Annales de la Fondation Louis de Broglie,
Vol. 6, n° 4, 1981

Les deux articles suivants de Nicolai SAMSONENKO résument une conférence présentée devant le Séminaire de la Fondation Louis de Broglie, le 26 Octobre 1981.

LES ÉQUATIONS DU PREMIER ORDRE LES PLUS SIMPLES POUR DES PARTICULES DE SPIN "0"

par Nicolai SAMSONENKO*
Equipe de Recherche Associée au C.N.R.S. N°533
Laboratoire de Physique Théorique
Institut Henri Poincaré
11, rue P. et M. Curie, 75231 PARIS Cedex 05

Résumé : Dans le formalisme de Petiau-Duffin-Kemmer deux simples équations différentielles du premier ordre, pour une fonction ϕ à une composante et pour une fonction Φ^μ à quatre composantes sont discutées. Ces équations décrivent une particule de spin "0".

* Adresse permanente : URSS, Moscou, Rue Ordjonikidze, 3
Universite Lumumba, Chaire de Physique Théorique

Le but de cette note est d'attirer l'attention aux possibilités les plus simples, qui n'étaient pas encore utilisées jusqu'à présent dans la description des particules scalaires par des équations du type Petiau-Duffin-Kemmer([1-3]). Plus précisément nous considérons deux équations du premier ordre pour des fonctions d'onde ϕ à une composante $(n = 1)$ et ϕ^μ à quatre composantes $(n = 4)$. Ces deux cas peuvent présenter un intérêt pratique comme base d'une quantification ultérieure.

Cas n = 1

Dans ce cas l'équation la plus simple du premier ordre pour la fonction scalaire ϕ à une composante est la suivante$^{\mathrm{x}}$ (voir, par exemple ([7]))

$$\left(U^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - im\right)\phi = 0, \qquad \mu = 0,1,2,3. \tag{1}$$

A la place des matrices β^μ de PDK on a ici le 4-vecteur-vitesse U^μ. Comme résultat de l'itération de l'équation (1), on obtient l'équation du second ordre

$$\left(U^\mu\, U^\nu \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + m^2\right)\phi = 0 \tag{2}$$

Cas n = 4

La représentation des matrices du rang 4 peut être réalisée à l'aide des trois matrices $\beta^i (i=1,2,3)$ de PDK.

$^{\mathrm{x}}$Nous utilisons le tenseur métrique suivant :

$g_{00} = 1,\ g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1\ ;\ \Box = \partial_0^2 - \vec{\nabla}^2.$

Donc, avec la matrice unitaire I, on a le nombre nécessaire de matrices pour la formation de l'équation à masse nulle$^{\mathrm{x}}$:

$$\beta^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\begin{pmatrix}\phi_0\\ \vec{\phi}\end{pmatrix} = 0, \qquad \mu = 0,1,2,3 \tag{3}$$

Mais, pour l'introduction d'une masse non nulle, il manque encore une matrice. A cause de cela nous allons introduire le terme représentant la masse d'une autre façon.

Définissons une matrice $\beta^4 = \frac{1}{2}\left(\sum_i (\beta^i)^2 - I\right)$ avec un seul élément différent de zéro, qui se trouve sur la diagonale principale.

Introduisons aussi la fonction aléatoire scalaire $\phi(\vec{x},t)$. La signification physique de cette fonction sera éclaircie plus loin.

L'équation (3) généralisée au cas d'une masse non nulle prend la forme

$$\beta^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\begin{pmatrix}\phi^0\\ \vec{\phi}\end{pmatrix} = im\beta^4\begin{pmatrix}\phi\\0\\0\\0\end{pmatrix}. \tag{4}$$

On peut choisir les matrices explicitement :

$$\beta_0 = I,\ \beta^1 = \begin{pmatrix}0100\\1000\\0000\\0000\end{pmatrix},\ \beta^2 = \begin{pmatrix}0010\\0000\\1000\\0000\end{pmatrix},\ \beta^3 = \begin{pmatrix}0001\\0000\\0000\\1000\end{pmatrix},\ \beta^4 = \begin{pmatrix}1000\\0000\\0000\\0000\end{pmatrix}. \tag{5}$$

On vérifie facilement, que trois matrices β^i de PDK et la quatrième matrice introduite β^4 possèdent les relations de commutation suivantes$^{\mathrm{xx}}$

---

x Cette équation sous la forme 3-dimensionnelle était déjà obtenue par nous dans ([4]).

xx Les plus complètes jusqu'à maintenant (et, aussi, les premières) études des propriétés des matrices β^μ se trouvent dans les travaux fondamentaux de Petiau ([1]).

$$\beta^i\beta^j\beta^k + \beta^k\beta^j\beta^i = \delta^{ij}\,\beta^k + \delta^{jk}\,\beta^i, \tag{6}$$

$$\beta^i\beta^4 + \beta^4\beta^i = \beta^i. \tag{7}$$

En substituant les formes explicites des matrices (5) dans (4) on obtient le système d'équations :

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial t} + (\vec{\nabla}\vec{\Phi}) - im\phi = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial t} + \vec{\nabla}\Phi_0 = 0. \tag{9}$$

L'invariance relativiste est évidente, car, par hypothèse, Φ^μ se transforme comme 4-vecteur sous les transformations de Lorentz.

Si la fonction aléatoire ϕ satisfait l'équation d'onde

$$(\Box + m^2)\phi = 0 \tag{10}$$

on obtient de (8) et (9), les équations d'onde pour les champs Φ_0 et $\vec{\Phi}$:

$$(\Box + m^2)\Phi_0 = 0, \tag{11}$$

$$(\Box + m^2)\vec{\Phi} = 0. \tag{12}$$

La fonction aléatoire ϕ joue le rôle du potentiel (ou bien, de la fonction génératrice) par rapport aux champs Φ_0 et $\vec{\Phi}$, car ces deux champs sont exprimés à l'aide de ϕ :

$$\Phi_0 = -\frac{i}{m}\frac{\partial\phi}{\partial t}, \tag{13}$$

$$\vec{\Phi} = \frac{i}{m}\vec{\nabla}\phi. \tag{14}$$

Mais, contrairement à la théorie électromagnétique classique, par exemple, ici ϕ est un scalaire relativiste, et non une 4ème composante d'un 4-vecteur. Cela est nécessaire pour garantir l'invariance relativiste de l'équation (4).

Evidemment, les ondes planes

$$\phi = e^{ip^\mu x_\mu}$$

$$\Phi^\mu = U^\mu\, e^{ip^\mu x_\mu}$$

satisfont les équations du premier ordre (1), (8) - (9) et, simultanément, les équations d'onde (10) - (12).

Les interprétations possibles des champs Φ_0 et $\vec{\Phi}$ ont déjà été discutées par nous dans [4]. Nous avons démontré dans cet article, que le vecteur $\vec{\Phi}$ peut représenter la partie longitudinale du vecteur complexe $\vec{\Phi} = \vec{H} + i\,\vec{E}$ et le champ scalaire Φ_0 la 4ème composante du 4-vecteur $\Phi^\mu = (\Phi_0, \vec{\Phi})$.

Dans les articles qui suivent nous allons définir la fonction conjuguée (au sens de Dirac) et les grandeurs ou les expressions liées avec cette définition (équation conjuguée, densité, etc). Nous démontrerons aussi l'équivalence de notre équation (4) avec l'équation linéaire du premier ordre sous la forme de PDK avec les matrices de rang 5, équation qui, à son tour, est bien équivalente à l'équation de Proca [5] pour une particule scalaire (voir, par exemple [6]). Mais l'interprétation de l'équation (4) peut être différente de celle orthodoxe de PDK ou Proca.

RÉFÉRENCES

(1) G. Petiau, Thèse, Paris, 1936. Publié par l'Académie royale de Belgique, XVI, 1936.

(2) R.J. Duffin, Phys. Rev. 54, 1114 (1938).

(3) N. Kemmer, Proc. Roy. Soc., A 173, 91 (1939)

(4) N. Samsonenko, Problemi quantovoi physiki, p. 23-28, Université Lumumba, Moscou, 1977.

(5) Proca, Thèse, Paris, 1933.

(6) G. Petiau, Cours sur la Mécanique quantique relativiste, 1972-1973, Université Paris VI.

(7) L.G. Sapogin, Nuovo Cimento, 53A, 251 (1979).