Annales de la Fondation Louis de Broglie,
Vol. 6, n° 4, 1981

UNE NOUVELLE ÉQUATION DU PREMIER ORDRE POUR UNE PARTICULE DE SPIN "1"

par Nicolai SAMSONENKO

Résumé : On propose une formulation nouvelle de l'équation différentielle du premier ordre pour des particules de masse non nulle et de spin "1", basée sur la représentation irréductible réalisée par les 3 matrices de Petiau-Duffin-Kemmer du rang 4.

Le but de cette note est de formuler une nouvelle équation différentielle du premier ordre pour des particules de spin "1". Cette formulation est basée sur la représentation irréductible de l'algèbre de Petiau-Duffin-Kemmer (PDK) ([1–3]).

$$\beta^\mu\beta^\nu\beta^\lambda + \beta^\lambda\beta^\nu\beta^\mu = \delta^{\mu\nu}\beta^\lambda + \delta^{\lambda\nu}\beta^\mu, \tag{1}$$

qui est réalisée par les trois matrices β^i de rang 4 :

$$\beta^1 = \begin{pmatrix} 0100 \\ 1000 \\ 0000 \\ 0000 \end{pmatrix}, \quad \beta^2 = \begin{pmatrix} 0010 \\ 0000 \\ 1000 \\ 0000 \end{pmatrix}, \quad \beta^3 = \begin{pmatrix} 0001 \\ 0000 \\ 0000 \\ 1000 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

A l'aide de ces matrices on peut définir la matrice auxiliaire $\beta^4 = \frac{1}{2}(\sum_i (\beta^i)^2 - 1)$ satisfaisant aux relations de commutations suivantes :

$$\beta^4\beta^i + \beta^i\beta^4 = \beta^i \tag{3}$$

Ainsi on a 5 matrices (I, β^i, β^4), ce qui est suffisant pour écrire l'équation différentielle du premier ordre pour une particule de masse non nulle et de spin "1) sous la forme 4-dimensionnelle suivante[x] :

$$\beta^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \begin{pmatrix} \Phi^0 \\ \vec{\Phi} \end{pmatrix} = \left(S^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + m\beta^4 \right) \begin{pmatrix} i\phi \\ \vec{\Phi}_\perp \end{pmatrix} \tag{4}$$

L'opérateur du spin S^μ est défini par l'expression :

$$S^0 = 0, \quad S^\ell = \frac{1}{i}(\beta^m\beta^n - \beta^n\beta^m) \tag{5}$$

avec la permutation cyclique des indices l,m,n.

Explicitement, ces matrices sont :

$$S^1 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&-i \\ 0&0&i&0 \end{pmatrix}, \quad S^2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&i \\ 0&0&0&0 \\ 0&-i&0&0 \end{pmatrix}, \quad S^3 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&-i&0 \\ 0&i&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Il est évident que les trois sous-matrices de rang 3, indiquées dans (6) par des lignes pointillées, forment la représentation irréductible de trois matrices σ^x, σ^y, σ^z du moment de rotation pour la particule de spin "1".

[x] Nous utilisons la métrique :

$$g^{00} = 1, \; g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1.$$

En écrivant (4), nous avons supposé également que pour une particule libre cette équation se décompose en deux systèmes d'équations : l'un pour la partie longitudinale $\vec{\Phi}_\parallel$, et l'autre pour la partie transversale $\vec{\Phi}_\perp$, définies par les relations

$$\vec{\Phi} = \vec{\Phi}_\perp + \vec{\Phi}_\parallel, \quad \mathrm{div}\vec{\Phi}_\perp = 0, \quad \mathrm{rot}\vec{\Phi}_\parallel = 0 \tag{7}$$

En substituant les formes explicites des matrices (2) et (6) dans (4) on obtient le système d'équations :

$$\frac{\partial\vec{\Phi}_\parallel}{\partial t} + \vec{\nabla}\,\Phi^0 = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial\Phi^0}{\partial t} + (\vec{\nabla}.\vec{\Phi}_\parallel) - im\phi = 0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial\vec{\Phi}_\perp}{\partial t} - i\,\mathrm{rot}\vec{\Phi}_\perp = 0 \tag{10}$$

Dans le cas particulier $\vec{\Phi}_\perp = 0$ on obtient de (8) - (10) les équations du premier ordre pour une particule scalaire ([4]).

Dans le deuxième cas particulier, $m = 0$, $\Phi^0 = 0$, $\vec{\Phi} = \vec{H} + i\,\vec{E}$, en séparant les parties réelles et imaginaires, on obtient de (8) - (10) les équations de Maxwell dans le vide.

Si on suppose que les parties réelle et imaginaire du vecteur Φ^μ se transforment comme un 4-vecteur sous les transformations de Lorentz, et que ϕ est un scalaire (pseudoscalaire) invariant, alors la covariance de ces équations est évidente.

En introduisant un opérateur $\partial^\mu = \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, -i\vec{\nabla}\right)$, on peut supposer que, comme pour une particule scalaire ([4])

$$\Phi^\mu = -\frac{1}{m}\,\partial^\mu\,\phi. \tag{11}$$

Sous cette hypothèse et avec la condition supplémentaire

$$(\Box + m^2)\phi = 0 \qquad (12)$$

on obtient de (8) et (9) les équations d'ondes :

$$(\Box + m^2)\phi^0 = 0, \qquad (13)$$

$$(\Box + m^2)\vec{\phi}_{\parallel} = 0. \qquad (14)$$

A partir de (10), on obtient directement :

$$\Box\, \vec{\phi}_{\perp} = 0 \qquad (15)$$

On peut démontrer que les deux premières équations (8) et (9) se déduisent de l'équation de PDK pour une particule de spin "1", tandis que l'équation (10) décrivant le spin de la particule ne peut pas s'en déduire sous une forme aussi simple.

L'analyse de ce phénomène montre que l'équation (10) peut être obtenue à partir de l'équation modifiée de PDK, dans laquelle on a introduit un opérateur auxiliaire P, construit à l'aide des matrices β^μ de rang 10, qui projette la masse de la particule sur le champ ϕ, lié aux champs ϕ^0 et $\vec{\phi}_{\parallel}$. Cela correspond au fait que l'algèbre de l'ensemble des matrices, utilisée dans l'écriture de l'équation modifiée de PDK est réductible. A notre avis l'utilisation d'une représentation réductible, contrairement à l'hypothèse de Pauli (5), peut éliminer plusieurs difficultés rencontrées dans la description des particules de spin "1".

RÉFÉRENCES

(1) G. Petiau, Thèse, Paris, 1936. Publié par l'Académie Royale de Belgique, XVI, 1936.

(2) R.J. Duffin, Phys. Rev., 54, 1114 (1938).

(3) N. Kemmer, Proc. Roy. Soc., A173, 91 (1939).

(4) N. Samsonenko, in press.

(5) W. Pauli, Phys. Rev., 58, 716 (1940).