Annales de la Fondation Louis de Broglie,
Vol. 8, n°1, 1983

QUELLE EST LA DIMENSION DE L'ESPACE TEMPS ?

par Claude DAVIAU

La Lande - Pouillé les Coteaux

44150 ANCENIS

(manuscrit reçu le 18 Décembre 1981)

Résumé : Une analyse des difficultés, pour toute théorie de champs continus, de rendre compte des phénomènes de spins, et l'étude de la cosmologie relativiste amènent à proposer un modèle d'espace-temps pentadimensionnel dans lequel on retrouve très simplement l'électromagnétisme de De Broglie.

1. LA MECANIQUE ONDULATOIRE ET LE SPIN DE L'ELECTRON

La conception initiale des ondes de matière de De Broglie se caractérise par :

- le caractère physique de l'onde, sa propagation dans l'espace physique usuel de la relativité restreinte,
- le guidage du corpuscule par l'onde associée, la phase de la vibration interne du corpuscule restant constamment égale à la phase de l'onde associée à la particule,
- la nature des ondes de matière n'est pas précisée, mais le photon étant doué d'une masse propre, rien ne s'oppose à la nature électromagnétique de l'onde.

Deux ans plus tard, en 1926, Schrödinger publiait ses travaux et écrivait l'équation des ondes, pour une particule et pour un système de particules. Mais la théorie de Schrödinger n'est pas relativiste ; elle utilise un espace de configuration abstrait ; elle abandonne l'idée de la localisation de la particule dans l'onde et la règle de l'accord des phases.

Pourquoi les idées de l'école de Copenhague ont-elles alors refoulé celles de l'inventeur des ondes de matière ? On met généralement en avant le problème des systèmes de particules, et l'aspect probabiliste de la mécanique quantique. On ne doit pas oublier qu'en 1925, un an plus tôt, Uhlenbeck et Goudsmit supposèrent que l'électron possédait un moment cinétique intrinsèque, le spin, de valeur propre $1/2\ \hbar$. Dès 1927 Dirac proposait son équation qui rendait compte de l'existence du spin et affinait le calcul des niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène.

Or dans cette théorie la nature de l'onde était tout à fait différente : au lieu d'un nombre complexe en chaque point, il y en avait maintenant quatre ; donc quatre amplitudes, et quatre phases. En fait la situation est encore plus bizarre, nous y reviendrons. Cette situation a conforté l'idée que l'on travaillait dans un espace "abstrait", que la nature de l'onde n'importe pas pourvu que l'on sache calculer les valeurs propres et les probabilités qui sont les seules choses accessibles.

La mécanique quantique devient alors formalisée, on énonce des postulats, comme par exemple : (1) "A un instant t fixé, l'état d'un système est donné par la donnée d'un ket $|\psi(t)\rangle$ appartenant à l'espace des états $\mathcal{E}$".

L'espace des états dans la théorie de Schrödinger, est formé de fonctions de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{C}$, de

carré sommable sur $\mathbb{R}^3$ à chaque instant t. On y définit un produit scalaire hermitien, des opérateurs linéaires et leurs valeurs propres. A un état physique correspond une fonction d'onde. Dans la théorie de Dirac, l'espace des états est un ensemble de fonctions de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{C}^4$: $(x, y, z, t) \to (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$, telles que, pour tout t, $|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}^3$. Lorsqu'il y a plus d'une particule la théorie de Schrödinger utilise des fonctions de $\mathbb{R}^{3n+1}$ dans $\mathbb{C}$, de carré sommable sur $\mathbb{R}^{3n}$ à chaque instant t ; et la théorie de Dirac ne dit rien.

C'est sur ces fonctions qu'agissent les opérateurs qui, en mécanique quantique, se substituent aux grandeurs classiques. "Toute grandeur physique mesurable est décrite par <u>un</u> opérateur A agissant dans $\mathcal{E}$".

La situation est-elle si simple dans le cas du spin ?

2. LE GROUPE SO(3) EN MECANIQUE QUANTIQUE

Aux variables de position x et d'impulsion p_x sont associés les opérateurs multiplication par x et $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$, en sorte que l'on obtient, à partir de $\ell_x = y\, p_z - z\, p_y$ les relations de commutation suivantes pour les opérateurs de moment cinétique :

$$\text{(I)} \quad [L_x, L_y] = i\hbar L_z \ ; \ [L_y, L_z] = i\hbar L_x \ ; \ [L_z, L_x] = i\hbar L_y \ .$$

Ces relations sont à un facteur près celles qui lient les générateurs (les opérateurs infinitésimaux) du groupe des rotations vectorielles de l'espace à trois dimensions, noté habituellement SO(3). Si l'on désigne par I, J, K, ces générateurs, on a :

$$[I,J] = K \ ; \ [J,K] = I \ ; \ [K,I] = J \ .$$

Or on a l'habitude, en mécanique quantique d'appeler opérateur de spin tout objet qui vérifie les relations (I). C'est un peu comme si on devait appeler nombres entiers toutes les choses que l'on sait ajouter.

Les relations de commutation, c'est-à-dire les règles de calcul dans l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie ne caractérisent pas un groupe précis. Deux groupes de Lie tout à fait distincts peuvent avoir la même algèbre de Lie, les mêmes "opérateurs infinitésimaux". Cela tient à la distinction entre propriétés locales et propriétés globales. Un cylindre et un plan sont localement très semblables et globalement tout à fait différents.

Le groupe des relations So(3) a la même algèbre de Lie que le groupe Su(2), mais il n'y a pas identité globale entre ces deux groupes. Il existe un homomorphisme de groupes de Lie de SU(2) dans SO(3), que nous noterons ϕ $u \in SU(2)$ $u \overset{\phi}{\to} r$ $r \in SO(3)$; et si $u' \overset{\phi}{\to} r'$
$U \times u' \to r.r'$

Et ϕ est continue. Le noyau de cet homomorphisme est $\{1, -1\}$; ϕ n'est pas bijective. Si $r = \phi(u)$, $\phi^{-1}(r) = \{u\ ;\ -u\}$. Deux éléments opposés de SU(2) ont pour image la même rotation de SO(3).

La mécanique quantique explique généralement qu'à toute transformation r du système physique doit être associé UN opérateur R agissant sur l'espace des états, opérateur défini à une phase près puisque la multiplication par un facteur $e^{i\phi}$ ne modifie pas le résultat des calculs. On a donc besoin de ce que l'on appelle représentation projective, c'est-à-dire un homomorphisme f du groupe de transformation étudié dans un groupe G d'opérateurs agissant sur l'espace des états :

$$r \overset{f}{\to} R \qquad\qquad r.r' \overset{f}{\to} e^{i\phi} R.R'$$
$$r' \to R'$$

On a donc pour les rotations, le schéma suivant :

$$\underbrace{SU(2) \overset{\phi}{\to} SO(3) \overset{f}{\to} G}_{fo\phi}$$

La composition des homomorphismes permet, à partir de toute "représentation" f de SO(3) de fabriquer une "représentation" g = foϕ de SU(2). Mais ce n'est pas ce schéma qui est utilisé pour les représentations dites de "spin demi-entier", c'est le schéma inverse

$$SO(3) \overset{\phi^{-1}}{\to} SU(2) \overset{g}{\to} G \qquad r \overset{\phi^{-1}}{\nearrow} u \overset{g}{\to} M$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \searrow -u \to -M$$

Il en résulte qu'à une transformation du système sont associés DEUX opérateurs agissant sur l'espace des états. La situation est rigoureusement la même dans le cas du groupe de Lorentz qui est l'image du groupe SL (2,C) par un homomorphisme de noyau $\{1\ ;\ -1\}$. Les représentations utilisées sont celles de SL (2,C) et non pas celles du groupe de Lorentz. Or si les homomorphismes , f et g sont continus, il n'en est pas de même de ϕ^{-1} qui n'est pas une fonction, et donc a fortiori qui n'est pas une fonction continue.

La comparaison de l'onde observée par deux observateurs en mouvement était à la base de la découverte des lois de la mécanique ondulatoire des corpuscules par De Broglie. Comment concevoir que l'onde vue par l'un des observateurs se dédouble en deux ondes de signes opposés pour l'autre ? Et pourtant la diffraction des neutrons existe et doit être expliquée.

La discontinuité inévitable dès que l'on utilise les spineurs de Pauli ou de Dirac est sans doute le principal obstacle qui a empêché l'aboutissement de toutes les tentatives faites pour réconcilier les théories de champs continus et la mécanique quantique.

3. LE PROBLEME DE LA GEOMETRIE SE REPOSE A NOUVEAU

Le groupe des rotations SO(3) est "trop petit", c'est le groupe SU(2) qui est utilisé par la mécanique de l'électron. Réconcilier cela avec la vision de l'onde se propageant dans l'espace "physique" qu'a Louis de Broglie suppose forcément que l'on examine en détail ce qu'est l'espace physique.

Cette question ne pouvait avoir de sens à l'époque où la géométrie euclidienne paraissait vraie, évidente, logique, inattaquable. Nous savons aujourd'hui que l'on peut concevoir d'autres géométries tout aussi "vraies". Einstein nous a appris que l'espace n'est pas tout à fait ce que l'on croyait. En reliant la courbure d'espace-temps à la gravitation, il nous a enseigné que la géométrie de l'espace physique n'est pas une branche des mathématiques mais de la physique : les propriétés géométriques de l'espace sont modifiées par les masses des corps matériels qui s'y meuvent.

La physique de l'électron nous dit que le groupe de Lorentz n'est pas le bon, qu'il est trop "petit", que notre vision actuelle de l'espace-temps est inadéquate. Si l'on admet cela, reste à voir ce que l'on va mettre à la place.

4. DE NOMBREUSES TENTATIVES ONT ETE FAITES ELARGISSANT LE CADRE DE LA GEOMETRIE

Des théories ont été proposées pour relier l'électromagnétisme à la relativité générale. Celle de Kaluza, étudiée aussi par L. de Broglie, utilise une variété riémanienne auxiliaire à cinq dimensions. Les différentes familles de trajectoires correspondant aux valeurs de e/m sont données par les géodésiques de la variété auxiliaire. Citons, dans le même sens, la théorie de Jordan, les théories projectives, celles de Podolanski à six dimensions, etc.

Si les théories précédentes sont bien connues, il est tout aussi intéressant de constater que, dans le domaine de la microphysique, des tentatives récentes vont dans le même sens.

Horwitz et Piron (2) utilisent un nouveau paramètre τ, en plus des variables (p^μ, q^μ) pour décrire l'évolution d'un système, paramètre qui est appelé temps historique par opposition au temps t appelé temps géométrique. Et pour eux, τ n'est pas seulement un paramètre mathématique auxiliaire comme ceux utilisés dans le calcul des fonctions de Green, c'est le paramètre décrivant la véritable évolution du système.

La méthode suivie par M. Blaquière (3) impose de considérer l'espace-temps usuel comme un hyperplan de dimension 4 dans un espace de dimension 5. Deux variables temps différentes doivent être prises en considération, le temps de l'observateur et le temps indiqué par la petite horloge qu'est le point source.

Un problème se pose immédiatement, problème qui a beaucoup gêné les théories de Kaluza ou Jordan : si l'espace temps physique est réellement à cinq dimensions, pourquoi n'en percevons-nous que 4 ? Le fait que l'espace physique a trois dimensions et non pas quatre est tellement évident que les théoriciens précédemment cités devaient poser une condition a priori limitant les mouvements possibles. Comment pourrait-il se faire qu'une quatrième dimension d'espace puisse exister sans être immédiatement perceptible ?

5. SOLUTION DANS LE CADRE DE LA PHYSIQUE ACTUELLE

Y a-t-il des phénomènes physiques dont la perception n'est pas immédiate ? La réponse est évidemment oui. La terre nous entraîne en ce moment dans une course folle dans l'espace, et ce déplacement très rapide n'est pas perçu par nos sens. C'est pourquoi il fut aussi difficile de passer du concept de la terre centre du monde à celui d'une terre en mouvement dans l'espace. Si tout l'univers qui nous entoure est, de la même façon, en mouvement dans une quatrième direction d'espace, la perception de ce mouvement n'a aucune raison d'être immédiate.

Lorsque Einstein a appliqué les lois de la gravitation à l'univers pris dans sa totalité, il a, partant d'hypothèses simples d'homogénéité et d'isotropie, démontré que l'espace physique était une hypersphère dans un espace à quatre dimensions. Remarquons en passant que le groupe des déplacements sur cette hypersphère est le groupe SO(4) localement identique à SO(3) X SU(2).

Le modèle statique d'Einstein ne rendant pas compte du mouvement apparent d'éloignement des galaxies a été remplacé par des modèles qui reprennent les hypothèses d'isotropie et d'homogénéité, mais en abandonnant le caractère statique du modèle. Ces modèles utilisent la métrique de Robertson :

$$ds^2 = c^2dt^2 - R(t)^2[d\chi^2 + \sigma^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)]$$

avec $\sigma(\chi) = \sin\chi$, ou χ, ou $sh\chi$ suivant que l'on a un modèle elliptique, euclidien ou hyperbolique. Les premières recherches inclinaient vers une densité faible de la matière, donc vers le modèle hyperbolique.

Les travaux actuels attribuant une possible masse non nulle aux neutrinos, ou l'étude des amas de galaxies tendent à réévaluer en hausse la densité moyenne de l'univers ; il parait aujourd'hui probable que le modèle elliptique s'imposera.

J.M. Souriau(4) propose, en ce sens, un modèle d'univers aux paramètres bien définis, dans lequel la courbure de l'univers et la constante cosmologique sont positives. A un instant donné, l'espace est une hypersphère

dans laquelle apparait une stratification parallèle à l'équateur.

Dans le modèle précédent, considérons un point M de coordonnées $(\chi;\theta,\phi)$ à l'instant t. Il coïncide avec le point de l'espace quadridimentionnel de coordonnées :

$$(R \sin\chi \sin\theta \sin\phi \; ; \; R \sin\chi \sin\theta \cos\phi \; ; \; R \sin\chi \cos\theta \; ; \; R \cos\chi).$$

A un instant ultérieur t' le point M coïncide avec un autre point N' de coordonnées :

$$(R' \sin\chi \sin\theta \sin\phi \; ; \; R' \sin\chi \sin\theta \cos\phi \; ; \; R' \sin\chi \cos\theta \; ; \; R' \cos\chi).$$

Le point M est donc animé d'un mouvement purement radial de vitesse $v = \frac{dR}{dt}$.

A nos mouvements usuels sur l'hypersphère s'ajoute ainsi un mouvement très rapide dû à l'expansion de l'univers. Quelle est la vitesse de ce mouvement ? Si l'on suppose que la vitesse v est celle de la lumière, et si l'on attribue à la constante de Hubble $H = \frac{R'(t)}{R(t)}$ une valeur approximative de 100 km/s/Mpc, on obtient un rayon actuel R de 3000 Mpc, voisin de 10^{10} années de lumière, ce qui est tout à fait possible.

6. CONSEQUENCES POUR LA MICROPHYSIQUE

L'équation des ondes de l'électrodynamique classique :

$$\text{(A)} \quad \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) f(x,y,z,t) = 0$$

peut être remplacée, dans l'espace pentadimentionnel par l'équation suivante :

$$\text{(B)} \quad \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial u^2}\right) f(x,y,z,u,t) = 0,$$ en

appelant u la variable supplémentaire.

En mécanique quantique, en l'absence de champ, l'équation des ondes est obtenue à partir de l'hamiltonien par la substitution :

$m\, v_x : \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$; $m\, v_z : \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y}$

$m\, v_y : \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y}$; $E : i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$

Si l'on admet que le mouvement radial s'effectue à la vitesse c, on est conduit à proposer la règle de correspondance suivante :

$m_0 c : \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial u}$

en appelant m_0 la masse propre au repos de la particule.

On garde aussi la formule

$\psi = a_0\, e^{-\frac{2\pi i}{h}(Et - \vec{p}.\vec{r})}$, mais on y remplace

$\vec{p} = (m\, v_x, m\, v_y, m\, v_z)$ et $\vec{r} = (x,y,z)$ par

$\vec{p} = (m\, v_x, m\, v_y, m\, v_z, m_0 c)$ et $\vec{r} = (x,y,z,u)$.

Si alors on sépare la variable u en posant

$$\psi = \psi(x,y,z,t)e^{-\frac{2\pi i}{h}m_0 c\, u}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial u} = -\frac{2\pi i}{h}m_0 c\,\psi = \frac{m_0 c}{i\hbar}\psi$$

$\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} = -\frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\psi$ et l'équation (B) devient :

$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\right)\psi = 0$, donc en posant

$\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ on obtient : $\Box\psi + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\psi = 0.$

L'équation de Klein-Gordon apparait ainsi comme la transposition de l'équation des ondes électromagnétiques dans l'espace temps pentadimensionnel. Dans ce modèle, la particule au repos n'existe pas, puisque toutes les "particules" sont animées d'un mouvement de vitesse c.

La formule donnant l'impulsion parait peu symétrique puisqu'y interviennent deux masses, m et m_0 ; masse propre au repos. Or si l'on admet que la vitesse totale de la particule est c dans l'espace quadridimensionnel, si l'on pose $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ et si l'on note v_u la vitesse suivant la direction u, on a alors :

$$c^2 = v_u^2 + v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v_u^2 + v^2,$$

donc $v_u^2 = c^2 - v^2 = c^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$

$v_u = c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = c\sqrt{1-\beta^2}$ avec $\beta = \frac{v}{c}$

Or on sait que $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$. On a donc

$m_0 c = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}c\sqrt{1-\beta^2} = m\, v_u$ et par conséquent

$\vec{p} = (m\, v_x, m\, v_y, m\, v_z, m\, v_u)$.

Nous sommes partis de l'idée que le mouvement d'expansion se faisait à la vitesse c. Nous arrivons ici à l'idée que, si la vitesse totale de la particule est c, la vitesse suivant la direction u est $v_u = c\sqrt{1-\beta^2}$. Une particule animée d'une vitesse v s'écarte ainsi, suivant la direction u, d'un laboratoire "immobile", c'est-à-dire animé suivant la direction u, de la vitesse c. Mais comme tout laboratoire galiléen est, par rapport aux étoiles lointaines, au repos, c'est-à-dire selon ces hypothèses animé d'une vitesse c suivant la direction u, il est impossible, dans tout laboratoire galiléen de mesurer des distances suivant la direction u, donc de percevoir l'éloignement d'une particule dans la direction u.

La norme du vecteur $\vec{p}$ est donnée en dynamique d'Einstein par

$$p_\mu p^\mu = (p^0)^2 - \sum_{q=1}^{3} (p_q)^2$$

. On doit remplacer cette formule dans l'espace temps pentadimensionnel par

$$p_\mu p^\mu = (p^0)^2 - \sum_{q=1}^{4} (p_q)^2 = m^2c^2 - m^2(v_x^2+v_y^2+v_z^2+v_u^2)$$
$$= m^2c^2 - m^2c^2 = 0$$

La formule $E = mc^2$ traduit donc le fait que le vecteur $\vec{p}$ de toute particule est isotrope, ce qui est logique si la particule se déplace à la vitesse de la lumière. Le vecteur impulsion est ainsi à rapprocher du quadrivecteur de l'onde électromagnétique :

$(\frac{\omega}{c},\vec{k}) = (\frac{\omega}{c},k_x,k_y,k_z) = (k_0,k_1,k_2,k_3)$ lui aussi isotrope.

Ceci correspond au fait, bien connu depuis la thèse de Louis de Broglie, que la formule $E = h\nu = h\omega$ se généralise en

$$p_\mu = h\ k_\mu$$

7. ELECTROMAGNETISME EN DIMENSION 5

Au lieu du quadrivecteur potentiel ϕ_μ tel que $(\phi_0,\phi_1,\phi_2,\phi_3) = (V\ ,-cA_x,-cA_y,-cA_z)$, nous sommes amenés à supposer l'existence d'un pentavecteur potentiel :

(0) $(\phi_0,\phi_1,\phi_2,\phi_3,\phi_4) = (V,-cA_x,-cA_y,-cA_z,-cA_u)$.

Si nous voulons conserver la condition de Lorentz : $\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{A} = 0$, nous sommes amenés à poser les deux conditions :

(1) $\partial_\mu \phi^\mu = 0$ (avec la convention de sommation d'Einstein)

(2) $\partial_4 \phi^4 = 0$, c'est-à-dire $\frac{\partial A_u}{\partial u} = 0$; $A_u = A_u(x,y,z,t)$

Nous supposerons de plus que la dépendance en u du potentiel est telle que :

(3) $V(x,y,z,t,u) = V(x,y,z,t)\ e^{iau}$ donc $\frac{\partial V}{\partial u} = iaV$

(4) $\vec{A}(x,y,z,t,u) = A(x,y,z,t)\ e^{iau}$ $\frac{\partial \vec{A}}{\partial u} = ia\vec{A}$

Avec ces hypothèses, si l'on pose

(5) $\phi_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi_\nu - \partial_\nu \phi_\mu$, on obtient

$$\phi_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z & -E_u \\ E_x & 0 & -cB_z & cB_y & -C_1 \\ E_y & cB_z & 0 & -cB_x & -C_2 \\ E_z & -cB_y & -cB_x & 0 & -C_3 \\ E_u & C_1 & C_2 & C_3 & 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{E} = (Ex,\ Ey,\ Ez)$ $\vec{B} = (Bx,\ By,\ Bz)$ sont les vecteurs champs électrique et magnétique

(6) $Eu = \phi_{04} = -\frac{\partial A_u}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial u}$

(7) $C_i = \phi_{i4} = \partial_i\,\phi_4 - \partial_4\,\phi_i$ i=1,2,3.

Les équations du champ électromagnétique dans le vide en dehors des charges sont alors :

(8) $0 = \partial_\rho\,\phi^{\mu\rho}$

$$0 = \partial_\mu\phi^{0\rho} = \partial_1\phi^{01} + \partial_2\phi^{02} + \partial_3\phi^{03} + \partial_4\phi^{04}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(-E_x) + \frac{\partial}{\partial y}(-E_y) + \frac{\partial}{\partial z}(-E_z) + \frac{\partial}{\partial u}(-E_u)$$
$$= -\,\mathrm{div}\,\vec{E} - \frac{\partial}{\partial u}(-\frac{\partial A_u}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial u}) = -\,\mathrm{div}\,\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial A_u}{\partial u}) + \frac{\partial^2 V}{\partial u^2}$$

En tenant compte de (2) et de (3) on obtient

$$0 = -\operatorname{div}\vec{E} - a^2V$$

(9) $\operatorname{div}\vec{E} = -a^2V$.

On obtient aussi

$$0 = \partial_\rho\phi^{1\rho} = \partial_0\phi^{10} + \partial_2\phi^{12} + \partial_3\phi^{13} + \partial_4\phi^{14}$$

$$= \frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}(cB_z) + \frac{\partial}{\partial z}(-cB_y) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial}{\partial x}\phi_4 - \frac{\partial}{\partial u}\phi_1\right)$$

$$0 = \frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} - c\left(\frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial u}\right) - c\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_u}{\partial u}\right) + c\frac{\partial^2 A_u}{\partial u^2}$$

Et de même pour les indices 2 et 3, ce qui nous donne, en tenant compte de (4)

$$0 = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - c\,\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} - ca^2\vec{A}$$

On obtient donc

(10) $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - a^2\vec{A}$.

Il apparait tout à fait remarquable qu'à partir des conditions (0), (3), (4), les équations relativistes usuelles (1), (5), (8) de l'électromagnétisme du vide aboutissent, sans utiliser ni les matrices de Dirac, ni le processus de fusion de deux particules aux équations de l'électromagnétisme de Louis de Broglie :

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial V}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{A} = 0 \qquad (11)$$

$$\operatorname{div}\vec{E} = -a^2V$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - a^2\vec{A}$$

Quant à la cinquième des équations (8), elle s'écrit

$$0 = \partial_\rho\phi^{4\rho} = \frac{1}{c}\frac{\partial E_u}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{C} \qquad \text{avec } \vec{C} = (C_1, C_2, C_3)$$

$$0 = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial A_u}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\phi_4 - \frac{\partial}{\partial u}\phi_1\right)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\phi_4 - \frac{\partial}{\partial u}\phi_2\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial z}\phi_4 - \frac{\partial}{\partial u}\phi_3\right)$$

$0 = \Box A_u + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{A}\right)$ et donc, en vertu de la condition de Lorentz :

(12) $\Box A_u = 0$.

*****

REFERENCES

(1) Cohen - Tannoudji. Mécanique Quantique.

(2) Horwitz et Piron. Relativistics Dynamics.- Helvetica physica - Vol 46 1973

(3) Blaquière : A la recherche du temps perdu. Annales de la Fondation Louis de Broglie, Vol.3, n° 4 et Vol.4, n° 2.

(4) J.M. Souriau. Stratification de l'univers. Colloque du centenaire Einstein. Edition du CNRS.

(5) Louis de Broglie. Théorie Générale des particules à spin (méthode de fusion).