où les constantes k_1 et k_2 sont astreintes à la seule condition $|k_1|^2 + |k_2|^2 = 1$.

Or on voit immédiatement, si on désigne par $P_{\varepsilon_{1+}}$ le projecteur sur ε_{1+} dans l'espace ε_1, etc., que l'égalité précédente est équivalente à

$$(19) \qquad (P_{\varepsilon_{1+}} \otimes P_{\varepsilon_{2-}} + P_{\varepsilon_{1-}} \otimes P_{\varepsilon_{2+}})s = s$$

Cette égalité est de la forme (16) et est donc bien caractéristique d'une mesure asservie : si on constate pour C_1 le spin $+\frac{1}{2}$, le vecteur d'état après la "mesure" est, à la normalisation près, $s' = P_{\varepsilon_{1+}} \otimes J_2\, s = P_{\varepsilon_{1+}} \otimes P_{\varepsilon_{2-}}\, s$, d'où l'on déduit que le spin de C_2 sera sûrement $-\frac{1}{2}$, et inversement.

En fait cette théorie simplifiée n'est pas adéquate à l'expérience. Dans la pratique on ne mesure pas les spins de C_1 ni de C_2 : on les déduit de mesures de position sur un écran après passage dans des aimants déflecteurs. Une théorie correcte de la mesure double des spins doit donc prendre en compte les variables de configuration, les fonctions d'onde correspondantes et l'équation d'évolution dans les champs magnétiques.

Une telle théorie est faisable. Malheureusement elle est extrêmement longue et compliquée si on la veut rigoureuse ; même en admettant les approximations adoptées par

Bohm ([13]) ou Blokhintsev ([14]), les calculs sont encore trop longs pour les reproduire ici ; en définitive toute cette question mérite une étude à part. Je me contente donc d'en énoncer les résultats, à savoir :

- en assimilant les mesures faites à la sortie des mesures d'impulsion*, on retrouve bien, projecteurs de spin et d'impulsion entremêlés, l'équation (16) de la mesure asservie ;

- l'incertitude qui pèse sur les directions d'impulsion à l'émission (dont on sait seulement qu'elles sont intérieures à des angles solides connus) n'entraîne pas d'erreur de mesure finale, pourvu que les faisceaux émergents soient bien séparés et que l'écran soit assez large pour les couper dans leur intégralité.

C.- Interprétation physique

Il n'est guère besoin d'insister sur le fait que la relation (16), qui assure l'asservissement des mesures, est en même temps celle qui légitime la mesure indirecte : dès qu'on la sait satisfaite, on sait aussi que, si une mesure de a_1 donne pour résultat la valeur λ_{1j}, une mesure de a_2 aura *certainement* pour résultat la valeur $\lambda_{2j'}$. Il est donc inutile d'effectuer cette seconde mesure sauf, bien entendu, si on cherche une confirmation expérimentale de la théorie.

Il est plus important de cerner la signification de cette relation (16).

---

*c'est d'ailleurs, à bien y regarder, ce que font implicitement toutes les explications de l'expérience de Stern et Gerlach, sous couleur d'appliquer l'approximation W.K.B.

On voit tout d'abord qu'elle exprime que, deux opérateurs de mesure étant *donnés*, il faut, pour que leurs mesures soient asservies, que le vecteur d'état du système soit *adapté* à ces opérateurs. C'est tout à fait différent, je l'ai déjà dit (§4B), du cas traité par Von Neumann, qui consiste à déterminer des opérateurs de mesure adaptés à un vecteur d'état donné ; on peut d'ailleurs s'attendre en général que, pour un vecteur d'état pris au hasard, les opérateurs en question soient sans signification physique aucune (ne serait-ce que parce qu'ils sont à spectre ponctuel simple, mais il y a manifestement d'autres raisons à cela).

Il est clair en second lieu, et les deux exemples qui précèdent ont illustré ce fait, qu'on ne peut savoir que le vecteur d'état d'un système satisfait à (16) que *sur la base d'informations antérieures à la mesure*, informations qu'on a pu acquérir, soit par voie expérimentale (exemple a), soit par voie théorique (exemple b).

Dès lors, d'un point de vue purement probabiliste, la compréhension du phénomène d'asservissement des mesures ne pose aucun problème. On sait *par avance* que, bien que les résultats d'épreuves pratiquées sur les grandeurs a_1 et a_2 soient *séparément* aléatoires, ces résultats *obéissent à une relation* de la forme $F(a_1,a_2) = 0$, relation qui est en outre bijective[x]. La mesure asservie n'est donc pas autre chose qu'un cas particulier de probabilités liées, comme il en existe tant en théorie des probabilités, et la mesure indirecte n'est pas autre chose que la conclusion obligée d'un recoupement d'informations.

Naturellement on peut ensuite se poser des ques-

[x]Il est à peine besoin de faire remarquer la symétrie de la condition d'asservissement (16) par rapport aux opérateurs A_1 et A_2.

tions sur les causes physiques de ces probabilités. C'est un autre problème, que j'ai déjà dit que je n'aborderais pas dans cette étude parce que, quel que soit son intérêt -qui est grand- il ne peut être traité avec fruit que si on dispose préalablement d'une théorie probabiliste fermement assurée, et non pas dérivée de l'application illégitime d'un axiome, R,α, dont nous avons constaté l'inefficacité.

7.- MESURES COUPLEES

Nous devons maintenant nous poser la question : que peut-on dire lorsque, les opérateurs A_1 et A_2 étant toujours supposés donnés, le vecteur d'état ψ du système C ne vérifie plus la condition (16), c'est-à-dire n'est plus adapté à la double mesure prévue ?

Pour bien marquer cette désadaptation et éviter toute confusion, je désignerai maintenant par b_2 et B_2, au lieu de a_2 et A_2, la grandeur et l'opérateur de la seconde mesure.

Comme la condition (16) est nécessaire et suffisante, le résultat de la mesure de b_2, quand on connaît celui de la mesure de a_1, n'est plus certain mais aléatoire. La vérification de toute prédiction ne peut donc plus être que *fréquentielle et implique un ensemble statistique de mesures*, faites sur le même système initial évidemment.

Le problème général maintenant posé a déjà été énoncé au paragraphe 1 et j'en rappelle les termes en utilisant les présentes notations. Premièrement : quelle est la répercussion de la mesure de a_1 sur la distribution de probabilité de b_2 ? Deuxièmement : quelle est la répercussion de la mesure de a_1 sur la représentation mathématique de C_2 ?

Le premier problème, qui seul est le problème physique, peut se résoudre directement, comme on va le voir. Mais on peut aussi en retrouver les résultats en passant par la résolution du second problème, ce qui nous amènera à parler en termes d'opérateurs statistiques, qui réservent quelques surprises eu égard aux idées reçues.

Gardant pour la décomposition spectrale de A la notation (13), désignons par

$$B_2 = \sum_k \mu_{2k} F_{2k} \tag{20}$$

celle de B_2.

Il sera intéressant d'examiner deux cas : celui de mesures immédiatement consécutives (c'est toujours a_1 qui sera la première), et celui de mesures décalées dans le temps.

A.- <u>Mesures immédiatement consécutives</u>

a.- <u>Distribution de probabilités obtenue par voie directe</u>

On a le théorème suivant.

Considérons un système C décrit par un vecteur d'état ψ ou un opérateur statistique S. Que les sous-systèmes C_1 et C_2 soient ou non en interaction au moment de la ou des mesures, les probabilités attachées à la mesure de b_2 sur C_2 sont indépendantes du fait que l'on a ou non effectué la mesure de a_1 sur C_1.

Dém .- Plaçons-nous d'abord dans le cas où C est représenté par un vecteur d'état ψ.

Supposons en premier lieu qu'on ne fasse pas de mesure de a_1 et cherchons les probabilités de la mesure de b_2. En vertu de l'axiome P,α et de la forme (20) de B_2,

la probabilité de trouver pour b_2 la valeur μ_{2k} est

$$\Pr(\mu_{2k}) = (\tilde{F}_{2k}\,\psi,\psi) = (I_1 \otimes F_{2k}\,\psi,\psi) \tag{21}$$

Envisageons maintenant l'expérience où on fait précéder la mesure de b_2 d'une mesure de a_2. La probabilité d'obtenir pour a_1 la valeur λ_{1j} est

$$\Pr(\lambda_{1j}) = (\tilde{E}_{1j}\,\psi,\psi) = \|\tilde{E}_{1j}\,\psi\|^2 \tag{22}$$

Supposant qu'on a effectivement observé cette valeur de λ_{1j}, cherchons la probabilité pour qu'une mesure immédiatement postérieure de b_2 fournisse la valeur μ_{2k}. Pour cela nous déterminons d'abord le vecteur d'état normé ψ'_j du système C après la mesure de a_2 ; en vertu de l'axiome R' c'est

$$\psi'_j = \tilde{E}_{1j}\,\psi/\|\tilde{E}_{1j}\,\psi\| \tag{23}$$

La probabilité de trouver μ_{2k} sur ψ'_j est alors, d'après l'axiome P,α

$$\Pr(\mu_{2k}\ \underline{\text{si}}\ \lambda_{1j}) = (\tilde{F}_{2k}\,\psi'_j,\psi'_j) = (\tilde{F}_{2k}\,\tilde{E}_{1j}\psi,\tilde{E}_{1j}\psi)/$$

$$\|\tilde{E}_{1j}\,\psi\|^2 = (\tilde{E}_{1j}\,\tilde{F}_{2k}\,\tilde{E}_{1j}\,\psi,\psi)/\|\tilde{E}_{1j}\,\psi\|^2$$

Mais, en transformant le triple produit de projecteurs par la relation (7), on a $\tilde{E}_{1j}\,\tilde{F}_{2k}\,\tilde{E}_{1j} = E_{1j} \otimes F_{2k}$; d'où

$$\Pr(\mu_{2k}\ \underline{\text{si}}\ \lambda_{1j}) = (E_{1j} \otimes F_{2k}\,\psi,\psi)/\|\tilde{E}_{1j}\,\psi\|^2 \tag{24}$$

Le premier membre est la probabilité conditionnelle d'observer $b_2 = \mu_{2k}$ quand on a eu $a_1 = \lambda_{1j}$; la probabilité d'observer consécutivement λ_{1j} et ψ_{2k} est donc

$$\Pr(\lambda_{1j}\ \underline{\text{et}}\ \mu_{2k}) = \Pr(\lambda_{1j}).\Pr(\mu_{2k}\ \underline{\text{si}}\ \lambda_{1j})$$

soit, d'après (22) et (24)

$$(25)\qquad \Pr(\lambda_{1j}\ \underline{\text{et}}\ \mu_{2k}) = (E_{1j} \otimes F_{2k}\psi,\psi)$$

Nous pouvons maintenant former la probabilité d'obtenir $b_2 = \mu_{2k}$ pour toutes les valeurs possibles de a_1 : c'est la somme par rapport à j des expressions précédentes, et comme $\sum_j E_{1j} = I_1$, il vient

$$(26)\qquad \sum_j \Pr(\lambda_{1j}\ \text{et}\ \mu_{2k}) = (I_1 \otimes F_{2k}\psi,\psi)$$

Le second membre n'est autre que celui de (21), et par conséquent le théorème est bien démontré pour un système C représenté par un vecteur d'état unique.

Généralisons maintenant au cas où C est représenté par un mélange de vecteurs d'état ψ_α (α=1 à ν ou $+\infty$) affectés de poids $p_\alpha > 0$ ($\sum_\alpha p_\alpha = 1$), donc d'opérateur statistique $S = \sum_\alpha p_\alpha P_{\psi_\alpha}$.

La probabilité pour qu'une mesure de b_2, sans mesure préalable de a_1, fournisse la valeur μ_{2k} est

$$(21\text{bis})\qquad \Pr(\mu_{2k}) = \sum_\alpha p_\alpha\ (\tilde{F}_{2k}\ \psi_\alpha,\psi_\alpha)$$

Considérons maintenant le cas où on procède d'abord à la mesure de a_1 ; la probabilité pour qu'on obtienne la valeur λ_{1j} sur le mélange est

$$(22\text{bis})\qquad \Pr(\lambda_{1j}) = \sum_\alpha p_\alpha(\tilde{E}_{1j}\psi_\alpha,\psi_\alpha) = \sum_\alpha p_\alpha\ \|\tilde{E}_{1j}\ \psi_\alpha\|^2$$

Supposant qu'on a obtenu cette valeur λ_{1j}, il nous faut ici commencer par chercher la probabilité pour que ce soit sur le vecteur d'état ψ_α, probabilité que nous noterons $\Pr(\lambda_{1j}|\psi_\alpha)$; c'est la probabilité des causes qui nous la donne et on a

$$(27)\qquad \Pr(\lambda_{1j}|\psi_\alpha) = \frac{p_\alpha\|\tilde{E}_{1j}\ \psi_\alpha\|^2}{\sum_\beta p_\beta\|\tilde{E}_{1j}\ \psi_\beta\|^2}$$

Dans ce cas de figure où λ_{1j} est obtenue sur le vecteur d'état ψ_α, la probabilité d'obtenir ensuite $b_2 = \mu_{2k}$ nous est donnée par l'équation (24) où on fait $\psi = \psi_\alpha$, ce qui nous donne

$$\Pr(\mu_{2k}\ \text{si}\ \lambda_{1j}|\psi_\alpha) = \frac{(E_{1j} \otimes F_{2k}\ \psi_\alpha,\psi_\alpha)}{\|\tilde{E}_{1j}\ \psi_\alpha\|^2}$$

La probabilité d'observer μ_{2k} quand on a obtenu λ_{1j} sur tous les ψ_α possibles s'obtient en multipliant cette expression par la probabilité (27) et en sommant sur tous les indices α ; on a alors

$$\Pr(\mu_{2k}\ \text{si}\ \lambda_{1j}) = \frac{\sum_\alpha p_\alpha(E_{1j} \otimes F_{2k}\ \psi_\alpha,\psi_\alpha)}{\sum_\beta p_\beta\ \|\tilde{E}_{1j}\ \psi_\beta\|^2}$$

En multipliant membre à membre par (22 bis), on obtient

$$\Pr(\lambda_{1j}\ \text{et}\ \mu_{2k}) = \sum_\alpha p_\alpha(E_{1j} \otimes F_{2k}\psi_\alpha,\psi_\alpha)$$

Il suffit alors de sommer par rapport à j pour retrouver la valeur (21 bis) de $\Pr(\mu_{2k})$.C.Q.F.D.

b.- <u>Passage par les opérateurs statistiques</u>

Venons-en maintenant au deuxième problème, celui de l'influence d'une mesure faite sur C_1 sur la représentation mathématique de C_2.

Avant la mesure, que C soit représenté par un vecteur d'état ou par un mélange, les sous-systèmes C_1 et C_2 sont représentés par des opérateurs statistiques S_1 et S_2 en général effectifs ($S_1^2 \neq S$, $S_2^2 \neq S_2$). Qu'en est-il après la mesure de a_1 ? Nous nous intéressons particulièrement, bien entendu, à la représentation de C_2. On a alors le théorème suivant.

*Soit un système C représenté par un vecteur d'état ψ ou un opérateur statistique S, et dont les composants C_1 et C_2 peuvent être ou non en interaction. L'opérateur statistique S'_2 de C après** *un ensemble statistique de mesures de a_1 est identique à l'opérateur statistique S_2 de C_2 avant cette mesure.*

Ce résultat a déjà été établi par D. Fargue ([5]), mais sur la base de l'axiome R,β (§2A) de Von Neumann sur la mesure simultanée. Il le sera ici sur la base de l'axiome R' du paragraphe 5. Cette concordance n'a évidemment rien de fortuit : je montrerai plus loin que l'axiome R,β se déduit de l'axiome R'.

J'attire d'autre part l'attention sur la condition "après un ensemble statistique de mesures de a_1" qui, pour la raison exposée au début de ce paragraphe 7, est indispensable si on veut que le résultat ait une portée physique. On peut néanmoins se poser la question de savoir ce que devient la représentation de C_2 après une mesure *individuelle* de a_1 ; j'y viendrai plus loin (§c infra).

Dém.- Raisonnons d'abord sur un système C décrit par un vecteur d'état ψ.

---

*immédiatement après, bien entendu.

Donnons-nous dans $\mathcal{H}_2$ un opérateur R_2 *borné* quelconque. Considérons ensuite une mesure de a_1 qui a donné le résultat λ_{1j}, désignons par ψ'_j le vecteur d'état de C après cette mesure, et cherchons l'espérance mathématique de l'extension $\tilde{R}_2$ de R_2 sur ψ'_j. ψ'_j a la valeur (23) et par conséquent l'espérance mathématique cherchée est

$$(\tilde{R}_2\ \psi'_j, \psi'_j) = \frac{(\tilde{R}_2\ \tilde{E}_{1j}\psi, \tilde{E}_{1j}\psi)}{\|\tilde{E}_{1j}\ \psi\|^2} = \frac{(\tilde{E}_{1j}\ \tilde{R}_2\ \tilde{E}_{1j}\psi, \psi)}{\|\tilde{E}_{1j}\ \psi\|^2}$$

Un produit tel que $\tilde{R}_2\ \tilde{E}_{1j}$ se transforme par une règle identique à (7) bien que $\tilde{R}_2$ ne soit pas un projecteur (il suffit pour le voir de remplacer $\tilde{R}_2$ par sa décomposition spectrale, qui converge en norme puisque R_2 est borné) ; on a donc $\tilde{R}_2\ \tilde{E}_{1j} = E_{1j} \otimes R_2$, puis

$$\tilde{E}_{1j}(\tilde{R}_2\ \tilde{E}_{1j}) = (E_{1j} \otimes I_2)(E_{1j} \otimes R_2) = E_{1j} \otimes R_2$$

On en déduit

$$(\tilde{R}_2\ \psi'_j, \psi'_j) = \frac{(E_{1j} \otimes R_2\ \psi, \psi)}{\|\tilde{E}_{1j}\ \psi\|^2}$$

Mais en vertu de (22) $\|\tilde{E}_{1j}\ \psi\|^2$ est la probabilité d'obtention de λ_{1j} ; par conséquent l'espérance mathématique de $\tilde{R}_2$ pour toutes les valeurs possibles de a_1 est

$$\mathcal{E}(\tilde{R}_2) = \sum_j (E_{1j} \otimes R_2\ \psi, \psi)$$

soit, comme on peut faire passer $\sum_j$ dans la parenthèse en vertu de la continuité du produit scalaire et comme $\sum_j E_{1j} = I_1$

$$\mathcal{E}(\tilde{R}_2) = (I_1 \otimes R_2\, \psi, \psi) = (\tilde{R}_2 \psi, \psi)$$

Or l'espérance mathématique $\mathcal{E}(\tilde{R}_2)$ après la mesure de a_1 est, en vertu de la propriété fondamentale de S_2', égale à $\mathrm{Tr}(S_2' R_2)$; quant au troisième membre, espérance mathématique de $\tilde{R}_2$ avant la mesure de a_1, il est égal, d'après la même propriété, à $\mathrm{Tr}(S_2 R_2)$. On a donc $\mathrm{Tr}\left[(S_2'-S_2)R_2\right]=0$, et comme cette égalité doit être vraie quel que soit R_2 borné, il en résulte $S_2' - S_2 = 0$.

La généralisation au cas où le système C est représenté par un mélange, d'opérateur statistique $S = \sum_\alpha p_\alpha P_{\psi_\alpha}$, est immédiate : l'opérateur statistique S_2 de C_2 s'obtient en pondérant les opérateurs statistiques $S_{2\alpha}$ relatifs à chaque vecteur ψ_α par les poids p_α ; il en est de même pour S_2' ; et comme les poids p_α sont inchangés dans le mesure (d'après les hypothèses générales des mélanges), les égalités $S'_{2\alpha} = S_{2\alpha}$ entraînent $S_2' = S_2$.C.Q.F.D.

<u>Remarques</u>

On retrouve immédiatement, à partir de ce second théorème, l'énoncé du premier : $S_2' = S_2$ entraîne $\mathrm{Tr}(S_2' R_2) = \mathrm{Tr}(S_2 R_2)$ quel que soit l'opérateur R_2. L'intérêt supplémentaire du second énoncé est de montrer que la représentation mathématique de C_2 est insensible à toute mesure faite sur C_1 (pourvu qu'elle soit statistique), contrairement à une croyance parfois rencontrée ou diffuse.

On aura d'autre part remarqué que, contrairement à ce que j'avais fait dans le cas de la mesure asservie, je n'ai pas poussé le formalisme jusqu'au cas où le vecteur d'état initial ψ est indéterminé dans une variété infinie. La raison en est bien simple : c'est qu'on ne peut plus alors aboutir à aucun résultat théorique remarquable. Tout

au plus pourrait-on étudier l'effet qu'exerce l'incertitude du vecteur d'état initial sur les valeurs des probabilités de mesure. On retombe ici sur le problème général que j'ai signalé en fin du paragraphe 2B, et qui mériterait sans doute d'être approfondi, mais que j'écarte pour éviter trop de longueurs. On peut néanmoins admettre, sous réserve d'inventaire, que si la mesure préparatoire de C est suffisamment "fine", l'influence de l'incertitude sur ψ sera assez petite pour permettre la vérification de la théorie avec une approximation ni meilleure ni pire que dans les autres parties de la physique. Quoi qu'il en soit, le résultat théorique mérite d'être pris en considération.

C.- <u>Représentation mathématique de C_2 après une mesure individuelle faite sur C_1</u>

Précisons d'abord le sens du mot "individuelle". Il signifie simplement qu'après *une* mesure de a_1, sans se préoccuper momentanément de vérification expérimentale et pour cause, on s'attache à définir les prévisions *théoriques* qu'on peut formuler sur C_2 au vu du résultat obtenu pour a_1. Il n'implique nullement que cette mesure soit unique, c'est-à-dire ni précédée ni suivie d'aucune autre.

Sur la base de cette définition il est facile de voir que, contrairement à ce qui se passait au paragraphe précédent, *après une mesure pratiquée sur C_1, la distribution de probabilité d'une grandeur quelconque b_2 attachée à C_2 est en général différente de ce qu'elle aurait été si la mesure sur C_1 n'avait pas eu lieu, et il en est de même de la représentation mathématique de C_2.*

Dém.- Considérons d'abord le cas où le système C est représenté par un vecteur d'état ψ. Si on ne fait pas de mesure de a_1 la probabilité du résultat μ_{2k} pour la mesure de b_2 a la valeur (21) ; si on fait une mesure de a_1

et qu'on trouve le résultat λ_{1j} la probabilité de μ_{2k} a la valeur (24). Ces deux probabilités de μ_{2k} seront égales si on a

$$(E_{1j} \otimes F_{2k}\psi,\psi) = \|E_{1j} \otimes I_2\,\psi\|^2 (I_1 \otimes F_{2k}\psi,\psi) \tag{28}$$

Il est facile de voir que cette égalité ne peut avoir lieu que pour des vecteurs ψ exceptionnels.

Désignons en effet par ψ_{jk} le vecteur $(E_{1j} \otimes F_{2k})\psi$ et par N_{jk} le carré de sa norme ; les N_{jk} sont simplement astreintes à la condition $\sum_{jk} N_{jk} = 1$. Par ailleurs l'égalité (28) s'écrit $N_{jk} = \sum_m N_{jm} . \sum_\ell N_{\ell k}$. Or il est immédiat de voir que, pour j et k fixés par exemple, on peut se donner des quantités $N_{\ell m}$ satisfaisant à la condition de norme totale et telles que cette égalité ne soit pas vérifiée ; on peut ensuite, dans chaque variété $(E_{1\ell} \otimes E_{2m})$, choisir un vecteur $\psi_{\ell m}$ de norme $N_{\ell m}$; le vecteur $\psi = \sum_{\ell m} \psi_{\ell m}$ ne satisfera pas à (28). On peut en faire autant en se fixant l'indice j et en faisant varier l'indice k. En général on aura donc $Pr(\mu_{2k}$ si $\lambda_{1j}) \neq Pr(\mu_{2k})$.

Il s'ensuit que l'opérateur statistique de C_2 après une mesure de a_1 qui a donné λ_{1j} pour résultat, que nous notons S'_{2j}, est différent de l'opérateur statistique de S_2 de C_2 avant la mesure de a_1 : si en effet on avait $S'_{2j} = S_2$, les distributions de probabilité de toute grandeur b_2 avec et sans mesure de a_1 seraient les mêmes, contrairement à ce que nous venons de voir.

Montrons maintenant qu'*en général l'opérateur statistique* S'_{2j} *est un opérateur statistique effectif, c'est-à-dire qu'il ne se réduit pas à un projecteur sur un vecteur unique de* $\mathcal{H}_2$*, de la forme* P_{u_2} $(u_2 \in \mathcal{H}_2)$.

Dém.- On sait en effet que, étant donné un vecteur $\psi(q_1,q_2)$ de $\mathcal{H}$, auquel correspond dans $\mathcal{H}_2$ un opérateur statistique S_2, la condition nécessaire et suffisante pour que S_2 soit de la forme P_{u_2} est que ψ soit de la forme $u_1(q_1) \otimes u_2(q_2)$; cela découle immédiatement des théorèmes de Von Neumann rappelés au paragraphe 4A, la décomposition diagonale (11) correspondant aux deux opérateurs statistiques $S_1 = \sum_\alpha p_\alpha P_{u_{1\alpha}}$, $S_2 = \sum_\alpha p_\alpha P_{u_{2\alpha}}$ et inversement.

On voit par suite, avec le changement de notation qui s'impose, que si l'on veut que l'opérateur S'_{2j} déduit du vecteur d'état ψ'_j après la mesure de a_1 soit un projecteur à une dimension, il faut et il suffit que ψ'_j soit de la forme

$$\psi'_j = u_{1j} \otimes u_{2j} \tag{29}$$

le vecteur u_{1j} étant en outre astreint à appartenir à la variété $E_{1j}\,\mathcal{H}_1$ puisqu'on a

$$\psi'_j = \tilde{E}_{1j}\,\psi'_j = (E_{1j} \otimes I_2)(u_{1j} \otimes u_{2j}) = E_{1j}\,u_{1j} \otimes u_{2j} \tag{30}$$

d'où il résulte, en comparant avec (29), que $E_{1j}\,u_{1j} = u_{1j}$.

Or la forme (29) ne peut se présenter que dans deux cas.

α.- A coup sûr si E_{1m} est à une dimension (dans $\mathcal{H}_1$), c'est-à-dire si λ_{1j} est valeur propre simple de A_1. Mais nous avons vu, dans la discussion du paragraphe 2B, qu'un tel cas ne se présente jamais lors des mesures, position ou impulsion, que nous pouvons réellement effectuer. Il apparaît certes chez Von Neumann (§4, A et B), mais reste alors purement théorique (§6C). On le retrouve encore pour un couple de particules à spins opposés, mais à condition de faire abstraction des variables de configuration, c'est-à-dire de faire litière des sujétions expérimentales (§3A).

β.- Ou bien E_{1j} est multi-dimensionnel, mais ψ est tel que sa projection $\tilde{E}_{1j}\ \psi$ est de la forme (29), avec $E_{1j}\ u_{1j} = u_{1j}$, ce qui n'arrivera que dans des cas particuliers de préparation du système C.

Il est clair que toutes ces conclusions ne sont que renforcées si le système C est représenté initialement, non par un vecteur d'état ψ, mais par un opérateur statistique S.

On voit donc en définitive que, *si on tient compte des réalités expérimentales, et si le système C n'a pas été préparé tout spécialement, ce n'est que par hasard qu'une mesure individuelle faite sur C_1 réduit la représentation mathématique de C_2 à un vecteur d'état ; en règle générale cette représentation sera assurée par un opérateur statistique effectif.*

Cette constatation mérite d'être soulignée parce que c'est une croyance très répandue, dérivée de la décomposition diagonale (11) de Von Neumann, qu'une mesure *individuelle* faite sur le sous-système C_1 "met le sous-système C_2 dans un cas pur", pour employer le langage consacré ; et cette assertion constitue l'argument de base (admis par toutes les parties d'ailleurs) de nombreuses controverses (cf en particulier ([9])). Nous venons de voir que c'est faux : *une mesure même individuelle faite*

sur C_1 laisse en général C_2 sous forme de mélange.

On objectera peut-être que ce résultat tient à ce que nous nous sommes appuyés sur l'axiome R'. Mais, si nous avions utilisé l'axiome R,α de Von Neumann, la conclusion eût été pire : le vecteur ψ'_j, au lieu d'être la projection, bien déterminée, de ψ dans la variété $\tilde{E}_{1j}\ \mathcal{H}$, aurait été indéterminé dans cette variété, indétermination qui se serait répercutée sur l'opérateur statistique S'_{2j}.

B.- <u>Mesures décalées dans le temps</u>

On peut s'attendre que dans ce cas les deux théorèmes du paragraphe A restent valables, sous la condition évidente que C_1 et C_2 soient sans interaction entre les deux mesures. Effectivement, de manière plus précise :

Considérons un système C décrit par un vecteur d'état ψ ou un opérateur statistique S. Si, à partir d'un instant pris pour zéro, les sous-systèmes C_1 et C_2 sont sans interaction, les probabilités attachées à la mesure de b_2 sur C_2 à un instant $t > 0$ quelconque sont indépendantes du fait que l'on a ou non effectué une mesure de a_1 à l'instant zéro.

Dém.- Elle ne diffère de celle du théorème a, §A, que par l'intervention de l'opérateur unitaire d'évolution entre zéro et t, ce qui ne va guère compliquer les choses puisque C_1 et C_2 sont découplés. Je n'en indique donc que les grandes lignes.

Comme C_1 et C_2 sont sans interaction, l'hamiltonien H_1 de C_1 n'agit pas sur les coordonnées de C_2 (qu'il existe ou non un potentiel externe) ; il est donc bien défini dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_1$ seul ; de même l'hamiltonien H_2 de C_2 est bien défini dans $\mathcal{H}_2$ seul. Les extensions $\tilde{H}_1$ et $\tilde{H}_2$ à $\mathcal{H}$ sont donc commutatives. On montre par suite sans difficulté, à partir des règles de calcul tensoriel rappelées au paragraphe 3A, que

$$\exp\left(-\frac{it}{\hbar}(\tilde{H}_1 + \tilde{H}_2)\right) = \exp\left(-\frac{it}{\hbar} H_1\right) \otimes \exp\left(-\frac{it}{\hbar} H_2\right)$$

c'est-à-dire que l'opérateur d'évolution $U(t)$ du système global C est de la forme $U_1(t) \otimes U_2(t)$, U_1 et U_2 étant les opérateurs d'évolution de C_1 et C_2 considérés isolément.

Raisonnons d'abord sur un cas pur, défini par un vecteur d'état ψ_0 à l'instant zéro avant toute mesure ; on a $\psi(t) = U(t)\psi_0$ (je supprime maintenant le symbole t dans ψ, U_1 et U_2 pour alléger les écritures).

Si on n'effectue pas de mesure de a_1 à l'instant zéro, la probabilité d'obtenir $b_2 = \mu_{2k}$ à l'instant t est

(31) $\Pr(\mu_{2k},t) = (\tilde{F}_{2k}\,\psi,\psi) = (I_1 \otimes U_2^{-1}\,F_{2k}\,U_2\,\psi_0,\psi_0)$

Si on effectue une mesure de a_1 à l'instant zéro on a d'abord

(32) $\Pr(\lambda_{1j},0) = (\tilde{E}_{1j}\,\psi_0,\psi_0)$

Immédiatement après l'obtention du résultat λ_{1j} pour a_1, le vecteur d'état de C est $\psi'_{0j} = \tilde{E}_{1j}\,\psi_0/\|\tilde{E}_{1j}\,\psi_0\|$, et il devient à l'instant t $U_1 \otimes U_2\,\psi'_{0j} = (U_1\,E_{1j} \otimes U_2)\psi_0/\|\tilde{E}_{1j}\psi_0\|^2$
On trouve alors, après quelques intermédiaires

(33) $\Pr(\mu_{2k},t$ <u>si</u> $\lambda_{1j},0) = (E_{1j} \otimes U_2^{-1}F_{2k}U_2\psi_0,\psi_0)/\|\tilde{E}_{1j}\psi_0\|^2$

D'où, en vertu de (32)

(34) $\Pr(\mu_{1j},0$ <u>et</u> $\lambda_{2k},t) = (E_{1j} \otimes U_2^{-1}F_{2k}U_2\psi_0,\psi_0)$

et par conséquent

$$\sum_j \Pr(\lambda_{1j},0 \text{ \underline{et} } \mu_{2k},t) = (I_1 \otimes U_2^{-1}\,F_{2k}\,U_2\,\psi_0,\psi_0)$$

quantité égale au dernier membre de (31).C.Q.F.D.

Le théorème b du paragraphe A se transpose encore plus rapidement.

Si, à partir d'un instant pris pour zéro, C_1 *et* C_2 *sont sans interaction, l'opérateur statistique* $S_2^1(t)$ *de* C_2 *a un instant* $t \geqslant 0$ *quelconque après un ensemble statistique de mesures de* a_1 *est le même que celui,* $S_2(t)$, *qui représenterait le système* C_2 *si ces mesures n'avaient pas eu lieu.*

Nous avons vu en effet que $S_{20}^1 = S_{20}$ à l'instant zéro. Or S_2 et S_2^1 évoluent en fonction du temps par la même loi $S_2(t) = U_2(t)S_{20}\,U_2^{-1}(t)$ et de même pour S_2^1.

Tout comme plus haut, §A,b, le passage par l'opérateur statistique de C_2 redonne évidemment les résultats probabilistes établis directement dans le théorème précédent.

<u>Remarque</u>

Il est clair qu'il faut écarter de notre analyse le cas où, après une mesure faite sur C_1, C_1 et C_2 restent en interaction : les probabilités d'une mesure sur C_2 (et aussi bien sur C_1 d'ailleurs) dépendent étroitement de la forme de l'interaction, et on ne peut plus rien conclure.

8.- <u>RETOUR SUR LES SPECTRES CONTINUS</u>

Je reviens maintenant sur la discrétisation des spectres continus dont j'ai rappelé le mécanisme au paragraphe 3B pour montrer brièvement que, malgré ses inconvénients (à vrai dire insignifiants), il n'est pas possible de s'en dispenser dans l'étude de la mesure *asservie*.

Les inconvénients sont visibles : le procédé comporte une certaine part d'arbitraire. On peut en effet, comme l'erreur de mesure qui sert à définir les intervalles $(\lambda_j,\lambda_{j+1})$ n'est jamais elle-même définie avec une précision rigoureuse, agrandir ou rétrécir plus ou moins ces intervalles, tout en conservant bien entendu leur bijection pour deux opérateurs A_1 et A_2 asservis l'un à l'autre ; on peut également, sans modifier leurs longueurs, les déplacer par translation.

On doit alors se demander s'il ne serait pas possible de supprimer cet arbitraire en faisant tendre la longueur des intervalles vers zéro et en passant à la limite. Cette issue est à écarter, il est facile de comprendre pourquoi. Revenons à la condition (16), que je transcris à nouveau pour la commodité

$$(16) \qquad (\sum_j E_{1j} \otimes E_{2j'})\psi = \psi$$

Il se produit alors le phénomène suivant : si on fait tendre vers zéro la longueur des intervalles $(\lambda_{1j},\lambda_{1,j+1})$ et $(\lambda_{2k},\lambda_{2,k+1})$, le projecteur du premier membre de (16) tend vers l'opérateur zéro exactement comme la surface des cases de la diagonale d'un dernier tend vers zéro quand la longueur du côté des cases tend vers zéro et pour la même raison. Ce phénomène repose sur la relation suivante. Si E_1 et E_2 sont deux projecteurs de $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$, et qu'on les subdivise en prenant $E_1 = E_1' + E_1''$, $E_2 = E_2' + E_2''$, on a

$$E_1 \otimes E_2 = (E_1' \otimes E_2' + E_1'' \otimes E_2'') + (E_1' \otimes E_2'' + E_1'' \otimes E_2')$$

d'où il suit, puisque les projecteurs sont des opérateurs

positifs, que $E_1' \otimes E_2' + E_1'' \otimes E_2'' \leqslant E_1 \otimes E_2$. Une opération de subdivision fait donc décroître le projecteur du premier membre de (16), et un petit raffinement de calcul, que je ne reproduis pas pour abréger, montre que cette décroissance va, à la limite, jusqu'à zéro.

Il s'ensuit que, pour des grandeurs a_1 et a_2 représentées par des opérateurs à spectre continu, il n'est pas possible de rendre compte de l'asservissement de leurs mesures autrement qu'en discrétisant leurs spectres, c'est-à-dire qu'en se pliant à la discontinuité -réelle- des nombres enregistrés par des appareils de mesure imparfaits. Cette contrainte n'a rien qui puisse choquer la physique ni le bon sens. Quant à l'arbitraire qui pèse ainsi sur la définition des projecteurs de l'équation (16), les exemples du paragraphe 6B (particulièrement l'exemple a que j'ai traité in extenso) montrent qu'il ne joue aucun rôle.

Pour la mesure couplée quelconque par contre, l'utilisation des spectres discrets à la place des spectres continus n'est qu'une commodité d'écriture, et il est facile de repasser des premiers aux seconds. Une équation telle que (25), par exemple, pourrait aussi bien s'écrire

$$Pr(\lambda' \leqslant a_1 \leqslant \lambda'' \text{ et } \mu' \leqslant a_2 \leqslant \mu'') = (E_{1\lambda'}^{\lambda''} \otimes F_{2\mu'}^{\mu''}\psi,\psi)$$

mais on voit l'allongement des écritures.

9.- DEDUCTION DE L'AXIOME P,β DES PROBABILITES DE MESURES SIMULTANEES

Montrons maintenant comment l'axiome P,β de Von Neumann sur la probabilité afférente à la mesure simultanée de deux observables compatibles se déduit de l'axiome P,α sur la mesure simple et de l'axiome R'.

Nous avons à vrai dire déjà fait cette démonstration pour des systèmes composites et des mesures immédiatement consécutives puisque l'équation (25) peut aussi bien s'écrire

$$Pr(\lambda_{1j} \text{ et } \mu_{2k}) = \left[((E_{1j} \otimes I_2).(I_1 \otimes F_{2k})\psi,\psi) = (\tilde{E}_{1j}\ \tilde{F}_{2k}\psi,\psi)\right]$$

ce qui n'est autre que l'axiome P,β pour des projecteurs $\tilde{E}_{1j}$ et $\tilde{F}_{2k}$ définis dans $\mathcal{H}$ et qui sont bien commutatifs.

Mais il est nécessaire, et d'ailleurs facile, d'étendre ce résultat au cas d'un système C quelconque, pour lequel on évite de particulariser les mesures à des grandeurs attachées à des sous-systèmes de C.

Reprenons les opérateurs de mesure (1) que nous mettons sous forme discrète pour abréger les écritures

$$A = \sum_j \lambda_j\ E_j, \quad B = \sum_k \mu_k\ F_k$$

Soit ψ le vecteur d'état de C sur lequel on mesure d'abord A. La probabilité d'obtenir le résultat λ_j est, d'après l'axiome P,α du paragraphe 2A, $\|E_j\ \psi\|^2$; supposant qu'on a obtenu ce résultat, le vecteur d'état normé après la mesure est, d'après l'axiome R', $\psi_j' = E_j\ \psi/\|E_j\ \psi\|^2$. Pour ne rien perdre en généralité, plaçons-nous dans le cas où la mesure de B est effectuée au bout d'un laps de temps τ après la mesure de A ; dans cet intervalle, ψ_j' a été transformé par un opérateur unitaire U_τ, et par suite la probabilité d'obtenir le résultat μ_{2k} est

$$Pr(\mu_k,\tau \text{ si } \lambda_j,0) = (F_k\ U_\tau\ \psi_j',U_\tau\ \psi_j') = (U_\tau^\star\ F_k\ U_\tau\ \psi_j',\psi_j')$$

$$= \frac{(U_\tau^\star\ F_k\ U_\tau\ E_j\psi,E_j\psi)}{\|E_j\ \psi\|^2}$$

La probabilité d'observer λ_j au temps zéro et μ_k au temps τ est donc

$$Pr(\lambda_j,0 \text{ et } \mu_k,\tau) = (U_\tau^\star\ F_k\ U_\tau\ E_j\psi,E_j\psi)$$

Lorsque τ tend vers zéro, U_τ et $U_\tau^\star$ tendent vers l'opérateur identité et on obtient pour probabilité des deux mesures immédiatement consécutives

$$(35) \quad Pr(\lambda_j \text{ et } \mu_k) = (F_k\ E_j\ \psi,E_j\psi) = (E_j\ F_k\ E_j\psi,\psi)$$

Mais si les observables représentées par A et B sont compatibles, A et B commutent ; il en est donc de même des projecteurs de leurs décompositions spectrales et par suite $E_j\ F_k\ E_j = E_j^2\ F_k = E_j\ F_k = F_k\ E_j$; d'où

$$(36) \quad Pr(\lambda_j \text{ et } \mu_k) = (E_j\ F_k\ \psi,\psi) = (F_k\ E_j\ \psi,\psi)$$

Nous retrouvons l'axiome P,β de la mesure double simultanée tel qu'il a été énoncé par Von Neumann (§2A).

On voit par conséquent que l'adoption de l'axiome R' au lieu de R,α entraîne deux conséquences :

- l'axiomatique se simplifie légèrement puisqu'on peut se contenter de deux axiomes relatifs chacune à une mesure simple, P,α et R' ;
- la probabilité relative à une mesure double simultanée apparaît comme la limite de la probabilité relative à deux mesures consécutives lorsque leur décalage temporel τ tend vers zéro. Cela supprime la désagréable discontinuité signalée au paragraphe 4C et satisfait aux exigences physiques de la définition de la simultanéité.

On peut observer que l'équation (35) reste toujours valable si les opérateurs A et B ne commutent pas ; mais on ne peut plus en faire découler l'équation (36).

Il n'y a évidemment pas lieu d'établir un parallèle avec le raisonnement pour l'axiome R,β : il disparaît en même temps que R,α.

10.- RACCORD AVEC LA THEORIE CLASSIQUE DES PROBABILITES

Il est maintenant naturel de se demander si les divers résultats probabilistes que nous avons obtenus à partir des axiomes de la Mécanique quantique entrent dans le cadre de la théorie *classique* des probabilités. Laissons de côté pour un instant le problème de la mesure asservie -nous le retrouverons facilement ensuite- et tenons-nous en au cas de la mesure couplée quelconque.

Les mesures de a_1 et b_2 constituent deux catégories distinctes d'épreuves pratiquées sur le système C par l'intermédiaire de ses sous-systèmes C_1 et C_2 ; les résultats de ces épreuves, ou évènements, sont les nombres que nous avons désignés par λ_{1j} et μ_{2k}. Notons par

(37) $$p_{jk} = \Pr(\lambda_{1j} \text{ et } \mu_{2k})$$

la probabilité définie soit par (25), soit par (34), suivant l'éventualité considérée : mesures immédiatement consécutives avec ou sans interaction de C_1 et C_2, mesures qui peuvent être décalées dans le temps si C_1 et C_2 sont sans interaction. Je me bornerai à raisonner sur le premier cas ; on vérifiera aisément que le second donne lieu exactement aux mêmes conclusions.

Nous avons déjà vu sur (21) et (26) que

(38) $$\Pr(\mu_{2k}) = \sum_h p_{hk}$$

et il est immédiat de constater sur (22) et (25) que

(38bis) $$\Pr(\lambda_{1j}) = \sum_\ell p_{j\ell}$$

Les probabilités p_{jk} définies par (37) satisfont donc à l'axiome des probabilités totales.

D'autre part (24) s'écrit, en usant de la définition (37) et de (38bis)

(39) $$\Pr(\mu_{2k} \text{ si } \lambda_{1j}) = \frac{p_{jk}}{\sum_\ell p_{j\ell}}$$

Les p_{jk} vérifient donc également l'axiome des probabilités composées, ce qui n'a d'ailleurs rien d'étonnant étant donné la manière dont nous avons formé (25) à partir de (24). Les conditions de positivité et de somme totale égale à 1 pour les p_{jk} étant d'autre part manifestement remplies, on voit que *les probabilités* p_{jk} *satisfont à tous les axiomes de la théorie classique des probabilités.*

Nous avons vu (§7A et 7B) que les probabilités de l'évènement μ_{2k} sont indépendantes du fait que l'on a ou non effectué la mesure de a_1 sur C_1 ; il ne faudrait pas en conclure que les évènements λ_{1j} et μ_{2k} sont stochastiquement indépendants. Si on se reporte en effet aux équations (21), (22) et (25) on constate qu'*en général* on a

(40) $$\Pr(\lambda_{1j} \text{ et } \mu_{2k}) \neq \Pr(\lambda_{1j}).\Pr(\mu_{2k})$$

La chose serait immédiatement visible dans le cas simple où les projecteurs E_{1j} et F_{2k} seraient à une dimension : avec les notations du paragraphe 3A l'inégalité précédente prendrait la forme $|c^{jk}|^2 \neq \sum_m |c^{jm}|^2.\sum_\ell |c^{\ell k}|^2$; on s'aperçoit sans difficulté que l'égalité ne peut être atteinte que si ψ est de la forme $\psi_1 \otimes \psi_2$. Dans le cas réel où les projecteurs E_{1j} et F_{2k} sont de dimensions quelconques, il est immédiat de construire des vecteurs ψ qui entraînent l'inégalité (40). Donc, *en général, les évènements* λ_{1j} *et* μ_{2k} *sont stochastiquement dépendants.*

Faisons maintenant une dernière constatation, sur l'équation (39). Son premier membre a été calculé d'après les règles de la Mécanique quantique en faisant intervenir, entre les deux mesures, l'axiome de la réduction d'état R'. Considéré du point de vue de la théorie classique des probabilités, le second membre de (39) exprime que la probabilité de l'évènement "obtention du résultat μ_{2k} sachant que le premier évènement est λ_{1j}" résulte de la sélection, parmi l'ensemble de toutes les épreuves, de celles dont le résultat de la première épreuve est λ_{1j}. *La réduction d'état de la Mécanique quantique a donc pour homologue, dans la théorie classique des probabilités, la sélection par l'observateur d'un sous-ensemble convenable d'évènements*[x]. Ce parallélisme se poursuit jusque dans la comparaison des probabilités du deuxième évènement : la corrélation entre les équations (21) et (24) a pour homologue la corrélation entre les équations (38) et (39).

Nous pouvons voir à présent comment la mesure asservie n'est qu'un cas particulier de ce formalisme général. Ce cas advient lorsque les probabilités p_{jk} ont une forme diagonale, p_{jk} n'étant différent de zéro que si k a une valeur j' en bijection bien déterminée avec j ; l'équation

[x]Cette propriété a déjà été soulignée par D. Fargue ([5])

(39) donne alors

$$\Pr(\mu_{2j'}, \text{ si } \lambda_{1j}) = \frac{p_{jj'}}{\sum_{\ell} p_{j\ell}} = 1$$

Nous avons affaire, comme je l'ai déjà fait observer au paragraphe 6B, à un cas de probabilités liées.

11.- DEUX REMARQUES SUR LE CARACTERE INFORMATIONNEL DE LA MESURE

J'ai dit en commençant que mon objectif était d'établir une théorie cohérente de la mesure indirecte et de la mesure double en Mécanique quantique, en me cantonnant à une stricte position probabiliste, puisque c'est de celle-ci que se réclame la Mécanique quantique. Ce résultat étant obtenu, il reste peu de chose à y ajouter, sinon deux remarques pour achever d'en préciser la portée, disons plutôt pour la limiter.

La première est que la mesure en Mécanique quantique apparaît *comme une information qui permet, si besoin est, de remanier les probabilités des prévisions ultérieures.*

On sait en effet que tel est le rôle que joue l'observation en théorie classique des probabilités. Or nous venons de constater l'identité de cette dernière, dans le domaine des catégories liées d'épreuves, avec la théorie quantique de la mesure couplée, identité particulièrement frappante lors de la sélection d'une sous-catégorie d'épreuves. La conclusion s'ensuit d'elle-même, tout au moins en ce qui concerne la mesure double sur un système composite.

Mais il apparaît immédiatement que cette conclusion s'étend à la mesure simple, puisque la réduction d'état qui la suit n'est, sur le plan probabiliste qu'un procédé mathématique de remaniement des probabilités.

Le caractère informationnel de la mesure est donc universellement valable en Mécanique quantique.

Il est clair, et ce sera une seconde remarque, que cette conclusion dissocie les propriétés statistiques des processus physiques sous-jacents qu'on ne peut pas, en Physique, ne pas évoquer. On est donc amené à se demander si cette dissociation n'est qu'une apparence provenant d'une analyse insuffisante ou si elle est au contraire une caractéristique irrémédiable.

Nous avons vu qu'une mesure quelconque faite sur C_1 ne modifie en rien la distribution de probabilité des résultats de n'importe quelle mesure faite ensuite sur C_2. En théorie classique des probabilités, dirigée de par son histoire et ses habitudes vers le monde macroscopique, il est tacitement admis que cette propriété provient de ce que l'observation ne perturbe pas l'état macroscopique du système observé. Il est alors tentant de partir de cette explication, soit pour la prolonger en Microphysique, soit pour lui opposer au contraire le comportement radicalement différent des systèmes quantiques.

Sans même avoir besoin de disputer sur le sens du mot "perturber" en ce qui concerne les microsystèmes, il est facile de voir qu'un tel examen est complètement inutile parce que, même à l'échelle macroscopique, il n'est pas du tout nécessaire que l'observation ne perturbe pas un système pour que les probabilités, elles, soient inchangées. L'exemple suivant va le montrer.

Considérons un très grand ensemble de jetons dont nous savons distinguer les deux faces ; nous appelons une des faces C_1, l'autre C_2, le jeton étant désigné par C.

Sur chaque jeton sont inscrits deux nombres, λ_{1j} (j=1 à m) sur C_1 et μ_{2k} (k=1 à n) sur C_2. Les jetons marqués λ_{1j}, μ_{2k} sont en proportion p_{jk}, et on peut s'arranger pour que les p_{jk} ne soient pas de la forme $p_j\, q_k$. Si on met ces jetons dans un sac et qu'on en tire un au hasard, on a la probabilité p_{jk} d'observer le couple λ_{1j}, μ_{2k} (après chaque tirage on remet le jeton dans le sac, bien entendu).

Les évènements observés sur C_1 et sur C_2 sont stochastiquement dépendants et, dans le cas ordinaire auquel on pense instinctivement et où l'observation d'une face ne perturbe pas l'état du jeton, elle ne modifie pas davantage les probabilités du résultat d'observation de l'autre face. On a ainsi une première explication simple de ce double phénomène que nous avons constaté plus haut : dépendance stochastique et indifférence des probabilités d'un des éléments du couple vis-à-vis de l'observation de l'autre élément.

Mais cette explication n'est pas la seule possible. Imaginons en effet que l'observation de la face C_1 modifie le nombre inscrit sur C_2 (par exemple si le jeton est transparent et que la lumière nécessaire à la lecture de C_1 change μ_{2k} en $\mu_{2\ell}$)*. Les probabilités des évènements attachés à la face C_2 peuvent être modifiées, mais ce n'est pas forcé. Supposons en effet que, pour chaque indice j, le changement de μ_{2k} en $\mu_{2\ell}$ se fasse suivant un processus aléa-

*On aura un exemple beaucoup plus *up-to-date* -et pratiquement réalisable- en remplaçant les jetons par des morceaux de bande magnétique et l'observation visuelle par une lecture magnétique.

toire avec une probabilité de transition $P_{\ell}^{k}(j)$ pouvant dépendre de j. La probabilité d'observer les évènements λ_{1j} puis $\mu_{2\ell}$ est alors

$$p'_{j\ell} = \sum_{k} P_{\ell}^{k}(j) p_{jk}$$

Or il est possible de choisir les $P_{\ell}^{k}(j)$, et ceci d'une infinité de manières, de façon que l'on ait, pour chaque indice j, $\sum_{k} P_{\ell}^{k}(j) p_{jk} = p_{j\ell}$ quel que soit ℓ, donc $p'_{j\ell} = p_{j\ell}$: malgré la perturbation d'état macroscopique, les distributions de probabilité sont inchangées.

Ce simple exemple suffit à montrer que, de la stabilité des propriétés *statistiques* vis-à-vis de l'observation, on ne peut tirer aucune conclusion *physique*, ni dans un sens, ni dans un autre.

RÉFÉRENCES

(12) A. Compton et Simon, Phys. Rev., 26, 289, 1925

(13) D. Bohm, Quantum mechanics, Constable, Londres, 1954

(14) D.J. Blokhintsev, Mécanique quantique, Masson, Paris, 1967.

(le début des références bibliographiques était publié avec la première partie de l'article).