Annales de la Fondation Louis de Broglie,
Vol. 6, n° 4, 1981

PARAMÈTRES CACHÉS DANS LES POTENTIELS DES CHAMPS STATIQUES

par Nikias STAVROULAKIS
U.E.R. des Sciences de Limoges
123, rue Albert-Thomas
87060 LIMOGES Cedex

(manuscrit reçu le 12 Janvier 1981)

1. Introduction

La Relativité Générale n'améliore pas seulement notre connaissance du champ gravitationnel et électromagnétique dans le domaine des phénomènes macroscopiques. Le présent travail se propose de montrer que les solutions des équations d'Einstein apportent aussi des éléments nouveaux à notre connaissance du champ à l'échelle des particules tout en remédiant aux imperfections de certains concepts classiques, par exemple des concepts de masse ponctuelle et de charge ponctuelle.

Le paragraphe 2 établit de façon simple les bases géométriques pour l'étude des champs statiques à symétrie sphérique en indiquant clairement les caractéristiques de la forme spatio-temporelle utilisée. Contrairement à la pratique traditionnelle, nous n'avons pas voulu tronquer la métrique par des réductions arbitraires et abusives, opérées avant l'intégration des équations de gravitation, du nombre des fonctions inconnues qui y figurent. De cette façon nous avons pu éviter les singularités imprévues et profiter de toute la richesse des solutions en constantes arbitraires et fonctions arbitraires, qui permet d'adapter les potentiels du champ à des conditions très variées.

Le paragraphe 3 est consacré à l'intégration des équations d'Einstein, sous leur forme la plus générale, à l'extérieur de la source. On peut passer ce paragraphe en retenant uniquement le résultat de l'intégration, donné par les équations (3.9), (3.10), (3.12).

Au paragraphe 4 nous introduisons la distance au centre comme paramètre et étudions en détail les solutions qui en résultent lorsqu'on néglige la constante cosmologique. Ce procédé a l'avantage principal de rendre possible la comparaison directe des anciens potentiels de Newton et de Coulomb, qui dépendent de cette distance, avec les nouveaux potentiels. Il permet ainsi, en particulier, d'adapter facilement, sans lacunes logiques et erreurs mathématiques, nos solutions aux conditions aux limites du problème. Les résultats obtenus sont particulièrement intéressants pour la microphysique. Nous reconnaissons d'abord le rôle fondamental de la fonction $g(\rho)$ qui représente le rayon de courbure des sphères centrées à l'origine. Nous constatons ensuite l'introduction d'un nouveau paramètre ρ_0 dont la détermination nécessite une condition initiale, à savoir la donnée de la valeur de $g(\rho)$ sur la sphère limitant la matière. Les grandeurs $g(\rho)$ et ρ_0 caractérisent mieux que les théories classiques le comportement du champ au voisinage immédiat du centre. En particulier, lorsque la source est chargée, nous obtenons une image de la

réalité beaucoup plus satisfaisante que celle donnée par la théorie de Born et Infeld. Par rapport aux modèles classiques, ρ_0 est un paramètre caché et $g(\rho)$ est une fonction cachée.

Au paragraphe 5, tout en gardant toujours la distance au centre comme paramètre, nous étudions brièvement les solutions complétées avec la constante cosmologique qui sont susceptibles de rendre mieux compte du comportement du champ aux distances macroscopiques et cosmiques. Leur signification n'est pas négligeable dans la mesure où elles relèvent le rôle de la fonction $g(\rho)$ non seulement au voisinage du centre, mais aussi aux grandes distances quand il s'agit, par exemple, d'associer le phénomène du décalage vers le rouge au caractère non euclidien de l'espace. Nous avons bien voulu mettre en évidence le fait qu'une même métrique spatio-temporelle est susceptible d'améliorer notre connaissance du champ non seulement à l'échelle microscopique mais aussi à l'échelle cosmique.

Finalement les paragraphes 6 et 7 traitent du mouvement des particules, aussi bien de masse non nulle que de masse nulle, à l'extérieur de la source. Puisque la détermination de l'orbite en tant que courbe géométrique présente un intérêt plutôt limité, nous nous attachons à donner les expressions explicites des fonctions du temps $t, \rho(t)$ et $\phi(t)$, qui définissent le mouvement.

2. Métriques statiques à symétrie sphérique

Le champ gravitationnel le plus simple est celui engendré par une distribution de masse disposée en couches sphériques concentriques telles que la densité de masse dépende uniquement de la distance au centre. Il est défini, suivant la théorie de Newton, dans le cadre de la géométrie euclidienne de $\mathbb{R}^3$, par le potentiel

$$- \frac{km}{\rho} \quad , \quad \rho = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \quad ,$$

en supposant que le centre soit choisi comme origine de coordonnées et que $\rho \geqslant \rho_1$, où ρ_1 est le rayon de la sphère limitant la distribution considérée de matière. Cette forme du potentiel nous a familiarisés avec le concept de masse ponctuelle : puisque ρ_1 n'y figure pas, tout se passe comme si toute la masse m était concentrée à l'origine. Une situation similaire se présente lorsque la matière est chargée, car le potentiel électrique qui en résulte, à savoir le potentiel de Coulomb,

$$\frac{e}{\rho} \quad , \quad \rho = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \quad ,$$

fait alors apparaître une charge ponctuelle e placée à l'origine.

Du point de vue intuitif, de telles simplifications de la réalité semblent excessives. Elles impliquent en particulier que le champ gravitationnel d'une source sphérique pulsante est toujours statique et entièrement indépendant de la déformation subie par la matière, ce qui choque singulièrement notre esprit. En fait, les notions de masse ponctuelle et de charge ponctuelle ne se déduisant pas directement de la réalité physique. Le caractère euclidien de $\mathcal{R}^3$ y est foncièrement engagé de sorte que l'extrême simplicité des potentiels obtenus reflète les conditions simplificatrices imposées d'avance à la géométrie de l'espace-temps $\mathcal{R}\times\mathcal{R}^3$. Le problème se présente sous un jour nouveau dans le cadre de la Relativité Générale, car le champ n'y est plus défini par les potentiels de Newton et de Coulomb, mais par toute une métrique spatio-temporelle traduisant la modification subie par la métrique pseudo-euclidienne de Minkowski,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2, \quad (dx^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2),$$

en présence de matière et de charges. Les nouveaux éléments géométriques qui s'introduisent ainsi seront exprimés par de nouvelles fonctions, inconnues au modèle pseudo-euclidien de l'espace-temps en Relativité Restreinte, qui devront faire dépendre le champ non seulement de la masse totale mais aussi de sa distribution dans l'espace. Cette prévision sera confirmée, nous allons le voir, par les résultats obtenus en intégrant les équations d'Einstein. Nous ne nous proposons cependant pas d'étudier le problème dans toute sa généralité. Les états non stationnaires du champ, c'est-à-dire les états résultant des pulsations de la source sphérique, ne seront pas abordés. Aussi allons-nous supposer constamment dans la suite que notre boule de matière, chargée ou non chargée, se trouve dans un état d'équilibre de durée assez longue de sorte que nous avons le droit de définir le champ dans son ensemble, c'est-à-dire aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur de la source, par une métrique spatio-temporelle universellement statique. En fait, nous imposons ainsi à notre métrique une condition dont la justification rigoureuse nécessite la considération des états non stationnaires.

Ceci dit, la métrique spatio-temporelle à utiliser résulte de la métrique de Minkowski, si l'on y remplace la vitesse c de la lumière par une fonction positive indéfiniment dérivable $f = f(\rho)$ dépendant uniquement de $\rho = |x|$, et la métrique euclidienne dx^2 par la forme générale des métriques riemanniennes de $\mathcal{R}^3$ à symétrie sphérique. Celles-ci sont caractérisées par deux propriétés géométriques simples :

Premièrement les géodésiques issues de 0 sont orthogonales aux sphères $|x| = \rho$.
Deuxièmement le rayon de courbure des sphères $|x| = \rho$, considérées avec la métrique induite, est une fonction de ρ, donc, en particulier, constante sur chaque sphère $|x| = \rho$.

Lorsque $\mathbb{R}^3$ est muni de la métrique euclidienne canonique $dx^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$, cette constante est égale au rayon de la sphère, mais il n'en est plus de même dans le cas général.

Afin d'obtenir la forme riemannienne cherchée, nous partons de la métrique euclidienne canonique $dx^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$ en y apportant d'abord une légère modification de notation

$$(2.1) \qquad ds_E^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2$$

et en désignant ensuite par r la distance $|y| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}$, qui s'identifie au rayon de courbure de la sphère correspondante.

Soit $q(\rho)$, avec $q(0) = 0$, une fonction de la variable ρ, indéfiniment dérivable et telle que $q'(\rho) > 0$ sur la demi-droite $[0, +\infty[$. Alors l'équation $r = q(\rho)$ définit un difféomorphisme de la demi-droite $[0, +\infty[$ sur elle-même et, en conséquence, les équations

$$(2.2) \quad y_1 = \frac{q(\rho)}{\rho} x_1, \; y_2 = \frac{q(\rho)}{\rho} x_2, \; y_3 = \frac{q(\rho)}{\rho} x_3,$$

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = |x|^2 = \rho^2),$$

établissent un difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur lui-même. Moyennant les nouvelles coordonnées x_1, x_2, x_3, on voit que, pour toute valeur fixée $\rho > 0$, l'équation $|x| = \rho$ représente une sphère dont le rayon ρ n'est plus égal à son rayon de courbure $r = q(\rho)$. D'autre part, en vertu de (2.2), nous avons

$$dy_i = \frac{q(\rho)}{\rho} dx_i + \frac{\rho q'(\rho) - q(\rho)}{\rho^3} (xdx) x_i,$$

$$(i = 1,2,3 \;\; ; \;\; xdx = x_1dx_1 + x_2dx_2 + x_3dx_3),$$

et remplaçant dans (2.1) nous obtenons la forme générale des métriques euclidiennes de $\mathbb{R}^3$ à symétrie sphérique,

$$(2.3) \quad ds_E^2 = \left(\frac{q(\rho)}{\rho}\right)^2 dx^2 + \frac{1}{\rho^2}\left((q'(\rho))^2 - \left(\frac{q(\rho)}{\rho}\right)^2\right)(xdx)^2.$$

Le passage aux métriques riemanniennes de $\mathbb{R}^3$ à symétrie sphérique est maintenant immédiat. Il suffit de remplacer dans (2.3), $q(\rho)$ et $q'(\rho)$, par deux fonctions indéfiniment dérivables de ρ, $g(\rho)$ et $\ell(\rho)$, telles que $g(\rho) > 0$ pour $\rho > 0$, $g(0) = 0$, $\ell(\rho) > 0$ pour tout $\rho \geqslant 0$,

ce qui donne

$$(2.4) \quad ds_R^2 = \left(\frac{g(\rho)}{\rho}\right)^2 dx^2 + \frac{1}{\rho^2}\left((\ell(\rho))^2 - \left(\frac{g(\rho)}{\rho}\right)^2\right)(xdx)^2.$$

Notons que la fonction

$$\frac{1}{\rho^2}\left((\ell(\rho))^2 - \left(\frac{g(\rho)}{\rho}\right)^2\right)$$

doit aussi être indéfiniment dérivable, et cela impose les conditions supplémentaires $g'(0) = \ell(0)$, $g''(0) = 2\ell'(0)$ afin d'éviter la singularité pour $\rho = 0$.

Quelle que soit la valeur fixée de $\rho \geqslant 0$, le rayon de courbure de la sphère $|x| = \rho$, munie de la métrique induite par (2.4), est égal à $g(\rho)$. On le voit immédiatement en effectuant la transformation classique

$$(2.5) \quad x_1 = \rho \sin\theta \cos\phi, \; x_2 = \rho \sin\theta \sin\phi, \; x_3 = \rho \cos\theta,$$

$$(0 < \phi < 2\pi, \quad 0 < \theta < \pi, \quad \rho > 0),$$

qui entraîne $xdx = \rho d\rho$, $dx^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2$, et permet ainsi de mettre (2.4) sous la forme

$$(2.6) \qquad ds_R^2 = (\ell(\rho))^2 d\rho^2 + (g(\rho))^2 \, d\omega^2$$

où $d\omega^2 = \sin^2\theta \, d\phi^2 + d\theta^2$ est la métrique ordinaire de la sphère unité dans l'espace $\mathcal{R}^3$, supposé muni de la métrique euclidienne canonique dx^2. La transformée (2.6) de la métrique (2.4) montre aussi que la distance géodésique, relativement à (2.4), de l'origine au point $x_\rho = (x_1, x_2, x_3)$, est donnée par l'intégrale $\int_0^\rho \ell(v)dv$ avec $\rho = |x|$.

Bien entendu la fonction $g(\rho)$ qui figure dans (2.4) n'est plus obligatoirement strictement croissante comme c'est le cas de $q(\rho)$ dans (2.3). Son égalité avec la distance géodésique $\int_0^\rho \ell(v)dv$ ne pourra aussi être qu'exceptionnelle. En fait l'égalité $\int_0^\rho \ell(v)dv = g(\rho)$ ou, ce qui revient au même, $\ell(\rho) = g'(\rho)$ est la condition nécessaire et suffisante pour que ds_R^2 se réduise à une métrique euclidienne de $\mathcal{R}^3$ à symétrie sphérique. Il en résulte, en particulier, que, à toute métrique riemannienne de $\mathcal{R}^3$ à symétrie sphérique, c'est-à-dire de la forme (2.4), on peut associer une métrique euclidienne de $\mathcal{R}^3$, aussi à symétrie sphérique, sans modifier la fonction $\ell(\rho)$. En effet, il suffit de poser $q(\rho) = \int_0^\rho \ell(v)dv$.

L'extrême simplicité de la métrique (2.6) vis-à-vis de (2.4) constitue un avantage considérable qui pourrait laisser croire que la considération de la forme (2.4) est tout à fait superflue. En réalité, il n'en est rien. Les coordonnées ρ, ϕ, θ ne sont pas valables globalement et leur utilisation nécessite quelques précautions qui sont couramment négligées. Ainsi la forme $d\omega^2$ n'est pas valable pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, et doit être représentée au moyen d'autres coordonnées locales aux voisinages de ces deux valeurs exceptionnelles. En outre la forme (2.6) n'est pas non plus valable pour $\rho = 0$ et

ne se rapporte pas directement à l'espace $\mathcal{R}^3$. Toutes les fois où la topologie de $\mathcal{R}^3$ sera directement engagée, il sera donc absolument indispensable d'utiliser la forme (2.4) qui est de validité universelle sur $\mathcal{R}^3$. Par contre lorsqu'il s'agit de calculer des grandeurs invariantes, telles que les distances et les tenseurs, dont la détermination se ramène toujours à des opérations locales, nous avons intérêt à nous baser sur la forme (2.6) afin d'alléger les calculs.

Ceci dit, la forme riemannienne ds_R^2 qui convient à notre problème étant maintenant connue, la métrique spatio-temporelle qui remplacera la métrique de Minkowski se trouve aussi précisée,

$$(2.7) \quad ds^2 = f^2dt^2 - \left(\left(\frac{g}{\rho}\right)^2 dx^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\ell^2 - \left(\frac{g}{\rho}\right)^2\right)(xdx)^2\right)$$

avec

$\rho = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, $dx^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$,

$xdx = x_1dx_1 + x_2dx_2 + x_3dx_3$,

$f = f(\rho) > 0$ et $\ell = \ell(\rho) > 0$ pour tout $\rho \geqslant 0$,

$g = g(\rho) > 0$ pour tout $\rho > 0$,

$g(0) = 0$, $g'(0) = \ell(0)$, $g''(0) = 2\ell'(0)$.

Les fonctions f, ℓ, g, qui constituent les inconnues de notre problème, seront obtenues en établissant et en intégrant les équations d'Einstein. En vertu du caractère tensoriel de ces équations, nous avons le droit de les établir relativement à la métrique qui résulte de (2.7) au moyen de la transformation (2.5),

$$(2.8) \quad ds^2 = f^2dt^2 - (\ell^2d\rho^2 + g^2d\omega^2).$$

Les valeurs exceptionnelles $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ ne conduisent à aucune complication, car, comme on devrait s'y attendre, les équations, sous leur forme définitive, ne contiennent pas les variables ϕ et θ. D'autre part la condition $\rho > 0$ n'est pas non plus gênante, puisque, toutes les fois où la valeur $\rho = 0$ intervient dans nos calculs, les valeurs correspondantes des fonctions f, ℓ, g peuvent être obtenues en faisant tendre ρ vers zéro à cause de la continuité.

3. Intégration des équations d'Einstein à l'extérieur de la source

Suivant un usage ancien, on procède toujours à une réduction du nombre des fonctions inconnues qui figurent dans la métrique, avant l'intégration des équations de gravitation, en évoquant la soi-disant équivalence de tous les systèmes de coordonnées. En réalité, les transformations utilisées ne peuvent avoir aucune justification mathématique et sont basées sur une confusion permanente entre une propriété formelle algébrique qui est vraie, à savoir l'invariance tensorielle des équations d'Einstein, et une affirmation qui est fausse, à savoir l'équivalence des solutions de ces équations dans les différents systèmes de coordonnées, équivalence qui n'est d'ailleurs pas susceptible de définition.

Notre approche est différente. Une fois la métrique précisée, nous n'y toucherons plus. C'est seulement après l'intégration des équations de gravitation que l'on est autorisé à imposer des conditions à la solution afin de l'adapter aux diverses situations géométriques et physiques envisagées.

Ceci dit, nous considérons les équations d'Einstein sous la forme

$$(3.1)\qquad R_\alpha^\beta - \frac{1}{2} R\, \delta_\alpha^\beta + \Lambda\, \delta_\alpha^\beta + \frac{8\pi k}{c^4} T_\alpha^\beta = 0$$

($\alpha,\beta = 0,1,2,3$; $\delta_\alpha^\beta = 1$ pour $\alpha = \beta$ et $\delta_\alpha^\beta = 0$ pour $\alpha \neq \beta$)

en y apportant une légère modification de notation en ce qui concerne la constante cosmologique Λ qui sera notée -3λ pour des raisons de commodité. Nous allons établir maintenant les équations de gravitation relativement à la métrique (2.8), ce qui est légitime, d'après ce que nous avons dit précédemment. Nous avons d'abord besoin du tenseur de Ricci $\left\{R_\alpha^\beta\right\}$ qui s'obtient par un calcul facile

$$(3.2)\qquad R_0^0 = -\frac{f''}{f\ell^2} + \frac{f'\ell'}{f\ell^3} - \frac{2f'g'}{f\ell^2 g}$$

$$(3.3)\qquad R_1^1 = -\frac{f''}{f\ell^2} + \frac{f'\ell'}{f\ell^3} - \frac{2g''}{\ell^2 g} + \frac{2\ell' g'}{\ell^3 g}$$

$$(3.4)\qquad R_2^2 = R_3^3 = -\frac{f'g'}{f\ell^2 g} + \frac{\ell' g'}{\ell^3 g} - \frac{g''}{\ell^2 g} - \frac{g'^2}{\ell^2 g^2} + \frac{1}{g^2}$$

toutes les autres composantes R_α^β étant nulles.

En ce qui concerne le tenseur d'impulsion-énergie $\left\{T_\alpha^\beta\right\}$, qui est ici le tenseur d'impulsion-énergie du champ électromagnétique à l'extérieur de la source chargée, il s'obtient au moyen du tenseur antisymétrique $\{P_{\alpha\beta}\}$ du champ électromagnétique. A l'exception de P_{01} et $P_{10} = -P_{01}$, toutes les autres composantes covariantes $P_{\alpha\beta}$ de ce dernier tenseur sont nulles, et l'on trouve facilement

$$(3.5)\qquad T_0^0 = T_1^1 = \frac{P_{01}^2}{8\pi f^2\ell^2}\,,\quad T_2^2 = T_3^3 = -\frac{P_{01}^2}{8\pi f^2\ell^2}$$

toutes les autres composantes T_α^β étant nulles.

Par conséquent le système (3.1) se réduit à un système de trois équations,

$$R_0^0 - \frac{1}{2}R + \Lambda + \frac{8\pi k}{c^4}T_0^0 = 0, \quad R_1^1 - \frac{1}{2}R + \Lambda + \frac{8\pi k}{c^4}T_1^1 = 0,$$

$$R_2^2 - \frac{1}{2}R + \Lambda + \frac{8\pi k}{c^4}T_2^2 = 0\ ,$$

avec $R = R_0^0 + R_1^1 + 2R_2^2$, et puisque $T_0^0 + T_1^1 + 2T_2^2 = 0$, en vertu de (3.5), il en résulte $R = 4\Lambda = -12\lambda$. Ainsi nous obtenons en définitive les équations de gravitation sous une forme simple

$$(3.6)\quad R_0^0 = R_1^1,\ R_0^0 + R_2^2 = -6\lambda,\ R_2^2 = -3\lambda + \frac{k}{c^4}\frac{P_{01}^2}{f^2\ell^2}\ .$$

Comte tenu de (3.2) et (3.3), l'équation $R_0^0 = R_1^1$ donne

$$\frac{f'}{f} + \frac{\ell'}{\ell} = \frac{g''}{g'}\ ,$$

d'où l'intégrale première

$$(3.7)\qquad f\ell = cg',\quad c = \mathrm{Cte}.$$

D'autre part, en vertu de (3.2) et (3.4), l'équation $R_0^0 + R_2^2 = -6\lambda$ s'écrit

$$-\frac{f''}{f\ell^2} + \frac{f'\ell'}{f\ell^3} - \frac{3f'g'}{f\ell^2 g} + \frac{\ell' g'}{\ell^3 g} - \frac{g''}{\ell^2 g} - \frac{g'^2}{\ell^2 g^2} + \frac{1}{g^2} = -6\lambda$$

et puisque

$$\frac{f'}{f} = \frac{g''}{g'} - \frac{\ell'}{\ell}\ ,$$

ce qui donne

$$\frac{f''}{f} = \frac{g'''}{g'} - \frac{2\ell' g''}{\ell g'} - \frac{\ell''}{\ell} + \frac{2\ell'^2}{\ell^2}\ ,$$

nous obtenons, après substitution,

$$\frac{3\ell' g''}{\ell^3} - \frac{3\ell'^2 g'}{\ell^4} + \frac{\ell'' g'}{\ell^3} - \frac{g'''}{\ell^2} - \frac{4g'g''}{\ell^2 g} + \frac{4\ell' g'^2}{\ell^3 g} - \frac{g'^3}{\ell^2 g^2} + \frac{g'}{g^2} = -6\lambda g'.$$

En introduisant maintenant la fonction

$$F = -\frac{g^2 g'^2}{\ell^2} + g^2$$

nous constatons que le premier membre de la dernière équation peut s'écrire

$$\frac{1}{g^2}\left(\frac{F'}{2g'}\right)'$$

de sorte que

$$\left(\frac{F'}{2g'}\right)' = -6\lambda g^2 g'$$

donc aussi

$$\frac{F'}{2g'} = -2\lambda g^3 + 2A_1\ ,\qquad A_1 = \mathrm{Cte},$$

d'où l'intégrale première

$$F = -\lambda g^4 + 2A_1 g - A_2,\qquad A_2 = \mathrm{Cte}.$$

Compte tenu de l'expression de F et de (3.7), nous disposons finalement de deux intégrales premières, à savoir

$$(3.7)\qquad f\ell = cg'$$

$$(3.8)\qquad g'^2 = \ell^2\left(1 - \frac{2A_1}{g} + \frac{A_2}{g^2} + \lambda g^2\right)$$

pour la détermination des fonctions inconnues f, ℓ, g. On peut donc choisir arbitrairement l'une de ces trois fonctions. En fait, le mot arbitrairement est exagéré, car le choix en question doit être assujetti à des conditions mathématiques, géométriques et physiques relatives au problème abordé. En particulier, si l'on pose

$$(3.9)\qquad Q(g) = 1 - \frac{2A_1}{g} + \frac{A_2}{g^2} + \lambda g^2$$

l'équation (3.8) montre que les constantes A_1, A_2, λ et la fonction g doivent être telles que $Q(g) \geqslant 0$, et cela permet de mettre la solution sous une forme plus simple

$$(3.10) \qquad f = c\sqrt{Q(g)}\ , \qquad g' = \ell\sqrt{Q(g)}\ .$$

Reste à déterminer le tenseur antisymétrique du champ électromagnétique. Pour cela nous remplaçons d'abord

$$\frac{f'}{f} = \frac{g''}{g'} - \frac{\ell'}{\ell}$$

dans l'expression (3.4) de R_2^2, ce qui donne

$$R_2^2 = -\frac{2g''}{\ell^2 g} + \frac{2\ell' g'}{\ell^3 g} - \frac{g'^2}{\ell^2 g^2} + \frac{1}{g^2}$$

Ensuite dérivant la deuxième des équations (3.10), nous avons

$$(3.11) \quad g'' = \ell'\sqrt{Q(g)} + \frac{\ell}{2\sqrt{Q(g)}}\frac{dQ}{dg}\,g' = \ell'\sqrt{Q(g)} + \ell^2\left(\frac{A_1}{g^2} - \frac{A_2}{g^3} + \lambda g\right)$$

et, après remplacement dans la relation précédente, nous obtenons

$$R_2^2 = -3\lambda + \frac{A_2}{g^4}$$

Comparant à la dernière des équations (3.6), on trouve maintenant

$$P_{01}^2 = \frac{c^4 A_2}{k}\,\frac{f^2\ell^2}{g^4} = \frac{c^6 A_2}{k}\,\frac{g'^2}{g^4}$$

donc la constante A_2 ne peut pas être négative, et l'on obtient en définitive

$$(3.12) \qquad P_{01} = \pm\left(c^3\sqrt{\frac{A_2}{k}}\right)\frac{g'}{g^2}$$

Cette expression vérifie les équations du champ électromagnétique, sous leur forme relativiste, à l'extérieur de la source, comme le montre un calcul facile qui sera laissé aux soins du lecteur.

4. Solutions avec $\lambda = 0$ obtenues en prenant la distance au centre comme paramètre

Puisque la distance au centre est donnée par la formule

$$\alpha(\rho) = \int_0^\rho \ell(v)dv\ ,$$

afin que le paramètre ρ représente cette distance, il faut et il suffit que l'on ait $\ell(\rho) = 1$ pour toute valeur de ρ aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur de la source. Nous posons donc partout $\ell = 1$ dans nos formules, de sorte que la métrique (2.7) s'écrit maintenant

$$(4.1) \qquad ds^2 = f^2dt^2 - \left(\left(\frac{g}{\rho}\right)^2 dx^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(1 - \left(\frac{g}{\rho}\right)^2\right)(xdx)^2\right)$$

et les relations (3.9) et (3.10) donnent

$$Q(g) = 1 - \frac{2A_1}{g} + \frac{A_2}{g^2} \geqslant 0, \quad g' = \sqrt{Q(g)}\ , \quad f = c\sqrt{Q(g)}$$

en supposant $\lambda = 0$.

On peut se demander dans quelle mesure le choix $\ell = 1$ est justifié, notamment à l'intérieur de la matière où la solution des équations d'Einstein nous est inconnue. On est d'autant plus en droit de se le demander que les états non stationnaires du champ, comme le montre leur étude, ne sont pas compatibles avec des distances fixées entre les différents points de l'espace et le centre. En fait, les solutions statiques, qui s'obtiennent en introduisant la distance au centre comme paramètre, ne peuvent donner qu'une image approximative du champ gravitationnel et électrostatique. Nous allons cependant les étudier parce que, sans dénaturer la conception du champ statique, elles permettent la comparaison directe des anciens potentiels de Newton et de Coulomb avec les nouveaux, et constituent de ce fait une première étape, presque indispensable, avant d'aborder des situations plus compliquées.

Ceci dit, nous allons distinguer deux cas suivant que la source est chargée ou non.

PREMIER CAS. Si la matière ne comporte pas de charges électriques, on aura $A_2 = 0$, d'après (3.12), et $g = g(\rho)$ s'obtient en intégrant l'équation

$$\frac{dg}{d\rho} = \sqrt{Q(g)} \quad \text{avec} \quad Q(g) = 1 - \frac{2A_1}{g}, \quad (g > 0, \quad g > 2A_1),$$

ce qui donne

$$A_0 + 2A_1 \mathrm{Log}(\sqrt{g} + \sqrt{g - 2A_1}) + \sqrt{g(g - 2A_1)} = \rho, \ A_0 = \mathrm{Cte}.$$

L'expression du premier membre, notée $E(g)$, de l'équation ci-dessus est une fonction strictement croissante de g tendant vers $+\infty$ lorsque $g \to +\infty$, donc $E(g) = \rho$ admet une solution unique $g = g(\rho)$ strictement croissante aussi et tendant vers $+\infty$ lorsque $\rho \to +\infty$. Par suite, lorsque la distance ρ augmente indéfiniment, la différence

$$\rho - g(\rho) = E(g) - g = A_0 + 2A_1 \mathrm{Log}(\sqrt{g} + \sqrt{g - 2A_1}) - \frac{2A_1}{1 + \sqrt{1 - \frac{2A_1}{g}}}$$

tend aussi vers l'infini, tandis que le rapport

$$\frac{\rho}{g(\rho)} = \frac{E(g)}{g} = \frac{A_0}{g} + A_1 \frac{\mathrm{Log}\, g}{g} + \frac{2A_1}{g} \mathrm{Log}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{2A_1}{g}}\right) + \sqrt{1 - \frac{2A_1}{g}}$$

tend vers 1, de sorte que nous avons la relation

$$\frac{\rho}{g(\rho)} = 1 + \varepsilon(\rho), \text{ avec } \lim_{\rho \to +\infty} \varepsilon(\rho) = 0,$$

qui va nous permettre de déterminer les constantes c et A_1 moyennant les conditions aux limites.

Première condition. Pour des distances ρ d'ordre de grandeur très élevé, la métrique (4.1) doit s'identifier pratiquement à la métrique de Minkowski. Or en vertu des relations

$$\lim_{\rho \to +\infty} \frac{g(\rho)}{\rho} = 1, \quad \lim_{\rho \to +\infty} g(\rho) = +\infty,$$

et de l'expression de $f = c\sqrt{Q(g)} = c\sqrt{1 - \frac{2A_1}{g}}$, la métrique (4.1) tend vers la forme $c^2dt^2 - dx^2$ lorsque $\rho \to +\infty$, et la condition se trouve ainsi vérifiée si l'on identifie c à la vitesse de lumière.

Deuxième condition. Pour des grandes distances ρ et à des infiniment petits près d'ordre supérieur à 1, la métrique (4.1) doit admettre l'approximation newtonienne

$$ds^2 = \left(c^2 - \frac{2km}{\rho}\right)dt^2 - dx^2$$

dans laquelle figure le potentiel classique $-\frac{km}{\rho}$. Or la relation

$$\frac{2A_1}{g(\rho)} = \frac{2A_1}{\rho} + \frac{2A_1\varepsilon(\rho)}{\rho}$$

permet d'écrire

$$(f(\rho))^2 = c^2\left(1 - \frac{2A_1}{g(\rho)}\right) = c^2 - \frac{2A_1c^2}{\rho} - \frac{2A_1c^2\varepsilon(\rho)}{\rho}$$

de sorte que l'approximation envisagée se réalise si et seulement si $A_1c^2 = km$, d'où $A_1 = \frac{km}{c^2} = \mu$.

Puisque $\mu > 0$, on peut introduire la constante

$\rho_0 = A_0 + 2\mu \mathrm{Log}\sqrt{2\mu}$, et alors l'équation $E(g) = \rho$, qui définit $g = g(\rho)$, s'écrit en définitive

$$\rho_0 + 2\mu \mathrm{Log}\left(\sqrt{\frac{g}{2\mu}} + \sqrt{\frac{g}{2\mu} - 1}\right) + \sqrt{g(g - 2\mu)} = \rho.$$

En ce qui concerne $f = f(\rho)$, nous avons

$$f(\rho) = c\sqrt{1 - \frac{2\mu}{g(\rho)}}$$

La solution obtenue appelle trois remarques essentielles.

En premier lieu le potentiel de Newton $-\frac{km}{\rho}$ se trouve remplacé par l'expression $-\frac{km}{g(\rho)}$ qui dépend du rayon de courbure des sphères $|x| = \rho$.

En deuxième lieu la fonction $g(\rho)$ possède la borne inférieure 2μ, obtenue pour $\rho = \rho_0$, qui n'est pas physiquement réalisable même si $\rho_0 > 0$, car $f(\rho_0) = 0$, de sorte que la valeur 2μ de $g(\rho)$ donne lieu à une dégénérescence de la métrique. Par conséquent, à l'extérieur de la source, la fonction $g(\rho)$ est toujours strictement supérieure à 2μ et sa détermination pour $0 \leqslant g(\rho) \leqslant 2\mu + \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 > 0$, doit se faire dans la matière. Ainsi la notion de masse ponctuelle se trouve écartée.

En troisième lieu la fonction $g(\rho)$ dépend d'une nouvelle constante arbitraire ρ_0 qui n'est pas susceptible de détermination moyennant les conditions aux limites. En fait ρ_0 sera connue dès que l'on se donne la valeur de $g(\rho)$ pour $\rho = \rho_1$, ρ_1 étant le rayon de la sphère limitant la matière. En conséquence $g(\rho_1)$ joue le rôle d'une nouvelle condition initiale, inconnue au modèle classique, et ρ_0 intervient dans la solution en tant que nouveau paramètre, un vrai paramètre caché. Aux différentes valeurs de ρ_0 correspondent des états statiques différents du champ gravitationnel.

La constante ρ_0 peut prendre des valeurs aussi bien positives que négatives et à chacune d'elles correspond une fonction $g(\rho)$ définie et indéfiniment dérivable sur la demi-droite $[\rho_0, +\infty[$, sa dérivée $g'(\rho) = \sqrt{1 - \frac{2\mu}{g(\rho)}}$ s'annulant pour $\rho = \rho_0$. Bien entendu seules les valeurs de $g(\rho)$ pour $\rho \geqslant \rho_1$, ($\rho_1 > 0$, $\rho_1 > \rho_0$), sont physiquement valables. Les graphes des différentes fonctions obtenues se déduisent de l'un d'eux par translations parallèles à l'axe de ρ (cf. Figure 1).

DEUXIEME CAS. La matière comporte une charge électrique e. Nous intégrons d'abord l'équation différentielle

$$\frac{dg}{d\rho} = \sqrt{Q(g)}\ , \qquad Q(g) = 1 - \frac{2A_1}{g} + \frac{A_2}{g^2}\ ,$$

ce qui donne l'équation

$$\alpha_0 + \sqrt{g^2 - 2A_1 g + A_2} + A_1 \mathrm{Log}\left(g - A_1 + \sqrt{g^2 - 2A_1 g + A_2}\right) = \rho,$$
$$\alpha_0 = \mathrm{Cte},$$

dont le premier membre, noté $E(g)$, est une fonction strictement croissante de g tendant vers $+\infty$ lorsque $g \to +\infty$. Par conséquent $E(g) = \rho$ définit une fonction unique $g = g(\rho)$ strictement croissante et tendant aussi vers $+\infty$ lorsque $\rho \to +\infty$. D'autre part une vérification immédiate montre que le rapport $\frac{\rho}{g(\rho)} = \frac{E(g)}{g}$, donc aussi le rapport $\frac{g(\rho)}{\rho}$, tend vers 1 quand $\rho \to +\infty$, de sorte que la métrique (4.1) tend vers la forme $c^2dt^2 - dx^2$ dans les mêmes conditions. Il en résulte que c s'identifie encore à la vitesse de la lumière. Soit P_0 le potentiel électrique. Dans le cas actuel où le champ est à symétrie sphérique, nous avons

$$P_{01} = -c\,\frac{dP_0}{d\rho}$$

et comparant à l'équation (3.12), qui s'écrit

$$P_{01} = -c\,\frac{d}{d\rho}\left(\pm c^2\sqrt{\frac{A_2}{k}}\,\frac{1}{g}\right),$$

nous obtenons

$$P_0 = \pm\left(c^2\sqrt{\frac{A_2}{k}}\right)\frac{1}{g(\rho)}$$

ou encore

$$P_0 = \pm c^2\sqrt{\frac{A_2}{k}}\left(\frac{1}{\rho} + \frac{\varepsilon(\rho)}{\rho}\right)$$

avec $\lim\limits_{\rho\to+\infty} \varepsilon(\rho) = 0$. Or, pour des distances ρ suffisamment grandes, P_0 doit être approximé par le potentiel de Coulomb $\frac{e}{\rho}$ à des infiniments petits près d'ordre supérieur à 1, et cela nous donne la possibilité de déterminer d'abord la constante A_2,

$$\pm c^2\sqrt{\frac{A_2}{k}} = e, \qquad A_2 = \frac{ke^2}{c^4} = \nu^2,$$

et ensuite une nouvelle expression, plus exacte que l'expression classique, du potentiel électrique, à savoir

$$P_0 = \frac{e}{g(\rho)}.$$

En ce qui concerne la détermination de la constante A_1, on remarque que le dernier terme dans l'expression de $\left(f(\rho)\right)^2 = c^2\left(g'(\rho)\right)^2$,

$$c^2 - \frac{2A_1c^2}{g(\rho)} + \frac{A_2c^2}{\left(g(\rho)\right)^2},$$

est négligeable devant $\dfrac{2A_1c^2}{g(\rho)}$ pour des grandes valeurs de $g(\rho)$, donc aussi pour des grandes valeurs de ρ, de sorte que l'approximation newtonienne s'obtient en posant $A_2 = 0$, c'est-à-dire en négligeant complètement la charge électrique, ce qui donne à nouveau

$$A_1 = \frac{km}{c^2} = \mu .$$

En définitive la fonction $g = g(\rho)$ s'obtient au moyen de l'équation

$$(4.2)\quad \alpha_0 + \sqrt{g^2 - 2\mu g + \nu^2} + \mu\mathrm{Log}\left(g - \mu + \sqrt{g^2 - 2\mu g + \nu^2}\right) = \rho$$

et ensuite la fonction $f = f(\rho)$ et le potentiel électrique $P_0 = P(\rho)$ sont donnés par les formules

$$f(\rho) = c\sqrt{1 - \frac{2\mu}{g(\rho)} + \frac{\nu^2}{\left(g(\rho)\right)^2}}, \qquad P_0 = \frac{e}{g(\rho)}$$

La constante α_0 qui intervient dans (4.2) est un nouveau paramètre inconnu à la théorie classique, un paramètre caché, dont la détermination nécessite une condition initiale, à savoir la valeur du rayon de courbure $g(\rho)$ sur la sphère limitant la matière.

Prenant en considération l'identité

$$g^2 - 2\mu g + \nu^2 = (g - \mu)^2 + \nu^2 - \mu^2 = (g - \mu)^2 + \frac{k}{c^4}(e^2 - km^2),$$

nous voyons que le comportement de la solution obtenue au voisinage du centre dépend du signe de $\nu^2 - \mu^2 = \frac{k}{c^4}(e^2 - km^2)$

a) <u>Considérons en premier lieu une source faiblement chargée</u>, c'est-à-dire telle que $|e| < m\sqrt{k}$. La fonction $g = g(\rho)$ satisfait alors à la condition $g \geqslant \mu + \sqrt{\mu^2 - \nu^2}$ et son minimum $\mu + \sqrt{\mu^2 - \nu^2}$ s'obtient pour la valeur $\rho_0 = \alpha_0 + \mu\mathrm{Log}\sqrt{\mu^2 - \nu^2}$ de ρ (cf. Figure 2). Elle est définie et indéfiniment dérivable sur la demi-droite $\left(\rho_0, +\infty\right($, mais, si ρ_1 désigne toujours le rayon de la sphère limitant la matière, seule sa restriction à la demi-droite $\left(\rho_1, +\infty\right($ a une signification physique. Bien entendu on a toujours l'inégalité stricte $\rho_1 > \rho_0$ même si $\rho_0 > 0$, en vertu de l'annulation de $f(\rho_0) = c\ g'(\rho_0)$, c'est-à-dire en vertu de la dégénérescence de la métrique pour $\rho = \rho_0$.

b) Considérons en deuxième lieu le cas où $|e| = m\sqrt{k}$. L'équation (4.2) se simplifie alors considérablement,

$$\alpha_0 + g - \mu + \mu\mathrm{Log}\left[2(g - \mu)\right] = \rho,$$

et montre que $\rho \to -\infty$ lorsque $g \to \mu$, pour toute valeur de α_0. Par conséquent la fonction $g = g(\rho)$ n'atteint pas sa borne inférieure μ. Elle est définie et indéfiniment dérivable sur toute la droite $]-\infty,+\infty[$, mais seule sa restriction à la demi-droite $[\rho_1,+\infty[$ est physiquement valable, (cf. Figure 3).

c) Considérons en troisième lieu une source fortement chargée, c'est-à-dire telle que $|e| > m\sqrt{k}$, ce qui entraîne

$$g^2 - 2\mu g + \nu^2 > 0 \quad \text{et} \quad g - \mu + \sqrt{g^2 - 2\mu g + \nu^2} > 0$$

quelle que soit la valeur de g. Alors (4.2) n'impose plus une borne inférieure strictement positive à la fonction $g(\rho)$ qui s'annule pour la valeur

$$\rho_0 = \alpha_0 + |\nu| + \mu\mathrm{Log}(|\nu| - \mu)$$

de ρ et se trouve ainsi définie sur la demi-droite $[\rho_0,+\infty[$. Or, bien que la valeur ρ_0 soit indispensable pour la détermination de la solution, la fonction $g(\rho)$ doit être considérée, du point de vue mathématique, uniquement sur la demi-droite ouverte $]\rho_0,+\infty[$, car sa dérivée

$$g'(\rho) = \sqrt{1 - \frac{2\mu}{g(\rho)} + \frac{\nu^2}{[g(\rho)]^2}} = \frac{\sqrt{[g(\rho)]^2 - 2\mu g(\rho) + \nu^2}}{g(\rho)}$$

donc aussi la fonction $f(\rho) = c\ g'(\rho)$, devient infinie

pour $\rho = \rho_0$. Bien entendu, le domaine de validité physique de $g(\rho)$ est encore plus restreint puisque le rayon ρ_1 de la sphère limitant la matière est toujours strictement supérieur à ρ_0 même si $\rho_0 > 0$. En effet, toute fonction $g(\rho)$ valable pour notre métrique s'annule uniquement pour la valeur $\rho = 0$ qui intervient dans la solution à l'intérieur de la matière.

Dans les cas précédemment étudiés où $|e| \leqslant m\sqrt{k}$, la dérivée de $g'(\rho)$ est strictement croissante sur tout le domaine de définition de $g(\rho)$. Il n'en est plus de même dans le cas actuel. D'après (3.11), nous avons

$$g''(\rho) = \frac{\mu}{[g(\rho)]^2} - \frac{\nu^2}{[g(\rho)]^3},$$

donc il existe une valeur unique $\rho_2 > \rho_0$ telle que $g''(\rho_2) = 0$, c'est-à-dire telle que

$$g(\rho_2) = \frac{\nu^2}{\mu} = \frac{e^2}{mc^2}.$$

La dérivée $g'(\rho)$ est strictement décroissante sur l'intervalle $]\rho_0,\rho_2]$ et strictement croissante sur la demi-droite $[\rho_2,+\infty[$ (cf. Figure 4). Par conséquent la fonction $g(\rho)$ présente une inflexion pour $\rho = \rho_2$ et la valeur

$$f(\rho_2) = c\sqrt{1 - \frac{km^2}{e^2}}$$

est le minimum de $f(\rho) = c\ g'(\rho)$.

Les sources fortement chargées au sens de notre terminologie trouvent leur réalisation physique dans le monde des particules, de sorte que l'étude de la fonction $g(\rho)$ pourrait être intéressante pour la microphysique. En particulier plus la masse m est faible, plus la réalisation de la valeur $\frac{e^2}{mc^2}$ de $g(\rho)$ à l'extérieur de la particule chargée est probable. C'est notamment le cas de l'électron pour lequel

$$\frac{|e|}{m\sqrt{k}} \simeq 2.02 \times 10^{21} \quad \text{et} \quad \frac{e^2}{mc^2} \simeq 2.75 \times 10^{-13} \text{cm.}$$

En ce qui concerne le proton, on a

$$\frac{|e|}{m\sqrt{k}} \simeq 1.1 \times 10^{18} \quad \text{et} \quad \frac{e^2}{mc^2} \simeq 1.5 \times 10^{-16} \text{ cm.}$$

Tous les noyaux d'atomes sont fortement chargés, mais on ne peut leur appliquer la théorie précédente qu'à titre d'approximation, car leurs champs s'écartent de la symétrie sphérique à laquelle se rattachent tous nos résultats.

5. Solutions avec $\lambda \neq 0$

En prenant toujours la distance au centre comme paramètre, ce qui revient à poser partout $\ell = 1$, nous allons intégrer l'équation différentielle $g' = \sqrt{Q(g)}$ avec constante cosmologique $\lambda = -\frac{\Lambda}{3}$ non nulle mais de valeur très faible. Alors les approximations déjà utilisées afin de déterminer les constantes c, A_1, A_2 seront valables pour des distances ρ pour lesquelles l'influence de la constante cosmologique est négligeable. Par conséquent c est encore la vitesse de la lumière, et l'on a aussi

$$A_1 = \mu = \frac{km}{c^2}, \quad A_2 = \nu^2 = \frac{ke^2}{c^4}, \quad P_0 = \frac{e}{g(\rho)},$$

de sorte que

$$Q(g) = 1 - \frac{2\mu}{g} + \frac{\nu^2}{g^2} + \lambda g^2 .$$

Il convient de noter qu'il existe maintenant des solutions dans l'espace vide, c'est-à-dire avec $\mu = \nu = 0$, donnant lieu à des métriques non pseudo-euclidiennes dont la nature dépend du signe de λ. Leur détermination est d'ailleurs immédiate.

a) Si $\mu = \nu = 0$ et $\lambda < 0$, on trouve

$$g(\rho) = \sqrt{-\frac{1}{\lambda}} \sin(\rho\sqrt{-\lambda}), \qquad 0 \leqslant \rho \leqslant \frac{\pi}{2}\sqrt{-\frac{1}{\lambda}} \quad ,$$

donc aussi

$$f(\rho) = cg'(\rho) = c \cos(\rho\sqrt{-\lambda}) .$$

La métrique spatio-temporelle correspondante dégénère sur la sphère $|x| = \frac{\pi}{2}\sqrt{-\frac{1}{\lambda}}$ et sa validité se limite ainsi à la boule $|x| < \frac{\pi}{2}\sqrt{-\frac{1}{\lambda}}$. Classiquement la solution dans l'espace vide avec $\Lambda = -3\lambda > 0$, appelée métrique de De Sitter, comporte deux singularités et est considérée comme compatible avec un espace sphérique. Nous voyons maintenant que l'introduction de la distance au centre comme paramètre prouve simplement que la métrique n'est pas valable sur tout l'espace $\mathbb{R}^3$, supposé vide de matière. Nous pensons que la dégénérescence sur la sphère $|x| = \frac{\pi}{2}\sqrt{-\frac{1}{\lambda}}$ n'est pas compatible avec l'absence de matière et d'impulsion-énergie, c'est-à-dire que la métrique obtenue est dépourvue de signification physique.

b) Si $\mu = \nu = 0$ et $\lambda > 0$, on obtient la solution

$$g(\rho) = \sqrt{\frac{1}{\lambda}} \operatorname{sh}(\rho\sqrt{\lambda}) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\lambda}}(e^{\rho\sqrt{\lambda}} - e^{-\rho\sqrt{\lambda}})$$

$$f(\rho) = c \operatorname{ch}(\rho\sqrt{\lambda}) = \frac{c}{2}(e^{\rho\sqrt{\lambda}} + e^{-\rho\sqrt{\lambda}})$$

qui est universellement valable. Notons que les fonctions $f(\rho)$ et $\frac{g(\rho)}{\rho}$, qui définissent la métrique (4.1), dépendent maintenant analytiquement de $\rho^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, de sorte qu'elles sont indéfiniment dérivables même à l'origine par rapport aux coordonnées x_1, x_2, x_3. D'autre part $f(\rho)$ et $g(\rho)$ croissent plus vite que toute puissance positive de ρ

lorsque $\rho \to +\infty$, donc la métrique spatio-temporelle qui leur est associée s'écarte de plus en plus de la métrique pseudo-euclidienne de Minkowski au fur et à mesure qu'on s'éloigne du centre. Un tel comportement n'est pas inadmissible et le seul problème qui se pose est de savoir s'il est compatible avec l'absence totale de matière et d'impulsion-énergie.

Venons maintenant au cas général où $\mu > 0$, $\nu \neq 0$, $\lambda \neq 0$.

Si l'on suppose $\lambda < 0$, il existe deux valeurs $\alpha \geqslant 0$ et $\beta > \alpha$ telles que $Q(g) > 0$ pour tout $g \in]\alpha,\beta[$ et $Q(g) < 0$ pour tout $g \in]\beta,+\infty[$. Nous sommes donc en présence du même phénomène mathématique que dans le cas où $\mu = \nu = 0$. La métrique résultant de l'intégration dégénère sur la sphère $|x| = \beta$. De plus elle n'est pas définissable pour $g \geqslant \beta$. Il ne semble donc pas possible de lui attribuer une signification physique. Aussi allons-nous nous limiter au cas où $\lambda > 0$.

Ceci dit, considérons la fonction

$$J(g) = g^2 Q(g) = \lambda g^4 + g^2 - 2\mu g + \nu^2 = \lambda g^4 + (g-\mu)^2 + \nu^2 - \mu^2$$

qui est strictement convexe et s'annule en conséquence pour deux valeurs réelles de g au plus. Puisque

$$J'(0) = -2\mu < 0, \quad J'(\mu) = 4\lambda\mu^3 > 0,$$

elle possède un minimum absolu se réalisant pour une valeur g_1 de l'intervalle $]0,\mu[$, de sorte qu'il convient de distinguer trois cas suivant que $J(g_1) < 0$ ou $J(g_1) = 0$ ou $J(g_1) > 0$.

a) Si $J(g_1) < 0$, la fonction $J(g)$ s'annule pour une valeur $g_0 > g_1$ et reste constamment positive sur la demi-droite $]g_0,+\infty[$. L'équation différentielle $g' = \sqrt{Q(g)}$ s'intègre alors sous la forme

$$\rho_0 + \int_{g_0}^{g} \frac{du}{\sqrt{Q(u)}} = \rho, \qquad g \geqslant g_0,$$

et fait ainsi apparaître le nouveau paramètre ρ_0. A chaque valeur de ρ_0 correspond une fonction $g = g(\rho)$ bien déterminée, définie et indéfiniment dérivable pour $\rho \in [\rho_0,+\infty[$. Mais la demi-droite de sa validité physique est plus restreinte. En effet, le rayon ρ_1 de la sphère limitant la matière est toujours strictement supérieur à ρ_0, même si $\rho_0 > 0$, car l'annulation de $f(\rho) = c\sqrt{Q[g(\rho)]}$ pour $\rho = \rho_0$ donne lieu à une dégénérescence de la métrique. Le comportement de la solution au voisinage du centre est donc le même que dans le cas où $\lambda = 0$ avec $|e| < m\sqrt{k}$.

b) Si $J(g_1) = 0$, la fonction $J(g)$ est strictement positive sur la demi-droite $]g_1,+\infty[$, mais l'intégrale

$$\int_{g_1}^{g} \frac{du}{\sqrt{Q(u)}}$$

n'est plus convergente car g_1 est une racine double de $J(g)$. Par conséquent nous devons choisir une valeur $g_0 > g_1$ et considérer le résultat de l'intégration sous la forme

$$\rho_0 + \int_{g_0}^{g} \frac{du}{\sqrt{Q(u)}} = \rho .$$

La solution se comporte au voisinage du centre tout comme celle déjà obtenue pour $\lambda = 0$ avec $|e| = m\sqrt{k}$.

c) Si $J(g_1) > 0$, la fonction $J(g)$ est partout strictement positive et nous pouvons en conséquence intégrer dans la demi-droite $[0,+\infty[$,

$$\rho_0 + \int_{0}^{g} \frac{du}{\sqrt{Q(u)}} = \rho .$$

Là encore on constate que la solution $g(\rho)$ se comporte au voisinage du centre comme celle déjà obtenue pour $\lambda = 0$ dans le cas où $|e| > m\sqrt{k}$.

En conclusion, les solutions avec constante cosmologique ne nous donnent rien de nouveau aux petites distances de la source. Par contre leur comportement est radicalement différent pour les grandes valeurs de ρ.

Nous savons déjà que, si $\lambda = 0$, les fonctions

$$\frac{g(\rho)}{\rho} \quad \text{et} \quad f(\rho) = c\, g'(\rho)$$

convergent respectivement vers 1 et c lorsque $\rho \to +\infty$, de sorte que la métrique spatio-temporelle (4.1) tend vers la forme pseudo-euclidienne $c^2dt^2 - dx^2$. Or dans le cas actuel où $\lambda > 0$, on voit par un calcul facile que, pour tout entier positif n, le rapport

$$\frac{g(\rho)}{\rho^n}$$

tend vers $+\infty$ lorsque $\rho \to +\infty$, et il en est de même du rapport

$$\frac{f(\rho)}{\rho^n}$$

puisque

$$f(\rho) = c\, g'(\rho) = c\sqrt{1 - \frac{2\mu}{g(\rho)} + \frac{\nu^2}{[g(\rho)]^2} + \lambda(g(\rho))^2}.$$

Considérons, pour fixer les idées, une source non chargée, donc telle que $\nu = 0$. Il ne s'agit pas d'une restriction véritable, car l'influence de la charge électrique est tout à fait négligeable déjà à des petites distances. Alors la fonction

$$Q(g) = 1 - \frac{2\mu}{g} + \lambda g^2$$

s'annule pour une valeur positive $g = 2\mu_1 < 2\mu$ et présente

une inflexion pour $g = \sqrt[3]{\frac{2\mu}{\lambda}}$ avec $Q\left(\sqrt[3]{\frac{2\mu}{\lambda}}\right) = 1$, donc désignant par ρ_λ la valeur unique de ρ pour laquelle $g(\rho_\lambda) = \sqrt[3]{\frac{2\mu}{\lambda}}$, nous voyons que le graphe de $g(\rho)$ possède une tangente parallèle à la première bissectrice pour $\rho = \rho_\lambda$ (cf. Figure 5), ce qui entraîne $f(\rho_\lambda) = c\, g'(\rho_\lambda) = c$. En conséquence notre métrique se rapproche de la métrique pseudo-euclidienne de Minkowski pour des distances de l'ordre de grandeur de ρ_λ, mais pour des distances d'ordre de grandeur plus élevé, elle s'en écarte de plus en plus vite. Bien qu'un tel comportement semble paradoxal à première vue, la métrique n'est pas dépourvue d'intérêt, puisque rien ne prouve à priori que le caractère pseudo-euclidien doit devenir de plus en plus marqué lorsque la distance croît au delà de l'ordre de grandeur des valeurs pour lesquelles il se trouve déjà approximativement réalisé.

Dans un travail antérieur(5), nous avons souligné la possibilité de déduire de la solution obtenue pour $\lambda > 0$ une formule rendant compte du décalage vers le rouge du spectre d'une source lointaine, assimilée en première approximation à une distribution à symétrie sphérique de matière de rayon ρ_1. En effet, un rayonnement monochromatique, émis de la surface de la source avec une longueur d'onde L, sera reçu à une distance $\rho > \rho_1$ avec une longueur d'onde $L + \Delta L$ telle que

$$\frac{L + \Delta L}{L} = \frac{f(\rho)}{f(\rho_1)}$$

d'où la formule du décalage spectral vers le rouge

$$z = -1 + \frac{f(\rho)}{f(\rho_1)}$$

qui s'écrit encore

$$(5.1)\quad z = -1 + \sqrt{\frac{1+\lambda\left(g(\rho)\right)^2}{1-\frac{2\mu}{g(\rho_1)}}}$$

en omettant les termes négligeables $\lambda\left(g(\rho_1)\right)^2$ et $\frac{2\mu}{g(\rho)}$.

Puisque $\lambda > 0$, z augmente indéfiniment, mais non linéairement, avec la distance ρ, de sorte que la formule (5.1) nous permet de rendre compte du décalage sans faire appel à des théories d'expansion ou à d'autres hypothèses ([3]). D'autre part, puisque z dépend non seulement de ρ et λ, mais aussi de ρ_1 et μ, ainsi que du nouveau paramètre ρ_0, la formule est compatible avec l'existence de décalages spectraux différents pour des sources se trouvant à la même distance de l'observateur. Notons aussi que, pour des distances relativement petites pour lesquelles l'influence de λ est négligeable, la contribution du nouveau paramètre ρ_0 au décalage peut être appréciable, car, pour une valeur donnée de ρ_1, $g(\rho_1)$ diminue lorsque ρ_0 augmente.

Pour des valeurs de ρ d'ordre de grandeur très élevé, 1 sera négligeable devant $\sqrt{\lambda}\, g(\rho)$, et nous pourrons alors utiliser la formule

$$z = \left(1 - \frac{2\mu}{g(\rho_1)}\right)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\lambda}\, g(\rho)$$

qui donne des décalages spectraux beaucoup plus forts que ceux prévus par la loi de Hubble aux très grandes distances.

La valeur de la constante λ est inconnue et toute tentative d'évaluation de son ordre de grandeur ne peut s'appuyer que sur des hypothèses incertaines. Supposons, pour fixer les idées, que les valeurs de $\mu = \frac{km}{c^2}$ et $\frac{2\mu}{g(\rho_1)}$ soient suffisamment petites de façon à être autorisé à utiliser la solution obtenue pour $\mu = \nu = 0$, à savoir

$g(\rho) = \lambda^{-\frac{1}{2}} sh(\rho\sqrt{\lambda})$, $f(\rho) = c\, ch(\rho\sqrt{\lambda})$, ce qui implique en particulier

$$z = -1 + \frac{ch(\rho\sqrt{\lambda})}{ch(\rho_1\sqrt{\lambda})} \text{ ou encore } z \simeq -1 + ch(\rho\sqrt{\lambda}),$$

étant donné que $ch(\rho_1\sqrt{\lambda}) \simeq 1$. Prenons $z = 0.02$. Alors l'équation $ch(\rho\sqrt{\lambda}) = 1 + z = 1.02$ donne $\rho\sqrt{\lambda} \simeq 0.2$, de sorte que l'on obtiendrait une estimation de $\lambda = \left(\frac{0.2}{\rho}\right)^2$, si l'on connaissait la distance ρ correspondant au décalage $z = 0.02$. Admettons que ρ est de l'ordre de grandeur donné par la relation de Hubble $\rho = \frac{cz}{H}$. Cette hypothèse est fondée uniquement sur le fait que l'ordre de grandeur de $z = 0.02$ est relativement faible de sorte que l'effet de la non linéarité doit être négligeable. D'ailleurs, elle n'est destinée qu'à donner un résultat purement indicatif faute de tout autre moyen de calcul. Ceci dit, étant donné que l'estimation de H varie entre $50\ \frac{km\ sec^{-1}}{Mpc} = \frac{1}{6} \times 10^{-17} sec^{-1}$ et $120\ \frac{km\ sec^{-1}}{Mpc} = \frac{2}{5} \times 10^{-17} sec^{-1}$ nous obtenons des valeurs de ρ entre 1.5×10^{26} cm et 3.6×10^{26} cm, et puisque

$$\left(\frac{0.2}{3.6 \times 10^{26}}\right)^2 \approx 0.3 \times 10^{-54} cm^{-2},$$

$$\left(\frac{0.2}{1.5 \times 10^{26}}\right)^2 \approx 1.77 \times 10^{-54} cm^{-2} ,$$

il en résulte pour λ une valeur de l'ordre de $10^{-54} cm^{-2}$. Compte tenu des hypothèses faites, il s'agit évidemment là d'une évaluation assez incertaine.

6. Mouvement d'une particule de masse non nulle dans le champ extérieur

Nous nous proposons maintenant d'étudier le mouvement d'une particule dans le champ que nous avons déterminé en prenant la distance au centre comme paramètre. L'utilisation des coordonnées ρ, ϕ, θ, c'est-à-dire de la métrique

$$ds^2 = f^2dt^2 - (d\rho^2 + g^2d\omega^2) \tag{6.1}$$

est évidemment autorisée dans ce cas et conduit facilement au moyen de calculs de routine aux intégrales premières des équations différentielles du mouvement. On constate d'abord que la particule se déplace dans un plan passant par l'origine, lequel peut être choisi comme plan $x_3 = 0$, ce qui donne la valeur constante $\theta = \frac{\pi}{2}$ sur l'orbite. On obtient ensuite les deux autres intégrales premières, à savoir d'une part *la loi de la vitesse angulaire*, qui remplace la loi classique des aires,

$$g^2\,\frac{d\phi}{ds} = \varepsilon = \mathrm{Cte},$$

d'autre part *l'intégrale de l'énergie*

$$m_1cf^2\,\frac{dt}{ds} + \frac{e_1e}{g} = E_0 = \mathrm{Cte},$$

qui s'écrit encore

$$m_1c^3Q(g)\frac{dt}{ds} + \frac{e_1e}{g} = E_0\ ,$$

en désignant par m_1 et e_1 respectivement la masse et la charge de la particule.

Soient $\rho = \rho(t)$ et $\phi = \phi(t)$ les deux fonctions du temps qui définissent le mouvement de la particule dans le plan $\theta = \frac{\pi}{2}$, et posons $G = G(t) = g\left(\rho(t)\right)$, ce qui donne $G' = G'(t) = g'(\rho)\rho'(t) = \left(\sqrt{Q\left[g(\rho(t))\right]}\right)\rho'(t)$, donc aussi

$$\rho' = \frac{G'}{\sqrt{Q(G)}} \quad \text{avec } G = G(t).$$

Nous allons montrer que la fonction G se détermine par des quadratures indépendamment de la forme de $g(\rho)$.

En vertu de la loi de la vitesse angulaire, (6.1) s'écrit

$$ds^2 = f^2dt^2 - d\rho^2 - g^2d\phi^2 = c^2Q(g)dt^2 - d\rho^2 - \frac{\varepsilon^2}{g^2}\,ds^2$$

d'où

$$\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{G^2}\right)ds^2 = c^2Q(G)dt^2 - \frac{G'^2}{Q(G)}\,dt^2 > 0$$

donc aussi

$$\frac{dt}{ds} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\varepsilon^2}{G^2}}{c^2Q(G) - \frac{G'^2}{Q(G)}}}$$

et l'intégrale de l'énergie donne

$$\frac{cQ(G)}{\sqrt{c^2Q(G) - \frac{G'^2}{Q(G)}}} = \frac{1}{m_1c^2}\,\frac{E_0 - \frac{e_1e}{G}}{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2}{G^2}}} \tag{6.2}$$

ce qui entraîne en particulier

$$E_0 - \frac{e_1e}{G} > 0.$$

Désignant par $H(G)$ le deuxième membre de (6.2) et résolvant par rapport à G'^2, on obtient

$$G'^2 = \frac{c^2\left(Q(G)\right)^2}{\left(H(G)\right)^2}\left(\left(H(G)\right)^2 - Q(G)\right)\ ,$$

d'où la condition $\left(H(G)\right)^2 - Q(G) \geqslant 0$, qui s'écrit explicitement

$$E_0 \geqslant \frac{e_1e}{G} + m_1c^2\sqrt{\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{G^2}\right)Q(G)}$$

et qui permet de déterminer les intervalles décrits par les valeurs admissibles de G. Pour chacun de ces intervalles, la détermination de $G = G(t)$ se fait par des quadratures moyennant les équations différentielles

$$(6.3)\qquad \frac{dG}{dt} = \pm \frac{cQ(G)}{H(G)} \sqrt{\left(H(G)\right)^2 - Q(G)}$$

qui ne dépendent pas de la forme de $g(\rho)$.

La détermination de la fonction $\rho(t)$ est maintenant immédiate. Si l'on néglige la constante cosmologique, il suffit de remplacer, dans le premier membre de (4.2), g par $G(t)$, ce qui donne

$$(6.4)\qquad \rho(t) = \alpha_0 + \sqrt{\left(G(t)\right)^2 - 2\mu G(t) + \nu^2}$$
$$+ \mu \operatorname{Log}\left(G(t) - \mu + \sqrt{\left(G(t)\right)^2 - 2\mu G(t) + \nu^2}\right) .$$

Si l'on veut tenir compte du cas général où $\lambda > 0$, on utilisera l'équation déjà obtenue

$$\rho_0 + \int_{g_0}^{g} \frac{du}{\sqrt{Q(u)}} = \rho \quad ,$$

ce qui donnera

$$(6.5)\qquad \rho(t) = \rho_0 + \int_{g_0}^{G(t)} \frac{du}{\sqrt{Q(u)}} \quad .$$

En ce qui concerne la fonction $\phi(t)$, on l'obtient au moyen de la loi de la vitesse angulaire, qui s'écrit maintenant

$$(6.6)\qquad \frac{d\phi}{dt} = \frac{\varepsilon}{G^2}\frac{ds}{dt} = \frac{\varepsilon}{G^2}\sqrt{\frac{c^2Q(G) - \frac{G'^2}{Q(G)}}{1 + \frac{\varepsilon^2}{G^2}}} = \frac{\varepsilon}{G^2}\,\frac{cQ(G)}{H(G)\sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2}{G^2}}}$$

en vertu de (6.2). Il en résulte

$$\phi(t) = c\varepsilon \int_{t_0}^{t} \frac{Q\left(G(u)\right)du}{G(u)H\left(G(u)\right)\sqrt{\left(G(u)\right)^2 + \varepsilon^2}} + \text{Cte} .$$

Bien entendu, si $\varepsilon = 0$, $\phi(t)$ se réduit à une constante (mouvement radial).

La formule générale (6.5), donc aussi, en particulier, la formule (6.4), appelle une remarque essentielle.

Pour des constantes fixées ε, E_0, et des fonctions fixées $G(t)$, $\phi(t)$, on n'obtient pas un seul mouvement, mais un ensemble de mouvements possibles associés aux différents états statiques obtenus pour les diverses valeurs du nouveau paramètre ρ_0. Considérant deux valeurs ρ_0 et $\tilde{\rho}_0$ de ce paramètre et les deux mouvements correspondants, définis respectivement par les fonctions $\rho(t)$ et $\tilde{\rho}(t)$, on a évidemment $\tilde{\rho}(t) - \rho(t) = \tilde{\rho}_0 - \rho_0$, de sorte que chacun d'eux résulte de l'autre par un déplacement radial constant. Il est cependant sûr qu'une telle distinction nette entre les deux mouvements ne doit pas se produire à des grandes distances de la source. Cela prouve déjà que le choix de la distance au centre comme paramètre ne conduit pas à une image parfaite du champ gravitationnel.

REMARQUE. Si $\varepsilon \neq 0$, c'est-à-dire si le mouvement n'est pas radial, divisant (6.3) et (6.6), on obtient l'équation différentielle

$$\pm\varepsilon \frac{dG}{d\phi} = G\sqrt{\left(\frac{E_0 - \frac{e_1 e}{G}}{m_1 c^2}\right)^2 G^2 - (G^2 + \varepsilon^2)Q(G)}$$

qui permet d'exprimer ϕ en fonction de G et réciproquement. Elle convient donc à la détermination de l'orbite en tant que courbe géométrique.

7. Mouvement d'une particule de masse nulle à l'extérieur de la source

Puisque les fonctions définissant le mouvement satisfont maintenant à la condition $ds^2 = 0$, nous écrivons les équations du mouvement sous leur forme générale

$$\frac{d^2u^i}{dv^2} + \sum \Gamma^i_{jk} \frac{du^j}{dv} \frac{du^k}{dv} = \alpha(v) \frac{du^i}{dv} ,$$

en introduisant un paramètre auxiliaire $v \neq s$. On constate ensuite que l'on peut choisir les coordonnées ϕ, θ de façon que l'on ait $\theta = \frac{\pi}{2}$ sur la trajectoire, de sorte que

$$(7.1) \quad ds^2 = f^2dt^2 - d\rho^2 - g^2d\phi^2 = c^2Q(g)dt^2 - d\rho^2 - g^2d\phi^2 = 0$$

En ce qui concerne la détermination des fonctions $\rho(t)$ et $\phi(t)$ qui définissent le mouvement de la particule dans le plan $\theta = \frac{\pi}{2}$, on distingue deux cas.

PREMIER CAS. Le mouvement est radial, c'est-à-dire que la fonction $\phi(t)$ se réduit à une constante. Alors nous obtenons $\rho(t)$ par des quadratures en intégrant l'équation

$$\frac{d\rho}{\sqrt{Q\left(g(\rho)\right)}} = \pm c\, dt .$$

DEUXIEME CAS. Le mouvement n'est pas radial. Alors on peut choisir le paramètre auxiliaire de façon que $gd\phi = dv$, ce qui permet de conduire facilement les calculs pour aboutir à l'intégrale première

$$\frac{cQ(G)}{G\sqrt{c^2Q(G) - \frac{G'^2}{Q(G)}}} = \frac{1}{a} ,$$

en désignant par a une longueur constante et par G la fonction $G(t) = g\left(\rho(t)\right)$. Il en résulte

$$G'^2 = c^2\left(Q(G)\right)^2\left(1 - \frac{a^2Q(G)}{G^2}\right)$$

d'où la condition

$$\frac{G^2}{a^2} \geqslant Q(G)$$

qui détermine les demi-droites décrites par les valeurs admissibles de G. Pour chacune d'elles, on peut déterminer $G(t)$ par des quadratures indépendamment de la forme de $g(\rho)$ moyennant les équations différentielles

$$(7.2) \quad \frac{dG}{dt} = \pm cQ(G)\sqrt{1 - \frac{a^2Q(G)}{G^2}} .$$

Ensuite, tenant compte de (7.1), on trouve l'équation

$$(7.3) \quad \frac{d\phi}{dt} = \pm \frac{1}{G}\sqrt{c^2Q(G) - \frac{G'^2}{Q(G)}} = \frac{caQ(G)}{G^2} , \quad G = G(t),$$

qui détermine $\phi(t)$ par une intégration.

Finalement pour obtenir la fonction $\rho(t)$, on n'a qu'à remplacer, dans l'équation (4.2) ou dans l'équation plus générale

$$\rho_0 + \int_{g_0}^{g} \frac{du}{\sqrt{Q(u)}} = \rho ,$$

g par $G(t)$, ce qui donne

$$\rho(t) = \rho_0 + \int_{g_0}^{G(t)} \frac{du}{\sqrt{Q(u)}} .$$

Nous voyons encore que, pour une constante a fixée et des fonctions $G(t)$, $\phi(t)$ fixées, nous avons une infinité de mouvements possibles associés aux diverses valeurs de ρ_0, c'est-à-dire aux divers états du champ gravitationnel. En comparant deux quelconques de ces mouvements, on constate que chacun d'eux résulte de l'autre par un déplacement radial constant.

Notons encore que, en divisant (7.2) et (7.3), nous obtenons l'équation différentielle

$$\frac{dG}{d\phi} = \pm G\sqrt{\frac{G^2}{a^2} - Q(G)}$$

qui permet d'exprimer ϕ en fonction de G et réciproquement. Elle peut être utilisée pour le calcul de la déviation des rayons lumineux.

Il serait intéressant de détailler les calculs esquissés précédemment pour obtenir des renseignements précis sur le mouvement de la particule, mais il s'agit là d'un travail qui dépasse le cadre du présent article. D'ailleurs l'étude complète du problème ne peut être abordée que dans le cadre des états non stationnaires du champ gravitationnel.

RÉFÉRENCES

(1) A. Einstein, "The Meaning of Relativity", Princeton University, 1950.

(2) L. Landau, E. Lifchitz, "Théorie des champs", Moscou.

(3) I.E. Segal, "Theoretical foundations of the chronometric cosmology", Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., Vol. 73, n° 3, pp. 669-673, March 1976.

(4) N. Stavroulakis, "A Statical Smooth Extension of Schwarzschild's Metric", Lettere al Nuovo Cimento, 26 Ottobre 1974, série 2, Vol. 11, pp. 427-430.

(5) N. Stavroulakis, "Décalage spectral vers le rouge et solutions régulières en symétrie sphérique", Journées Relativistes, 1978, pp. 23-26.

(6) H. Weyl, "Space, Time, Matter", Dover publications inc.

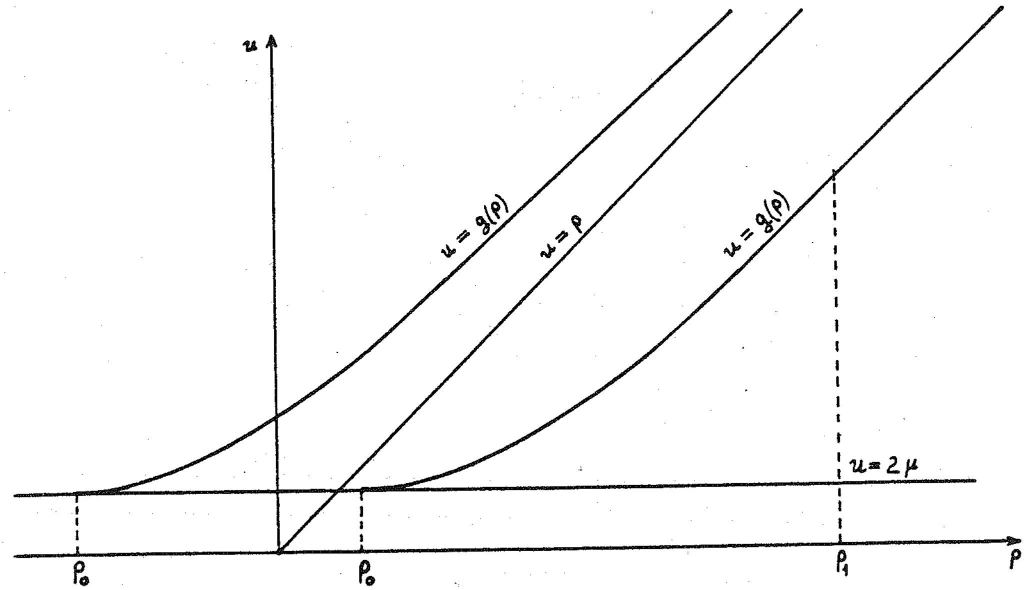

Figure 1

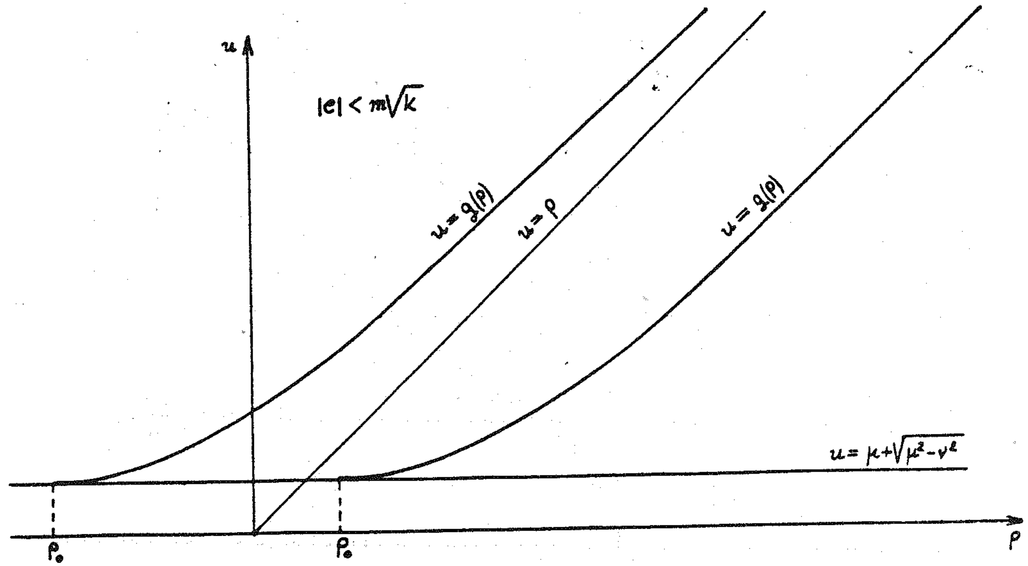

Figure 2

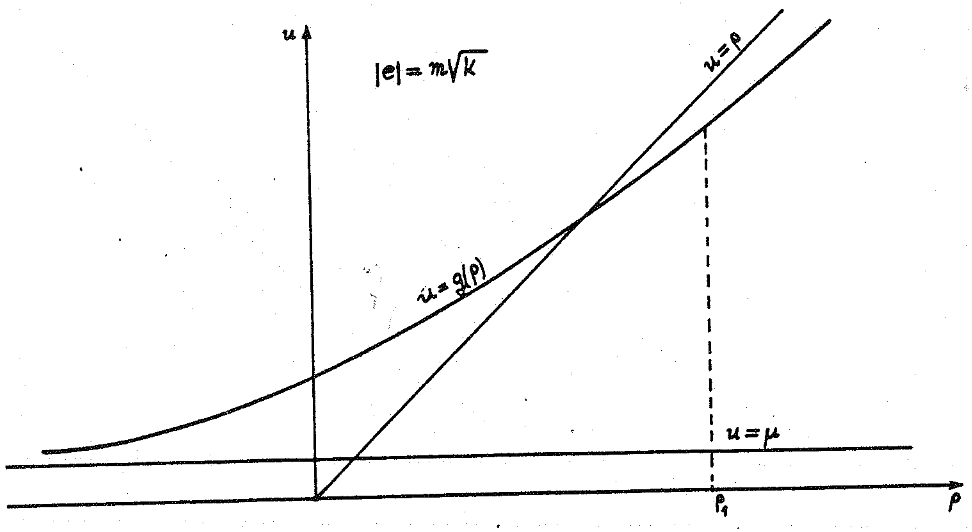

Figure 3

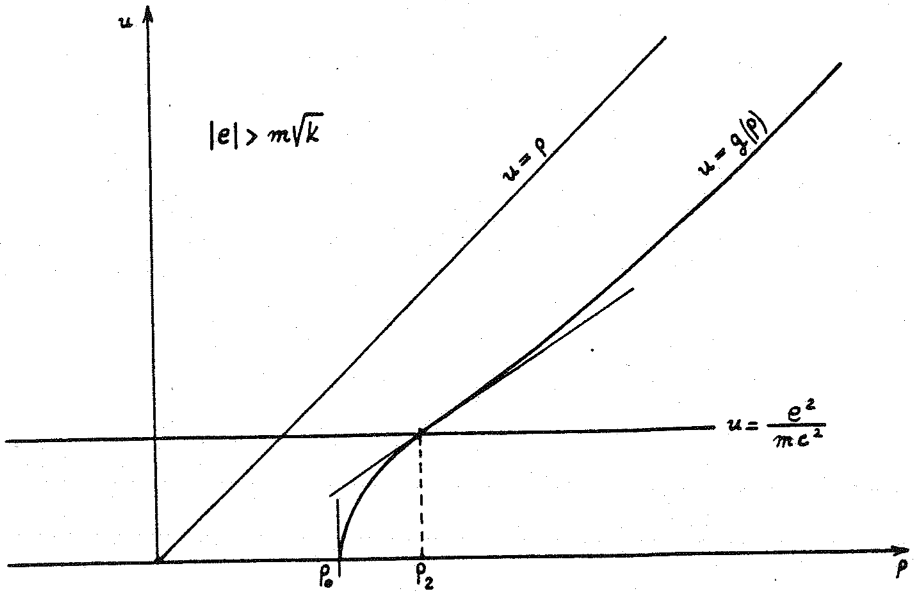

Figure 4

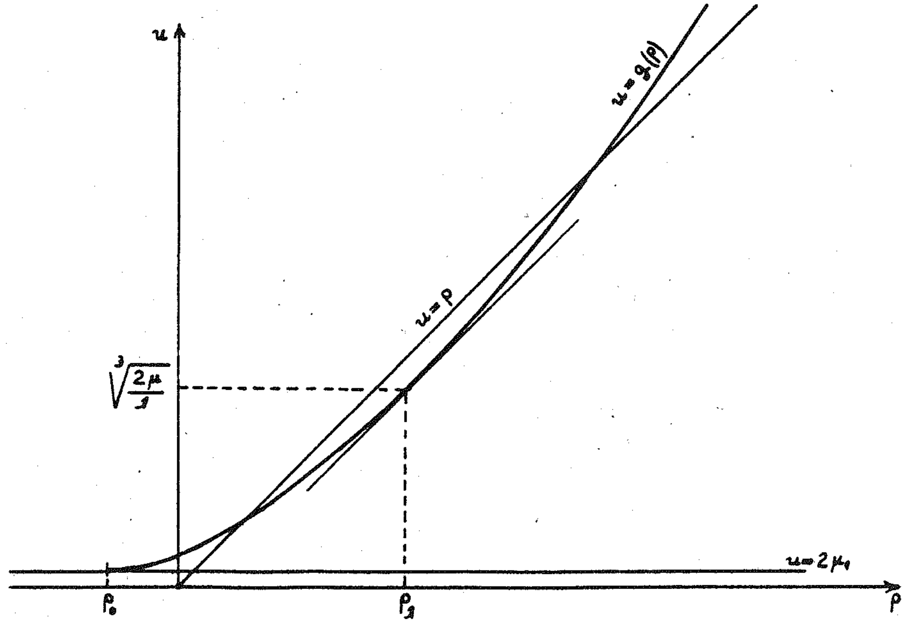

Figure 5