Annales de la Fondation Louis de Broglie,
Vol. 8, n° 1, 1983

LOCALISATION

par Andrés J. KALNAY
Centro de Fisica, IVIC,
Apdo. 1827, Caracas 1010-A, Venezuela

*****

Conférence prononcée devant le séminaire
de la Fondation Louis de Broglie
le 5 Décembre 1977 (*)

Résumé : Nous étudierons la localisation éventuelle des objets élémentaires dans le cadre de la Physique des Hautes Energies, les concepts correspondants, l'hypothèse explicite ou implicite dont on se sert pour faire l'étude de la localisation, les difficultés auxquelles nous nous trouvons confrontés, les stratégies qui peuvent être employées pour résoudre ces problèmes et enfin, nous mentionnerons les différents aspects du problème qui, selon nous, mérite d'être plus approfondi. Nous avons revu certains aspects de la localisation dans le cadre de la mécanique quantique Galiléenne.

(*) L'auteur fait savoir qu'il est le seul responsable du très long retard qu'a subi la publication de cet article et que le journal n'a aucune responsabilité quant à ce délai. (+)
(+) La Rédaction tient également à faire savoir qu'elle ne tient aucunement rigueur de ce délai à l'auteur.

I - LE PROBLEME DE LA LOCALISATION ET SES DIFFICULTES

Le problème de la localisation en Physique des Hautes Energies, ou, en deux mots, le problème de la localisation, consiste à trouver, dans le cadre de la mécanique quantique, la description exacte (si cela est possible) de la localisation des systèmes microscopiques en général et des particules dites "élémentaires" en particulier. Le problème a donc deux facettes ; (i) En mécanique quantique relativiste, la proposition concernant la distribution de probabilité, à un moment donné, d'un système microscopique dans un espace tridimensionnel, a-t-elle un sens ? (ii) Dans le cas où la réponse à cette question est affirmative : quel est l'opérateur X^k, k=1,2,3, qui représente la composante k de la variable dynamique position ? Une fois que l'on connaît X^k, les kets propres sont, en principe, calculables,

$$X^k|a^k,\lambda> = a^k|a^k,\lambda> \qquad \text{(I.1)}$$

(λ représente la dégénérescence de la valeur propre a^k), et, en mécanique quantique, les distributions de probabilité de la localisation dans l'espace sont aussi en principe calculables. Notons que nous ne supposons pas que le même ket $|a^k,\lambda>$ soit simultanément le ket propre de X^1, X^2 et X^3.

En mécanique quantique non-relativiste, le problème était facilement résolu à partir du moment où on admettait implicitement l'hypothèse

$$[X^k,X^\ell] = 0 \ , \qquad k,\ell=1,2,3 \qquad \text{(I.2)}$$

étant donné que cette hypothèse permettait l'existence de vecteurs propres simultanés de toutes les composantes d'un opérateur vectoriel tridimensionnel $\vec{X}$ ainsi que l'existence d'une représentation position où $\vec{X}$ était un opérateur

vectoriel multiplicatif. L'on sait cela depuis les origines de la mécanique quantique.

Les véritables difficultés du problème de la localisation surviennent lorsqu'on considère le cas relativiste. Cependant, la simplicité de la solution élémentaire d'un cas non-relativiste, était, d'une certaine manière, une fiction étant donné qu'elle reposait sur la validité de l'hypothèse (I.2) ; en effet, cette hypothèse n'était généralement ni explicitée ni démontrée. Parfois même, certains physiciens l'avaient considérée comme étant évidente. (Ces physiciens subissaient généralement l'influence de la mécanique classique, mais la non-commutation des composantes du moment cinétique devrait mettre en garde contre certaines analogies hâtives concernant la commutation). A titre d'exception, citons le traité de Jauch [1] qui fait remarquer qu'il n'existait pas de justification *a priori* de l'hypothèse (I.2) et que cette hypothèse n'avait alors aucun fondement expérimental définitif. En effet, c'est seulement en 1971 qu'on a démontré, en se fondant sur les premiers principes, la validité de (I.2) dans le cadre de la mécanique quantique Galiléenne. En fait, comme on l'a démontré en [2], (I.2) est un théorème qui résulte de l'admission des axiomes de la relativité Galiléenne et de la mécanique quantique. De cette façon, à un niveau non-relativiste, cette équation est étayée expérimentalement par des expériences qui servent de fondement (à ce niveau) à la mécanique quantique non-relativiste. En outre, la même recherche nous permet de conclure que les axiomes de la mécanique quantique Galiléenne mènent à un opérateur position unique et que, par conséquent, il correspond à l'opérateur traditionnel.

Ce qui vient d'être dit nous montre qu'il existe certains risques à vouloir résoudre le problème de la localisation pour le cas relativiste. Les risques sont les suivants : l'existence d'hypothèses implicites non découvertes et/ou la tendance à considérer une affirmation donnée comme étant forcément vraie sous prétexte qu'elle correspond à nos préjugés. En fait, on a très souvent affaire à des présomptions et à des "vérités évidentes" dans les articles sur le problème de la localisation. Par exemple, nombre d'auteurs pensent que (I.2) est valable aussi pour le cas relativiste parce que, selon eux, "il ne peut en être autrement" ; certains auteurs utilisent (I.2) comme un postulat non-explicité. Cependant, l'on est parvenu à démontrer que si les principes physiques de la relativité spéciale d'Einstein sont exacts et que si les axiomes de la mécanique quantique (ou même ceux d'une mécanique quantique plus généralisée) sont exacts aussi, dans ce cas, (I.2) est fausse ; du moins dans le cas des premiers spins non-nuls ([3,4]).

Une des approches les plus communes pour tenter de résoudre le problème de la localisation a consisté à établir, explicitement ou implicitement, un ensemble de postulats desquels on peut déduire l'opérateur position. (Voir par exemple Section 3 et 7.1 d'un article de révision ([5])). On peut tirer certaines leçons d'une étude rétrospective de cette approche. Nous appellerons $A^{(i)}$ chaque auteur qui a tiré parti de cette approche pour résoudre le problème de la localisation. Posons

$$P^{(i)}_j, \qquad j=1,2,\ldots,N^{(i)},$$

l'ensemble des propositions utilisées comme postulats par $A^{(i)}$, de façon implicite ou explicite et posons aussi

$$X^{k(i)}, \qquad k=1,2,3,$$

l'opérateur position qu'il a déduit de

$$P^{(i)}_1,\ P^{(i)}_2,\ldots,\ P^{(i)}_{N^{(i)}}.$$

En lisant les travaux des auteurs $A^{(i)}$, on se rend aisément compte que la plus grande partie des postulats

$$P^{(i)}_j, \qquad j=1,2,\ldots,N^{(i)}$$

semble inévitable du point de vue théorique : voir les travaux cités au point ([5]). Par exemple, plusieurs auteurs $A^{(i)}$ ont décrété que les

$$X^{k(i)}, \qquad k=1,2,3,$$

étaient les composantes spatiales d'un opérateur position quadrivectoriel. (Nous faisons allusion ici à des opérateurs vectoriels dans le sens strict du terme et non pas à la très intéressante généralisation de Fleming ([6,7]), voir Sect. IV de ([8])). Il semblerait que, dans le cadre de la mécanique quantique relativiste, l'opérateur position soit toujours un opérateur quadrivectoriel ! Comme on vient de le faire remarquer, la plupart des

$$P^{(i)}_j$$

semblent inévitables ; du moins aux yeux du théoricien influencé par ses préjugés. Mais, il se fait que l'on retrouve dans de nombreux cas chaque fois deux très bons théoriciens $A^{(i)}$ et $A^{(i')}$ dont les axiomes

(respectivement $P^{(i)}_j$, $j=1,2,\ldots,N^{(i)}$ et $P^{(i')}_{j'}$, $j'=1,2,\ldots,N^{(i'}$

apparaissent tout aussi inévitables mais conduisent à des opérateurs position

(respectivement $X^{k(i)}$ et $X^{k(i')}$)

qui ne sont ni égaux ni équivalents unitairement. Par conséquent, certains axiomes $P^{(i)}_j$, $P^{(i')}_{j'}$ sont faux !

Conclusion : nous, théoriciens, devrions être plus prudents lorsque nous affirmons que certaines propositions formelles sur la localisation sont vraies sous prétexte qu'"il ne peut en être autrement". A ce sujet, il s'avère que, si les principes physiques (non pas les principes formels) de la relativité spéciale d'Einstein ainsi que les axiomes de la mécanique quantique (envisagée dans sa forme standard ou dans sa forme généralisée signalée ci-dessus) sont exacts, dans ce cas, l'opérateur position quadrivectoriel ne peut exister [3,4]. (Une fois encore, nous considérons les opérateurs vectoriels dans le sens le plus strict du terme et non pas en fonction de la généralisation étudiée aux points [6,7]). Le résultat qui est un théorème qui découle des principes de la relativité et de la mécanique quantique semble bien étrange, pratiquement incroyable ; et ça, parce que nous, physiciens sommes beaucoup trop enclins à faire une analyse formelle. Nous allons voir plus loin, dans la Section III qu'à partir d'une simple étude des concepts (non pas des formalismes !) de la relativité et de la mécanique quantique, il serait très surprenant qu'un opérateur position quadrivectoriel puisse exister en mécanique quantique relativiste.

Nous devons envisager toutes les possibilités. En particulier, nous devrions admettre que la localisation n'a peut-être pas de sens en mécanique quantique relativiste (problème (i), premier paragraphe). Certains physiciens préfèrent partager ce point de vue, auquel cas le problème qui consiste à trouver le X^k exact disparaît, mais alors, ils se trouvent confrontés à un problème plus difficile encore. Afin de nous préparer pour la discussion de ce problème, voyons tout d'abord l'impulsion P^k ; il est évident que l'impulsion microscopique P^k et l'impulsion macroscopique p^k ont des propriétés différentes mais toutes deux existent et, dans un certain sens, on peut considérer l'impulsion macroscopique p^k comme étant une limite de l'impulsion quantique. Nous nous trouvons donc confrontés à un nouveau problème : supposons que X^k quantique relativiste n'existe pas. Alors, pourquoi x^k macroscopique existe-t-il ? Quelle doit être dans ce cas l'entité Q^k pour que Q^k soit une variable quantique dynamique (étant donné qu'on a supposé que Q^k existait et que X^k n'existait pas) et pour que x^k soit la limite de Q^k ? Pourquoi Q^k existe-t-il et que X^k n'existe pas ? Enfin, comment peut-on poser x^k macroscopique "comme une limite des variables microscopiques, Q^k", qui ne sont pas une variable position ?

II - UNE STRATEGIE PERMETTANT DE SURMONTER LES DIFFICULTES

La physique doit se fonder sur des expériences. Ceci est vrai habituellement mais il semblerait que cela soit encore plus vrai dans les cas tels que le problème de la localisation. En effet, comme nous l'avons déjà dit dans la Section I, au moins une partie des axiomes

$$P_j^{(i)}, \qquad j=1,2,\ldots,N^{(i)},$$

utilisés par les théoriciens $A^{(i)}$ parce qu'"il ne pourrait en être autrement" sont faux (ils se contredisent). Il semblerait donc que la tâche qui consiste à extraire de l'ensemble des

$$P_j^{(i)}, \qquad \forall\, i,j,$$

le sous-ensemble des postulats vrais, soit bien difficile. Dès lors, il serait naturel de recourir à l'aide des physiciens expérimentaux, mais là aussi, se présente une difficulté. Le genre d'expériences réalisées de nos jours en Physique des Hautes Energies ne permettent pas d'obtenir des indications précises sur la localisation. Il serait également naturel d'interrompre les recherches sur le problème de la localisation jusqu'au moment où l'on disposerait d'une information expérimentale valable. Cependant, cette attitude serait tellement aseptique qu'elle stériliserait probablement la problèmatique de la localisation à tel point que l'on ne pourrait plus trouver de nouveaux résultats à partir d'un effort conjugué jusqu'au moment où une information accidentelle le permettrait peut-être à nouveau. En d'autres mots, il ne peut exister de recherche purement expérimentale. Une expérience présuppose une théorie et, dans la plupart des cas, certaines parties de théories ([9]). Illustrons cette déclaration. Pour mesurer l'impulsion d'une particule chargée dans une expérience de diffusion en Physique Nucléaire des Hautes ou des Basses Energies, on procède généralement par déviation dans un champ magnétique. Donc, cette expérience repose en partie sur une théorie (l'électrodynamique). Pire encore, parfois on "mesure" l'impulsion d'une particule donnée sans observation directe en se servant, d'une part, des informations concernant le quadrivecteur impulsion-énergie d'autres particules et, d'autre part, des lois de conservation qui appartiennent aussi aux théories. Ce dernier procédé de mesure devient le plus utilisé lorsque la particule est électriquement neutre. Corollaire : les théoriciens devraient fournir aux physiciens expérimentaux au moins une partie de la théorie de la localisation pour que l'on puisse un jour réaliser des expériences sur la localisation pour les particules appelées "élémentaires".

De l'analyse précédente on peut déduire qu'il existe un cercle vicieux : dans le cas du problème de la localisation, il semble douteux que l'on puisse se fier à l'intuition des théoriciens, intuition selon laquelle des hypothèses du type "il ne pourrait en être autrement" sont d'habitude acceptées. Les théoriciens ne peuvent se passer de l'information expérimentale. D'autre part, les physiciens expérimentaux ne peuvent mesurer la position avec précision s'ils ne maîtrisent pas au moins certaines parties de la théorie de la localisation. Comment faire pour briser ce cercle vicieux ? Nous pensons qu'une des façons

d'y parvenir est la suivante : il faudrait obtenir des informations sur la localisation qui découleraient d'autres postulats (que nous appellerions P'_j) qui eux auraient (de par leurs conséquences) un support expérimental suffisamment convaincant ; il faudrait aussi que les P'_j ne parlent pas directement du problème de la localisation. Il est sans aucun doute difficile de trouver un ensemble P'_j adéquat mais cet ensemble existe.

L'article de Newton et Wigner (NW) sur la localisation ([10]) est un des meilleurs qui ait été rédigé sur ce sujet. Malheureusement, ils supposent d'une façon implicite la validité de (I.2). Or, comme nous l'avons dit plus haut, cela va à l'encontre des conditions communes de la relativité et de la mécanique quantique (Sect. I). De plus, on constate dans le document original (plusieurs auteurs l'ont d'ailleurs aussi constaté) que leur solution enfreint la règle selon laquelle le concept de localisation devrait avoir une signification relativiste. Les choses se compliquent encore davantage par le fait qu'un des postulats de NW est une condition de régularité mathématique qui semble inoffensive à première vue. En se fondant sur ces conditions et sur le reste des postulats, NW obtiennent un opérateur position unique pour chaque spin. Cependant, Galindo ([11]) a démontré que, pour déduire l'opérateur position de NW de façon rigoureuse, il faut spécifier un certain ensemble de suites possibles de fonctions (qui joue un rôle dans la condition de régularité) et il faut aussi faire un choix de la topologie sous-jacente. Lorsqu'on a tenu compte de tout ceci comme il se doit, l'opérateur position perd son unicité car cet opérateur est sensible aux modificiations de ces séquences et/ou de la topologie ([11]). Malgré ces difficultés, l'article de NW est d'une valeur exceptionnelle et nous avons découvert en le lisant l'inspiration de notre propre approche.

Comme nous l'avons déjà dit plus haut (Section I), notre approche [3,4,8,12] consiste à utiliser comme postulats (nous les appellerons P'_j) les principes physiques de la relativité spéciale d'Einstein et les axiomes de la mécanique quantique (ou même ceux d'une mécanique quantique plus généralisée). Ces suppositions ont un fondement expérimental qui est indépendant des hypothèses

$$P_j^{(i)}$$

ad-hoc, spécialement formulées pour tâcher de définir la localisation. Ainsi, si l'on peut déduire de ces hypothèses des informations sur X^k, le cercle vicieux dont nous avons parlé auparavant pourrait être brisé. Etant donné que la transformation de Lorentz ne peut concéder aucun privilège aux référentiels d'inertie, il se fait qu'une relation quantique d'inclusion d'une particule dans un région espace-temps doit avoir une signification relativiste invariante. A notre grande surprise, de tout ceci ainsi que des principes de mécanique quantique, on déduit un opérateur position

$$X^k(G)$$

pour chaque spin de telle sorte que, au moins pour les spins plus petits, l'opérateur

$$X^k(G)$$

a une expression unique et bien définie, à la seule exception d'un paramètre inconnu appelé G [3]. Ensuite, on a démontré [12] que le paramètre G avait une valeur unique G=0. Finalement, il en résulte que l'opérateur position

$$X^k \equiv X^k(0)$$

est un opérateur unique pour chaque spin, du moins pour les spins plus petits [4,12]. On appellera le résultat de notre approche, localisation invariante de Lorentz.

Etant donné que certaines conséquences de la localisation invariante de Lorentz paraissent étranges, nous avons soumis la méthode à un test, à la limite Galiléenne [2,13]. Cette limite est importante parce que, dans le cadre de la mécanique quantique non relativiste, les représentations physiques du groupe de Galilée ne peuvent être les "vraies représentations" utilisées dans la plupart des cas (par exemple, pour les représentations du groupe de Lorentz, dans le cas de la mécanique quantique relativiste). Dans le cas de Galilée, on les appelle représentations physiques projectives ou 'up to a factor'. Voir les travaux de Bargmann, Inönü et Wigner, et Lévy-Leblond [14-16]. A la limite Galiléenne, la méthode débouche une fois encore sur un résultat unique qui correspond cette fois à l'opérateur position habituel de la mécanique quantique non relativiste (Sect. I), de telle sorte que la méthode jouit d'un appui supplémentaire pour le cas relativiste.

Voici encore une autre source de difficultés : la plupart des particules dites "élémentaires", ou peut-être même toutes, sont des objets composés. Prenons, par exemple, le cas des hadrons qui sont généralement considérés comme provenant des quarks que l'on soupçonne aussi d'être des objets composés, etc. Supposons un instant que les incertitudes quantiques pour X^k puissent être négligées ; par exemple, parce que l'état de la particule est un mince différentiel propre de X^k. Mais si la particule "élémentaire" a une structure, la valeur propre de X^k est une région de l'espace, et non pas un point. Si l'on connaissait la véritable structure de la particule "élémentaire" le problème serait réduit à localiser ses composantes. Mais nous sommes bien loin d'avoir une idée précise sur la structure de la plupart des particules "élémentaires". Nous sommes donc obligés de prendre en considération le fait que les valeurs propres de X^k sont des régions et ce, sans connaître la structure exacte de la région. On a proposé un simple modèle à la référence [17] ; ensuite, ce modèle a été travaillé aux références [18-28]. Pour expliquer ce modèle de façon la plus simple, supposons que l'espace est unidimensionnel au lieu de tridimensionnel, avec des opérateurs position X^1 et des valeurs propres a^1. Les a^1 devraient être des régions ; les régions les plus simples dans une dimension sont les segments. Par conséquent, a^1 représente un segment et peut être spécifié par deux nombres réels,

$$a^1_I \quad \text{et} \quad a^1_{II},$$

a^1_I qui représente la localisation du centre du segment et a^1_{II} qui représente sa demi-extension. Autrement dit, la valeur propre a^1 peut être représentée par une paire

$$a^1 = (a^1_I,\ a^1_{II})$$

de nombres réels ou, ce qui revient au même, par un nombre complexe

$$a^1 = a^1_I + ia^1_{II}.$$

Conséquence : X^1 (et, en général, X^k) sera un opérateur non-hermitique. Généralement, on considérait les opérateurs non-hermitiques comme étant non physiques en raison des valeurs propres complexes. Mais, comme nous venons de le montrer, un nombre complexe peut être le résultat d'une mesure : la localisation d'un segment. Pour de plus amples informations voir les références [17,25], ainsi que l'article de Lévy-Leblond [27] qui a pour titre :"Who is afraid of Nonhermitian Operators ?...".

En partant de la mécanique quantique standard, on construira la mécanique quantique généralisée en admettant certains opérateurs non-hermitiques qui puissent représenter des variables dynamiques. Dans le cadre de la

mécanique quantique que nous appelons généralisée, nous ne devons ni prétendre ni nier que X^k soit hermitique. Il en résulte un théorème [2,3] : au moins dans le cas des spins plus petits, si on applique les principes physiques de la relativité spéciale, X^k doit être non-hermitique. De plus, si, dans le but de faire une vérification, on remplace le groupe de Lorentz par le groupe de Galilée, l'opérateur position devient alors hermitique. Il semble qu'à la limite non-relativiste, la structure des particules "élémentaires", mais composées, disparaît.

III - SUR L'ESPACE ET LE TEMPS DANS LE CADRE DE LA MECANIQUE QUANTIQUE RELATIVISTE

En mécanique quantique, le temps est totalement commutatif, à l'inverse des coordonnées spatiales. Comme l'a démontré Møller [29], ceci est valable aussi dans le cas relativiste. (Ici nous faisons allusion bien sûr à la coordonnée temporelle t, et non pas à la variable dynamique temporelle microscopique dont dépend la désintégration des systèmes instables. Pour une analyse plus approfondies, voir les références [30] et [31]. Ceci est cohérent avec les différents rôles joués par le temps et par l'espace tridimensionnel : le temps passe, la position, pas. Au fur et à mesure que le temps s'écoule, les distributions de probabilité des variables dynamiques microscopiques (position inclue) subissent une évolution et sont bien définies à chaque valeur donnée du temps. Revenons-en au travail de Møller ; il montre qu'en mécanique quantique relativiste, c'est le temps propre qui devient une variable dynamique microscopique (en deux mots, parce que sa définition dépend de l'impulsion qui est une variable microscopique) alors que le temps ordinaire est toujours une variable totalement commutative et, par conséquent, il n'est pas contaminé par des probabilités quantiques [29]. Donc, X^0 commute avec toutes les variables dynamiques, à l'inverse de X^k, k=1,2,3 ([29-31]) qui est généralement non-commutatif. Les opérateurs quadrivectoriels ont des relations de commutation très caractéristiques avec le tenseur moment cinétique.

Il serait donc surprenant que X^μ, μ=0,1,2,3 puisse avoir ces relations de commutation. Cela correspond au théorème présenté à la Section I et ne contredit en aucun cas le fait que les coordonnées x^μ (et pas X^μ) des référentiels d'inertie se combinent linéairement selon la transformation de Lorentz,

$$x^{\mu'} = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu. \tag{III.1}$$

En résumé, pour résoudre le problème de la localisation, il faudrait trouver un opérateur X^k trivectoriel et non pas un opérateur X^μ quadrivectoriel.

Certaines personnes pensent que cela va à l'encontre des principes de la théorie de la relativité d'Einstein, parce que, selon cette théorie, "le temps et l'espace sont sur un même pied". Nous ne sommes pas d'accord. Le temps et l'espace sont sur un même pied seulement dans le sens où les coordonnées des référentiels d'inertie se combinent linéairement comme en (III.1). Cependant, ils sont essentiellement différents, même du point de vue de la relativité non-quantique, comme l'ont montré Bunge (([32]), Sect. 2.5.5.) et Thirring ([33]). La différence qui existe pour le temps et l'espace ne peut pas être beaucoup plus grande que celle qui est impliquée par (III.1), étant donné que cette équation implique que l'axe du temps est transformé tout en restant toujours à l'intérieur du cône de lumière pendant que les trois axes spatiaux sont transformés tout en restant à l'extérieur. Le temps s'écoule mais pas l'espace.

Nous ajouterons finalement ceci en ce qui

concerne les quadrivecteurs formels : lorsque nous posons que, dans le cadre de la relativité quantique, l'espace-temps relativiste ne peut être un opérateur quadrivectoriel, nous faisons allusion aux quadrivecteurs stricts ; c'est-à-dire à ceux qui sont sujets aux règles standard de commutation avec les générateurs de la transformation de Lorentz ou, en d'autres mots, ceux qui se réfèrent aux concepts invariants (bien qu'ils changent leurs composantes de façon covariante). D'un autre côté, on peut introduire les quadrivecteurs formels comme l'a d'ailleurs fait Fleming ([6,7]) de main de maître. Il y a des entités $X^\mu(\sigma)$ à quatre composantes qui dépendent d'une hypersurface σ du genre espace. A cause de ce dernier fait, ils ne représentent pas des concepts absolus (ils changent lorsque σ change). La position quantique relativiste peut être représentée par des opérateurs quadrivectoriels formels même lorsque la composante temps est totalement commutative, c'est-à-dire, lorsque la position n'est pas un véritable quadrivecteur ([6-8]).

IV - PERSPECTIVES

La non-commutation des composantes de la position a des conséquences au niveau de la théorie des champs quantiques dans l'espace des coordonnées ([34]), conséquences qui sont d'ailleurs bien difficiles à comprendre. D'un autre côté, la considération conjuguée en ce qui concerne les interactions et la localisation promet une méthode qui permettra éventuellement de calculer les constantes de couplage ([35]). Nous n'avons encore effectué que des recherches préliminaires dans ces deux domaines et nous pensons qu'ils méritent d'être étudiés plus en profondeur.

RÉFÉRENCES

(1) J.M. Jauch, Foundations of Quantum Mechanics, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1968

(2) A.J. Kalnay et P.L. Torres, Phys. Rev. D 3, p. 2977, 1971

(3) A.J. Kalnay, Phys. Rev. D 1, p. 1092, 1970

(4) A.J. Kalnay, Phys. Rev. D 3, p. 2357, 1971

(5) A.J. Kalnay, The localization problem, Ed. M. Bunge, Problems in the foundations of physics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1971

(6) G.N. Fleming, Phys. Rev. 137, p. B188, 1965

(7) G.N. Fleming, J. Math. Phys. 7, p. 1959, 1966

(8) A.J. Kalnay, Phys. Rev. D 7, p. 1707, 1973

(9) M. Bunge, Scientific research, Springer, New York, 1967 ; La investigacion cientifica, Ariel, Barcelona, 1969

(10) T.D. Newton et E.P. Wigner, Rev. Mod. Phys. 21, p. 400, 1969

(11) A. Galindo, N. Cimento 37, p. 413, 1965

(12) A.J. Kalnay et P.L. Torres, Phys. Rev. D 9, p. 1670, 1974

(13) A.J. Kalnay et P.L. Torres, Inter. J. Theor. Phys. 3, P. 167, 1970

(14) V. Bargmann et E.P. Wigner, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S. 34, p. 211, 1948

(15) E. Inönü et E.P. Wigner, N. Cimento 9, p. 705, 1952

(16) J.-M. Lévy-Leblond, Rivista N. Cimento 4, p. 99, 1974

(17) A.J. Kalnay et B.P. Toledo, N. Cimento 48, p. 997, 1967

(18) J.A. Gallardo, A.J. Kalnay, B.A. Stec et B.P. Toledo, N. Cimento 48, p. 1008, 1967

(19) J.A. Gallardo, A.J. Kalnay, B.A. Stec et B.P. Toledo, 49, p. 393, 1967

(20) V.S. Olkhovsky et E. Recami, Lett. N. Cimento 4, p. 1165, 1970

(21) E. Papp, N. Cimento B 5, p. 119, 1971

(22) E. Papp, Inter. J. Theor. Phys. 8, p. 429, 1973

(23) E. Papp, N. Cimento B 10, p. 471, 1972

(24) E. Papp, Inter. J. Theor. Phys. 10, p. 385, 1974

(25) A.J. Kalnay, Complex physical quantities and space-like-states, Ed. E. Recami, Tachyons, monopoles and related topics, North-Holland Pub. Co., Amsterdam, New York, Oxford, 1978

(26) A.J. Kalnay, Lett. N. Cimento 27, p. 437, 1980

(27) J.-M. Lévy-Leblond, Ann. Phys. (N.Y.) 101, p. 319, 1976

(28) A.J. Kalnay et I. Reif, à paraître

(29) C. Møller, Communications of the Dublin Institute for Advanced Studies A, N° 5, 1949

(30) G.R. Allcock, Ann. Phys. (N.Y.) 53, p. 253, 1969

(31) G.R. Allcock, Ann. Phys. (N.Y.) 53, p. 311, 1969

(32) M. Bunge, Foundations of Physics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 1967

(33) W.E. Thirring, Principles of quantum electrodynamics, Academic Press Inc., New York, London, 1958

(34) A.J. Kalnay, Inter. J. Theor. Phys. 8, p. 227, 1973

(35) A.J. Kalnay, à paraître.