

Annales de la Fondation Louis de Broglie,
Vol. 8, n° 2, 1983

SUR UNE MÉTHODE DE MOYENNISATION VALABLE
DANS UNE LARGE ZONE DE RÉSONANCE POUR DES
SYSTÈMES HAMILTONIENS CLASSIQUES
NON AUTONOMES ET NON LINÉAIRES

par Michel KARATCHENTZEFF*) **)
et Georges LOCHAK*)

(manuscrit reçu le 17 Juin 1982)

Résumé : On étend à des systèmes hamiltoniens classiques non-linéaires la méthode dite "des moyennes résonnantes" antérieurement proposée dans le cas linéaire, notamment en mécanique quantique (Lochak-Thioum, 1969). Le système type cité ici en exemple sera un système autonome intégrable soumis à une perturbation périodique ou presque-périodique par rapport au temps. La méthode proposée est une généralisation de la méthode des moyennes de Bogolioubov et Mitropolsky (1963) et son avantage, par rapport à d'autres méthodes, est de fournir une solution approchée qui reste valable aussi bien loin d'une résonance que dans son voisinage immédiat. Il devient alors facile de suivre par continuité la réponse du système intégrable considéré (système dit "non perturbé") lorsqu'on fait varier l'une des fréquences partielles de la perturbation dans un large intervalle pouvant inclure une fréquence propre du système non perturbé. La méthode sera illustrée par une application à la perturbation paramétrique périodique d'un pendule non linéaire.

*) Fondation Louis de Broglie, 1 rue Montgolfier, 75003 Paris

**) Laboratoire de Thermodynamique des Fluides - Campus Universitaire, bâtiment 502 ter - 91405 Orsay Cedex.

Introduction et remarques générales

Avant d'exposer la méthode d'approximation que nous proposons pour les systèmes classiques hamiltoniens soumis à des perturbations qui oscillent dans le temps, nous voudrions dire brièvement quelles ont été nos motivations. Elles sont de deux ordres.

Tout d'abord, les études poursuivies, depuis quelques années, sur les invariants adiabatiques des systèmes soumis à des perturbations périodiques exigent qu'on sache décrire l'évolution d'un tel système lorsqu'on fait lentement varier l'un de ses paramètres, même si une fréquence propre de la perturbation vient ainsi à traverser une fréquence propre du système non perturbé. Il arrive, en effet, que le caractère adiabatique de la transformation n'en soit pas affecté (voir l'exposé d'ensemble de ces problèmes : G. Lochak et A. Alaoui, 1977). En mécanique quantique, une telle méthode existe déjà : c'est la *méthode des moyennes résonnantes*, dont nous aurons à reparler et dont on trouvera des applications citées dans la bibliographie de l'article ci-dessus. Mais en mécanique classique, nous ne connaissions pas de telle méthode générale et nous avons voulu combler cette lacune. Tel est donc notre première raison.

L'autre raison se trouve dans la nature même de l'algorithme que nous proposons. En effet, en mécanique quantique, la méthode des moyennes résonnantes utilise les facilités qu'offre la linéarité des équations et on pourrait croire, à première vue, que le problème serait donc radicalement plus compliqué en mécanique classique, mais il n'en est rien et nous voulions le prouver. En effet, ce dont la méthode a besoin c'est de la *loi de composition des transformations canoniques*, or celle-ci est très simple en dynamique hamiltonienne; dès qu'on exprime celle-ci sous la forme de Jacobi et qu'on introduit les fonctions génératrices des transformations, nous voudrions faire à ce sujet quelques remarques.

Rappelons que, si un même système est décrit par deux ensembles de variables canoniques (q,p) et (q',p') , avec les hamiltoniens correspondants $H(q,p,t)$ et $H'(q',p',t)$, ceux-ci sont liés par la relation :

$$(0,1) \quad H'(q',p',t) = H(q,p,t) + \frac{\partial F}{\partial t}(q,q',t)$$

où $F(q,q',t)$ est la fonction génératrice de la transformation. Inversement, d'après (0,1) et les formules du changement de variables canoniques :

$$(0,2) \quad p = \frac{\partial F}{\partial q}(q,q',t), \quad p' = -\frac{\partial F}{\partial q'}(q,q',t),$$

on voit que si l'on se donne a priori deux hamiltoniens $H(q,p,t)$ et $H'(q',p',t)$ la fonction génératrice F du changement de variables qui passe de l'un à l'autre obéit à l'équation aux dérivées partielles :

$$(0,3) \quad \frac{\partial F}{\partial t} + H(q, \frac{\partial F}{\partial q}, t) - H'(q', -\frac{\partial F}{\partial q'}, t) = 0.$$

Or on sait que, dans chacune des deux représentations (q,p) et (q',p') , le système dynamique peut être décrit, respectivement par les équations de Jacobi :

$$(0,4) \quad \frac{\partial S}{\partial t} + H(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t) = 0, \quad \frac{\partial S'}{\partial t} + H'(q', \frac{\partial S'}{\partial q'}, t) = 0.$$

Prenons alors des intégrales complètes de chacune d'elles : $S(q,\alpha,t)$ et $S'(q',\alpha,t)$, en prenant soin de faire correspondre entre elles les caractéristiques en choisissant un même ensemble de constantes α, β . Il s'ensuit que la fonction

$$(0,5) \quad F(q,q',t) = S(q,\alpha,t) - S'(q',\alpha,t)$$

ne dépend pas de α puisque

$$(0,6) \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \frac{\partial S'}{\partial \alpha} = \beta$$

et d'après (0,4), elle est solution de (0,3) : c'est donc une fonction génératrice de la transformation et, si nous écrivons maintenant (0,5) sous la forme :

$$(0,7) \quad S'(q',\alpha,t) = S(q,\alpha,t) - F(q,q',t),$$

nous pouvons l'interpréter en disant que l'action S' exprimée à l'aide des "nouvelles" variables canoniques (q',p') s'obtient simplement en retranchant de l'action S , exprimée à

l'aide des "anciennes" variables, la fonction génératrice F de la transformation. Et ceci est une loi de groupe car si l'on effectue deux changements de variables canoniques successifs :

$$(q, p) \rightarrow (q', p') \rightarrow (q'', p'')$$

dérivant, respectivement, des fonctions génératrices $F(q, q', t)$ et $F'(q', q'', t)$, on montre facilement qu'en vertu du principe de moindre action, le changement de variables $(q, p) \rightarrow (q'', p'')$ dérive lui-même de la fonction génératrice :

$$(0,8) \quad F''(q, q'', t) = F(q, q', t) + F'(q', q'', t) .$$

Bien entendu, F'' ne dépend plus de q' , en vertu même des formules du changement de variables :

$$(0,9) \quad p' = - \frac{\partial F}{\partial q'}(q, q', t) = \frac{\partial F}{\partial q'}(q', q'', t) .$$

C'est l'additivité de cette loi de groupe qui permet de transposer au cas classique les calculs linéaires quantiques.

Ces simples remarques, jointes à une généralisation de la notion de moyenne temporelle, se trouvent à la base des calculs qui vont suivre. Mais ces remarques ont une signification plus importante.

Nous savons, en effet, depuis Hamilton lui-même (et cette interprétation se trouve à l'origine des idées de de Broglie et Schrödinger), que l'action lagrangienne S peut être regardée comme la *phase d'une onde*. Par conséquent, les formules (0,7) et (0,8) montrent que les transformations canoniques *classiques* ne sont rien d'autre qu'un groupe particulier de *transformations de jauge*, ce qui constitue la clé du rapprochement entre les transformations canoniques classiques et quantiques (voir A. Amiet et P. Huguenin, 1982). C'est pour cette raison que la *méthode des moyennes résonnantes*, que nous développons ici en mécanique classique, constitue l'exacte transposition de la méthode antérieurement développée sous ce même nom en mécanique quantique : on devrait même pouvoir retrouver la méthode quantique en introduisant la méthode classique dans l'*intégrale des chemins* (G.J. Papadopoulos, J.T. Devreese, 1978).

1. Rappel de résultats antérieurs

Pour montrer où se trouve la difficulté que notre méthode se propose d'écarter, il convient de rappeler, dans ses grandes lignes, la méthode des moyennes de Bogolioubov et Mitropolsky (1963). On sait que c'est une méthode de changement de variables qui s'applique à des systèmes mis sous la "forme standard" :

$$(1.1) \quad \frac{dx}{dt} = \epsilon X(t, x) ; \quad x, X \in \mathbb{R}^n$$

où ϵ est un petit paramètre. On cherchera une solution approchée dont la forme générale, au n -ième ordre, s'écrit :

$$(1.2) \quad x_n(t, \xi) = \xi + \epsilon A_1(t, \xi) + \dots + \epsilon^n A_n(t, \xi) ; \quad \xi, A_k \in \mathbb{R}^n$$

où les $A_k(t, \xi)$ sont définis de façon telle que la nouvelle inconnue ξ obéisse à une équation approchée d'ordre n de la forme :

$$(1.3) \quad \frac{d\xi}{dt} = \epsilon \Xi_1(\xi) + \dots + \epsilon^n \Xi_n(\xi) ; \quad \xi, \Xi_k \in \mathbb{R}^n$$

où les $\Xi_1(\xi), \dots, \Xi_n(\xi)$ ne dépendent pas du temps. Le système (1.3) sera donc plus facile à intégrer que (1.1) et on montre que (1.2) fournit alors une solution approchée de (1.1), à l'ordre n . Bogolioubov l'appelle "approximation améliorée d'ordre n " car, en réalité, si on arrête le développement (1.2) au terme $n - 1$ (sans changer l'équation (1.3)), on obtient déjà une approximation d'ordre n , dite "approximation ordinaire". Nous reviendrons sur ce point.

Pour obtenir le système (1.3), Bogolioubov et Mitropolsky supposent d'abord que les seconds membres de (1.1) sont de la forme :

$$(1.4) \quad X(t, x) = \sum_{\nu} e^{i\nu t} X_{\nu}(x)$$

Pour toute fonction $F(t, x)$ de la même forme :

$$F(t, x) = \sum_{\nu} e^{i\nu t} F_{\nu}(x)$$

ils posent alors les définitions suivantes :

$$(1.5) \quad M_t \{F(t, x)\} = F_0(x)$$

$$(1.6) \quad \tilde{F}(t, x) = \sum_{v \neq 0} \frac{e^{ivt}}{iv} F_v(x) ; \quad \tilde{\tilde{F}}(t, x) = \sum_{v \neq 0} \frac{e^{ivt}}{(iv)^2} F_v(x) ; \dots$$

d'où l'on a évidemment :

$$(1.7) \quad \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} = F - F_0 ; \quad \frac{\partial \tilde{\tilde{F}}}{\partial t} = \tilde{F} ; \dots$$

Par un procédé pas à pas que nous ne reproduirons pas parce que nous le retrouverons plus loin sous une forme plus générale, ils obtiennent les expressions (1.2) et (1.3). Soulignons ce point important que les $A_k(t, \xi)$ du changement de variable (1.2) sont toujours *oscillants*, c'est-à-dire du type $\tilde{F}$, $\tilde{\tilde{F}}$, etc., tandis que les Ξ_k sont des grandeurs *moyennes* (en l'occurrence, elles ne dépendent pas du temps). Par exemple, au premier ordre, on trouve pour (1.3) :

$$(1.8) \quad \frac{d\xi}{dt} = \epsilon X_0(\xi) = \epsilon M_t \{X(t, x)\}$$

tandis que la solution *améliorée* du premier ordre s'écrit :

$$(1.9) \quad x = \xi + \epsilon \sum_{v \neq 0} \frac{e^{ivt}}{iv} X_v(\xi) = \xi + \epsilon \tilde{X}(t, \xi) .$$

La méthode est puissante mais elle présente le défaut dans les problèmes de résonance, d'obliger à distinguer entre le cas *résonant* et le cas *non résonant*. Comme c'est un point d'une grande importance physique, nous voulons le préciser sur un exemple, celui de la perturbation paramétrique d'un oscillateur linéaire :

$$(1.10) \quad \ddot{q} + \omega_0^2(1 - \frac{\epsilon}{\omega_0} \cos \omega t)q = 0 .$$

Pour mettre ce système sous la *forme standard*, nous introduisons de nouvelles variables x, y grâce aux formules :

$$(1.11) \quad \begin{aligned} q &= x e^{i\omega_0 t} + y e^{-i\omega_0 t} \\ \dot{q} &= i\omega_0 x e^{i\omega_0 t} - i\omega_0 y e^{-i\omega_0 t} \end{aligned}$$

et nous obtiendrons des équations de la forme (1.1) :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \epsilon X(x, y, t) \\ &= -\frac{i\epsilon}{4} [x(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) + y(e^{i(\omega-2\omega_0)t} + e^{-i(\omega+2\omega_0)t})] \\ (1.12) \quad y &= \epsilon Y(x, y, t) \\ &= i\frac{\epsilon}{4} [x(e^{i(\omega+2\omega_0)t} + e^{-i(\omega-2\omega_0)t}) + y(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})] \end{aligned}$$

Les fréquences ν qui figurent dans (1.4) sont donc égales, ici, à : $\pm\omega$, $\pm(\omega+2\omega_0)$, $\pm(\omega-2\omega_0)$.

Limitons nous, pour simplifier, à l'approximation du premier ordre et à la première résonance : $\omega_0 = \omega/2$. Si ω_0 se trouve loin de cette résonance, donc :

$$|\omega - 2\omega_0| \gg \epsilon$$

les formules (1.5) et (1.6) s'appliquent aussitôt et on voit que l'on a :

$$(1.13) \quad \begin{aligned} M_t \{X\} &= 0 \\ \tilde{X} &= -\frac{\epsilon}{4} [x(\frac{e^{i\omega t}}{\omega} - \frac{e^{-i\omega t}}{\omega}) + y(\frac{e^{i(\omega-2\omega_0)t}}{\omega - 2\omega_0} - \frac{e^{-i(\omega+2\omega_0)t}}{\omega + 2\omega_0})] \end{aligned}$$

avec des formules analogues pour Y .

Au contraire, si nous sommes à la résonance exacte $\omega = 2\omega_0$, ces formules ne seront plus valables, et nous aurons :

$$(1.14) \quad \begin{aligned} M_t \{X\} &= -i\frac{\epsilon}{4} y \\ \tilde{X} &= -\frac{\epsilon}{4} [x(\frac{e^{i\omega t}}{\omega} - \frac{e^{-i\omega t}}{\omega}) - y \frac{e^{-2i\omega t}}{2\omega}] \end{aligned}$$

avec des formules semblables pour Y . Ceci entraînera donc un *changement dans la forme des équations approchées*, et il existe, de ce fait, un hiatus entre la résonance et la non résonance. On peut, certes, améliorer cet état de choses et examiner une zone entourant la résonance en posant :

$$(1.15) \quad \omega_0^2 = \frac{\omega^2}{4} + a \frac{\omega}{2} \epsilon$$

a est un paramètre réel sans dimension et $\frac{a\omega}{2} \epsilon$ représente

l'écart par rapport à la résonance. L'équation (1.10) s'écrit, à $O(\epsilon^2)$ près :

$$(1.16) \quad \ddot{q} + \frac{\omega^2}{4} [1 + \frac{2\epsilon}{\omega} (a - \cos \omega t)] q = 0.$$

Le changement de variable (1.11), où l'on substitue $\frac{\omega}{2}$ à ω_0 , donnera alors le nouveau système :

$$(1.17) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= \epsilon X(x, y, t) \\ &= -i \frac{\epsilon}{4} [y - 2ax + x(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) + y e^{-2i\omega t}] \\ \dot{y} &= \epsilon Y(x, y, t) \\ &= i \frac{\epsilon}{4} [x - 2ay + y(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) + x e^{2i\omega t}] \end{aligned}$$

d'où

$$(1.18) \quad \begin{aligned} \dot{X} &= i \frac{\epsilon}{4} (2ax - y) \\ \ddot{x} &= -\frac{\epsilon}{4} [x(\frac{e^{i\omega t}}{\omega} - \frac{e^{-i\omega t}}{\omega}) - y \frac{e^{-2i\omega t}}{2\omega} + \frac{2ay}{\omega} e^{-i\omega t}] \end{aligned}$$

et des expressions analogues pour Y . Les équations (1.8) et la solution améliorée (1.9) prendront donc une nouvelle forme qui est valable dans un intervalle entourant la résonance $\omega = 2\omega_0$, mais il s'agit seulement d'un *petit intervalle* (de l'ordre de ϵ) et on est obligé, en réalité, de supposer que $a = O(1)$.

Autrement dit, on reste dans l'obligation de *distinguer entre la résonance et la non-résonance*, sans pouvoir suivre, sur une même expression analytique, la réponse d'un système à une perturbation dépendant du temps, *lorsqu'on modifie l'une de ses fréquences caractéristiques dans un large intervalle de valeurs comprenant une résonance*. Ceci présente des inconvénients importants dans certaines applications physiques et c'est à cela que nous voulons remédier.

2. Généralisation du principe des moyennes

Ce que nous proposons est une généralisation de la méthode de Bogolioubov et Mitropolsky fondée sur une extension

de la notion de moyenne, et donc sur l'utilisation d'opérateurs lissants plus faibles et plus généraux que la moyenne temporelle. Ce procédé a déjà été appliqué avec succès en mécanique quantique (Lochak-Thiounn, 1969) ; il nous permettra de construire un algorithme valable pour les systèmes classiques non-linéaires (et non autonomes). Commençons par exposer succinctement le principe de notre méthode.

Tout d'abord, pour généraliser la notion de moyenne, nous avons été amenés à y faire figurer le *temps* (c'est ce qu'admettent également d'autres auteurs (Grebenikov et Riabov, 1979). Le système approché (1.2) et (1.3) s'écrit donc maintenant :

$$(2.1) \quad x_n(t, \xi) = \xi + \epsilon A_1(t, \xi) + \dots + \epsilon^n A_n(t, \xi) ; \quad \xi, A_k \in \mathbb{R}^n$$

$$(2.2) \quad \frac{d\xi}{dt} = \epsilon \Xi_1(t, \xi) + \dots + \epsilon^n \Xi_n(t, \xi) ; \quad \xi, \Xi_k \in \mathbb{R}^n$$

où les Ξ_k , aussi bien que les A_k *dépendent maintenant du temps*, mais pas de la même manière. Nous adopterons une idée essentielle qui apparaît implicitement dans la méthode de Bogolioubov et que nous généralisons : à tous les ordres d'approximation, les $A_k(t, \xi)$ dans l'expression (2.1) de $x(t, \xi)$ seront "*oscillants*" en t (donc *rapidement variables*) tandis que les $\Xi_k(t, \xi)$ de l'équation approchée (2.2) seront des "*moyennes*" (donc *lentement variables*). Bien entendu, ce choix est a priori arbitraire et il ne peut être justifié qu'après coup par les conditions d'*application physique* de la méthode.

On peut résumer notre principe sous la forme intuitive suivante : comme les seconds membres de (2.2) sont d'ordre ϵ et lentement variables, $\xi(t)$ *oscillera lentement*, de sorte que l'expression (2.1) de $x(t)$ apparaîtra comme une *onde porteuse rapidement oscillante* sur laquelle le vecteur $\xi(t)$ inscrit un *signal lentement modulé* défini par l'équation (2.2).

Notre premier problème sera maintenant de définir ces termes "*oscillants*" et "*moyens*" sous une forme générale qui remplacera (1.5) et (1.6). Nous donnerons plus loin des exemples concrets que nous utiliserons dans les applications,

mais tout notre algorithme se déduira des quelques conditions générales suivantes.

Nous supposons que les seconds membres de (1.1), ainsi que toutes les fonctions du même type (que nous désignerons par $F(t, \xi)$ ou $F(t, x)$) dépendant explicitement du temps, qui apparaîtront dans les calculs, seront *dérivables* par rapport à t autant de fois qu'il le faudra et *bornées* pour tout $t \geq 0$; nous supposons en outre que nous savons définir un *opérateur lissant* $\bar{\cdot}$ et un *opérateur oscillant* $\tilde{\cdot}$ qui n'agissent que sur la dépendance *explicite* de F par rapport à t et qui possèdent les *trois propriétés* suivantes (*):

A. $F(t, x)$ admet la décomposition :

$$(2.3) \quad F = \bar{F} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t}$$

B. $\bar{F}(t)$ et $\tilde{F}(t)$ sont bornées pour tout $t \geq 0$, ainsi que les itérées des opérations $\bar{\cdot}$ et $\tilde{\cdot}$.

C. Les deux opérations sont "orthogonales" :

$$(2.4) \quad \tilde{\bar{F}} = \bar{\tilde{F}} = 0.$$

Ces conditions entraînent à elles seules des propriétés intéressantes. En effet, appliquons par exemple à $\bar{F}$ la décomposition (2.3) et nous aurons :

$$(2.5) \quad \bar{\bar{F}} = \bar{F}$$

L'opérateur lissant est donc idempotent comme il convient à une moyenne. Inversement, appliquons l'opérateur $\tilde{\cdot}$ à (2.3); il s'ensuit que :

$$(2.6) \quad \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} = 0$$

(*) On verra que ces propriétés sont suffisantes pour développer notre méthode, mais soulignons ici que nous n'avons pas la prétention d'énoncer une *axiomatique*.

ce qui veut dire que le second terme de (2.3) est nul "en moyenne", tout comme $\tilde{F}$. Maintenant, appliquons d'une part la décomposition (2.3) à la fonction $\tilde{F}$ et, d'autre part, l'opération $\tilde{\cdot}$ à la décomposition (2.3) de F . Nous trouverons :

$$(2.7) \quad \tilde{F} = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t}$$

et on voit que $\tilde{\cdot}$ est un opérateur "intégrant".

Enfin, notre terminologie sur $\bar{\cdot}$ et $\tilde{\cdot}$ sera justifiée par les propriétés des moyennes temporelles de $\bar{F}$ et de $\tilde{F}$. En effet, d'après (2.3), on a :

$$\frac{1}{T} \int_0^T F dt = \frac{1}{T} \int_0^T \bar{F} dt + \frac{1}{T} [\tilde{F}(T) - \tilde{F}(0)]$$

et comme $\tilde{F}$ a été supposée bornée pour tout $t \geq 0$, il s'ensuit que :

$$(2.8) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \bar{F} dt;$$

on voit donc que F et $\bar{F}$ ont *même moyenne temporelle*. D'autre part, d'après (2.7), on a :

$$(2.9) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{F} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} [\tilde{F}(T) - \tilde{F}(0)] = 0;$$

$\tilde{F}$ est donc nul en moyenne temporelle, ce qui justifie qu'on qualifie $\tilde{F}$ de fonction "oscillante".

Donnons maintenant des exemples.

1. On vérifie que nos conditions sont évidemment satisfaites par les moyennes temporelles et les fonctions oscillantes de Bogolioubov (1.5) et (1.6).

2. Remarquons de plus que si F se présente sous la forme d'une somme de Fourier :

$$(2.10) \quad F(t) = \sum_{\nu} e^{i\nu t} F_{\nu},$$

(ce qui est d'ailleurs le seul cas envisagé par Bogolioubov), prendre la moyenne temporelle de $F(t)$ revient tout simplement à ne conserver que le terme constant F_0 du développement. Une généralisation évidente consistera à faire, tout simplement, une *troncature* plus large en se donnant un nombre $N > 0$ et en

posant :

$$(2.11) \quad \bar{F} = \sum_{|v'| \leq N} e^{iv't} F_{v'} ; \quad \tilde{F} = \sum_{|v''| > N} \frac{e^{iv''t}}{iv''} F_{v''} ; \dots$$

Les conditions posées plus haut sont satisfaites et c'est ce procédé qui nous permettra, plus loin, de résoudre le problème de la traversée d'une zone de résonance. Bien entendu, il s'agit là d'une idée classique : elle a été employée en mécanique céleste (H. Poincaré, 1892), ainsi que dans l'approximation dite du "champ tournant" en résonance magnétique nucléaire (Abragam, 1961), ou dans des problèmes analogues en mécanique quantique. Cependant, il ne s'agissait pas jusqu'ici d'une véritable *méthode*, mais seulement d'un artifice qui se limitait aux *équations linéaires* et au *premier ordre* d'approximation tandis que nous en ferons ici un procédé systématique, étendu à tous les ordres d'approximation et applicable aux cas non-linéaires.

3. Un autre exemple de décomposition (2.3) nous sera donné par des fonctions amorties du type :

$$(2.12) \quad F = \sum_v e^{(-\lambda + iv)t} F_v \quad (\lambda > 0)$$

On peut prendre alors la décomposition :

$$(2.13) \quad \bar{F} = \sum_{|v'| \leq N} e^{(-\lambda + iv')t} F_{v'} ; \quad \tilde{F} = \sum_{|v''| > N} \frac{e^{(-\lambda + iv'')t}}{-\lambda + iv''} F_{v''} ; \dots$$

Ici aussi, nos conditions sont satisfaites. Cette décomposition s'est révélée très utile dans la théorie quantique des interactions entre la matière et le rayonnement (Lochak-Thiounn, 1969) car on peut représenter ainsi la largeur spectrale du rayonnement incident. Remarquons que dans ce cas la notion de moyenne temporelle telle que l'emploie Bogolioubov serait inefficace, puisque celle-ci serait toujours nulle, si bien que l'équation approchée (2.2) se réduirait trivialement à $\frac{d\xi}{dt} = 0$, ce qui n'est plus le cas avec la définition (2.13).

Venons-en, maintenant, à l'algorithme que nous proposons. Nous devons d'abord écrire sous forme commode les équations que nous voulons traiter. En effet, dans le cas des

systèmes hamiltoniens, les équations analogues à (1.1) sont les équations de Hamilton ; mais en réalité, c'est sur l'équation de Jacobi que nous développerons notre méthode. La raison en est que les opérateurs $\bar{\cdot}$ et $\tilde{\cdot}$ étant *linéaires*, nous profiterons de l'*additivité* de l'*action* et des *fonctions génératrices* lors des compositions de transformations canoniques. En fait, c'est cette propriété qui s'utilise déjà dans la méthode de Lindstaedt-Poincaré (voir : Poincaré, 1892 ; Juvet, 1926 ; Lochak, 1981, 1982).

3. La représentation d'interaction en théorie de Hamilton-Jacobi

Nous considérerons par la suite des systèmes de Hamilton-Jacobi de la forme :

$$(3.1) \quad \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} + H(\phi, \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \phi}, t) = 0$$

$$H(\phi, J, t) = H_0(J) + \epsilon K(\phi, J, t) ; \quad \phi, J \in \mathbb{R}^n$$

où H_0 est le hamiltonien du système "non-perturbé", qui est supposé *conservatif* et *intégrable* : c'est ce système non perturbé qui définit les variables *action-angle* (J, ϕ) à l'aide desquelles (3.1) est exprimé ; ϵK est une perturbation dépendant du temps ; ϵ est un petit paramètre.

Nous nous placerons désormais en *représentation d'interaction* (qui équivaut à la mise sous *forme standard* de Bogolioubov et Mitropolsky). Dans le cas présent, grâce au fait que (3.1) a été écrit en termes de variables action-angle de H_0 , la transformation est triviale. Il suffit de poser :

$$(3.2) \quad \mathcal{P}(\phi, J, t) = S(\phi, J, t) - E_0 t ; \quad E_0 = H_0(J) ,$$

où E_0 n'est autre que l'énergie du système non perturbé. Nous aurons alors pour (3.1) la représentation cherchée :

$$(3.3) \quad \frac{\partial S}{\partial t} + \epsilon K(\phi, \frac{\partial S}{\partial \phi}, t) = 0$$

4. La méthode des moyennes résonnantes aux deux premiers ordres d'approximation

Nous transposons maintenant à (3.3) les principes

énoncés au § 2, en utilisant notamment les formules (2.3) et (2.4). Nous nous contenterons, dans ce paragraphe, de calculs formels que nous justifierons au paragraphe suivant dans le cas général.

4.1 Approximation du premier ordre

Nous allons construire une transformation canonique $(\phi, J) \rightarrow (\chi, L)$ du premier ordre en ϵ et du type (2.1); elle dérivera donc d'une fonction génératrice telle que :

$$(4.1) \quad G_1(\phi, L, t) = \phi L - \epsilon \tilde{F}_1(\phi, L, t)$$

où $\tilde{F}_1$ est une fonction inconnue, mais que nous déterminerons en lui imposant d'être purement oscillante (donc de moyenne généralisée nulle) et en exigeant que (3.3) se transforme à des termes $O(\epsilon^2)$ près, en une équation du type :

$$(4.2) \quad \frac{\partial S_1}{\partial t} + \epsilon \bar{K}_1(\chi, \frac{\partial S_1}{\partial \chi}, t) = 0$$

où $\bar{K}_1$ est une seconde fonction inconnue qui sera supposée non-oscillante en t .

La relation classique qui donne le nouvel hamiltonien en fonction de l'ancien et de la fonction génératrice (Goldstein, 1980) s'écrit ici, en tenant compte de (4.1) :

$$(4.3) \quad \epsilon \bar{K}_1(\chi, L, t) = \epsilon K(\phi, J, t) + \frac{\partial G_1}{\partial t}(\phi, L, t) \\ = \epsilon K(\phi, J, t) - \epsilon \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial t}(\phi, L, t)$$

Appliquons alors à K la décomposition (2.3) et (4.3) s'écrit :

$$(4.4) \quad \bar{K}_1(\chi, L, t) = \bar{K}(\phi, J, t) + \frac{\partial \bar{K}}{\partial t}(\phi, J, t) - \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial t}(\phi, L, t)$$

Nous allons montrer que cette identité sera satisfaite au premier ordre en ϵ si nous adoptons pour $\tilde{F}_1$ et $\bar{K}_1$ les décompositions suivantes :

$$(4.5) \quad \tilde{F}_1(\phi, L, t) = \tilde{K}(\phi, L, t); \quad \bar{K}_1(\chi, L, t) = \bar{K}(\chi, L, t)$$

où K est l'hamiltonien du système initial (3.3); il s'en suivra donc la forme explicite de (4.1) :

$$(4.6) \quad G_1(\phi, L, t) = \phi L - \epsilon \tilde{K}(\phi, L, t)$$

$$(4.7) \quad \frac{\partial S_1}{\partial t} + \epsilon \bar{K}(\chi, \frac{\partial S_1}{\partial \chi}, t) = 0$$

En effet, le changement de variables canoniques qui dérive de (4.6) s'écrit :

$$(4.8) \quad J = \frac{\partial G_1}{\partial \phi} = L - \epsilon \frac{\partial \tilde{K}}{\partial \phi}(\phi, L, t)$$

$$\chi = \frac{\partial G_1}{\partial L} = \phi - \epsilon \frac{\partial \tilde{K}}{\partial L}(\phi, L, t)$$

et comme ces transformations sont infinitésimales, elles s'inversent facilement au premier ordre en ϵ et nous obtenons :

$$(4.9) \quad J = L - \epsilon \frac{\partial \tilde{K}}{\partial \chi}(\chi, L, t)$$

$$\phi = \chi + \epsilon \frac{\partial \tilde{K}}{\partial L}(\chi, L, t)$$

Ceci est l'analogue de la transformation (2.1). On sait que (ϕ, J) et (χ, L) ne diffèrent que par des termes oscillants, de l'ordre de ϵ , et si l'on introduit (4.9) dans (4.5), on vérifie aussitôt que l'identité (4.4) est satisfaite au premier ordre en ϵ .

Nous pouvons donc énoncer le procédé d'approximation suivant :

a. On substituera à l'équation initiale (3.3) l'équation approchée (4.7) dont on cherchera une intégrale complète $S_1(\chi, \alpha, t)$ et on définira l'évolution de χ et L par la méthode de Jacobi :

$$(4.10) \quad \beta = \frac{\partial S_1}{\partial \alpha}(\chi, \alpha, t), \quad J_1 = \frac{\partial S_1}{\partial \chi}(\chi, \alpha, t)$$

où α et β sont des constantes d'intégration.

b. En posant alors simplement pour les variables ϕ et J du système initial :

$$(4.11) \quad \phi = \chi, \quad J = L$$

on obtiendra une approximation ordinaire du premier ordre.

c. Si maintenant nous introduisons χ et L dans le changement de variables (4.9), on obtiendra ce que nous appellerons en reprenant la terminologie de Bogolioubov, une *approximation améliorée du premier ordre*, ce que nous légitimerons au paragraphe suivant.

4.2 Approximation du second ordre

En utilisant les résultats déjà acquis (4.6) et (4.7), nous chercherons une nouvelle fonction génératrice et une nouvelle équation sous la forme :

$$(4.12) \quad G_2(\phi, L, t) = \phi L - \epsilon \bar{K}(\phi, L, t) - \epsilon^2 \bar{F}_2(\phi, L, t) ;$$

$$(4.13) \quad \frac{\partial S_2}{\partial t} + \epsilon \bar{K}(\chi, \frac{\partial S_2}{\partial \chi}, t) + \epsilon^2 \bar{K}_2(\phi, \frac{\partial S_2}{\partial \chi}, t) = 0$$

où K est l'hamiltonien de (3.3) et où $\bar{F}_2$ et $\bar{K}_2$ sont deux nouvelles fonctions inconnues (respectivement *oscillante* et *non-oscillante*) que nous allons définir. En écrivant, comme en (4.3), le nouvel hamiltonien de (4.13) en fonction de l'hamiltonien initial de (3.3), il vient :

$$(4.14) \quad \epsilon \bar{K}(\chi, L, t) + \epsilon^2 \bar{K}_2(\chi, L, t) = \epsilon K(\phi, J, t) + \frac{\partial G_2}{\partial t}(\phi, L, t)$$

ce qui donne, en tenant compte de (2.3) et de (4.12) et en simplifiant par ϵ :

$$(4.15) \quad \bar{K}(\chi, L, t) + \epsilon \bar{K}_2(\chi, L, t) = \bar{K}(\phi, J, t) + \frac{\partial \bar{K}}{\partial t}(\phi, J, t) - \frac{\partial \bar{K}}{\partial t}(\phi, J, t) - \epsilon \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial t}(\phi, L, t)$$

Pour déterminer $\bar{K}_2$ et $\bar{F}_2$, nous allons d'abord écrire cette relation à l'aide du seul système de variables (χ, L) et de la transformation qui dérive de (4.12) :

$$(4.16) \quad J = \frac{\partial G_2}{\partial \phi} = L - \epsilon \frac{\partial \bar{K}}{\partial \phi}(\phi, L, t) - \epsilon^2 \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \phi}(\phi, L, t)$$

$$\chi = \frac{\partial G_2}{\partial L} = \phi - \epsilon \frac{\partial \bar{K}}{\partial L}(\phi, L, t) - \epsilon^2 \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial L}(\phi, L, t)$$

Les relations (4.16) s'inversent facilement à $O(\epsilon^3)$ près et donnent sous forme explicite $(\chi, L) \rightarrow (J, \phi)$:

$$(4.17) \quad J = L - \epsilon \frac{\partial \bar{K}}{\partial \chi}(\chi, L, t) - \epsilon^2 \left[\frac{\partial^2 \bar{K}}{\partial \chi^2}(\chi, L, t) \frac{\partial \bar{K}}{\partial L}(\chi, L, t) + \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \chi}(\chi, L, t) \right]$$

$$\phi = \chi + \epsilon \frac{\partial \bar{K}}{\partial L}(\chi, L, t) + \epsilon^2 \left[\frac{\partial^2 \bar{K}}{\partial \chi \partial L}(\chi, L, t) \frac{\partial \bar{K}}{\partial L}(\chi, L, t) + \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial L}(\chi, L, t) \right]$$

Introduisons alors ces formules dans (4.15) et nous aurons, toujours au second ordre (et les arguments étant partout χ, L, t) :

$$(4.18) \quad \bar{K}_2 + \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial t} = \frac{\partial \bar{K}}{\partial \chi} \frac{\partial \bar{K}}{\partial L} - \frac{\partial \bar{K}}{\partial L} \frac{\partial \bar{K}}{\partial \chi} - \frac{\partial^2 \bar{K}}{\partial t \partial L} \frac{\partial \bar{K}}{\partial \chi}$$

On peut donner à cette formule une forme plus intrinsèque en faisant apparaître des crochets de Poisson et un produit scalaire :

$$(4.19) \quad \bar{K}_2 + \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial t} = [\bar{K}, \bar{K}] + \frac{1}{2} [\bar{K}, \frac{\partial \bar{K}}{\partial t}] - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\frac{\partial \bar{K}}{\partial L} \cdot \frac{\partial \bar{K}}{\partial \chi}) ;$$

En appliquant au second membre de (4.19) la décomposition (2.3) et en identifiant, entre les deux membres, les parties moyennes et oscillantes, on trouve $\bar{K}_2$ et $\bar{F}_2$ en fonction de l'hamiltonien K du système initial (exprimé en termes de variables χ, L, t) :

$$(4.20) \quad \bar{K}_2 = [\bar{K}, \bar{K}] + \frac{1}{2} [\bar{K}, \frac{\partial \bar{K}}{\partial t}] - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\frac{\partial \bar{K}}{\partial L} \cdot \frac{\partial \bar{K}}{\partial \chi})$$

$$(4.21) \quad \bar{F}_2 = [\bar{K}, \bar{K}] + \frac{1}{2} [\bar{K}, \frac{\partial \bar{K}}{\partial t}] - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\frac{\partial \bar{K}}{\partial L} \cdot \frac{\partial \bar{K}}{\partial \chi})$$

Ce sont les expressions que nous devons introduire dans (4.13) et dans (4.17), et nous définirons comme suit l'approximation du second ordre :

a. On substituera à l'équation initiale (3.3) l'équation approchée (4.13), avec $\bar{K}_2$ défini par (4.20) ; on en cherchera une intégrale complète $S_2(\chi, \alpha, t)$ et on définira l'évolution de χ et L par la méthode de Jacobi :

$$(4.22) \quad \beta = \frac{\partial S_2}{\partial \alpha}(\chi, \gamma, t) ; \quad L = \frac{\partial S_2}{\partial \chi}(\chi, \alpha, t)$$

b. Si on revient maintenant aux variables ϕ, J en introduisant χ et L dans les formules (4.17) limitées aux termes du premier ordre (ou, ce qui revient au même, en utilisant les formules (4.9)) on obtiendra une *approximation ordinaire du second ordre*.

c. Si, au contraire, on introduit x et L dans les formules (4.17) complètes, avec $\tilde{F}_2$ défini par (4.21), on obtiendra une *approximation améliorée du second ordre* (en reprenant, ici aussi, la terminologie que Bogolioubov utilise dans sa propre méthode). Nous justifierons cela au § 6.

5. Approximations à l'ordre n

Supposons que les formules analogues à (4.6) et à (4.7) soient connues jusqu'à l'ordre $n-1$ et cherchons les formules correspondantes à l'ordre n . Nous devons donc construire une fonction génératrice :

$$(5.1) \quad G_n(\phi, L, t) = \phi L - \sum_{k=1}^n \epsilon^k \tilde{F}_k(\phi, L, t)$$

dans laquelle les $\tilde{F}_k$ sont *purement oscillantes* ; par hypothèse, $\tilde{F}_1, \dots, \tilde{F}_{n-1}$ sont déjà connues. Pour déterminer $\tilde{F}_n$, nous introduisons dans (3.3) la transformation $(\phi, J) \rightarrow (x, L)$ qui dérive de G_n :

$$(5.2) \quad J = \frac{\partial G_n}{\partial \phi}(\phi, L, t) ; \quad x = \frac{\partial G_n}{\partial L}(\phi, L, t)$$

et nous imposons la condition que la transformée de (3.3) puisse s'écrire, à l'ordre n , sous la forme :

$$(5.3) \quad \frac{\partial S_n}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \epsilon^k \bar{K}_k(x, \frac{\partial S_n}{\partial x}, t) = 0$$

où les $\bar{K}_k$ devront être des fonctions *moyennes*, dont les $n-1$ premières sont déjà connues par hypothèse, seule $\bar{K}_n$ restant à déterminer. $\tilde{F}_n$ et $\bar{K}_n$ s'obtiendront alors en exprimant (à l'ordre n) le nouvel hamiltonien figurant dans (5.3) en fonction de l'ancien hamiltonien K (celui de (3.3)) et de la fonction génératrice G_n . En tenant compte de (5.1) et de (5.3), on aura :

$$(5.4) \quad \sum_{k=1}^n \epsilon^k [\bar{K}_k(x, L, t) + \frac{\partial \tilde{F}_k}{\partial t}(\phi, L, t)] = \epsilon K(\phi, J, t)$$

De même qu'on l'a fait aux deux premiers ordres d'approximation, nous devons exprimer (5.4) en termes des seules variables (x, L) , ce qui exige d'explicitier (5.2) sous la forme :

$$(5.5) \quad J = L - \sum_{k=1}^n \epsilon^k A_k(x, L, t) ; \quad \phi = x + \sum_{k=1}^n \epsilon^k B_k(x, L, t).$$

Ici encore, les coefficients $A_1, \dots, A_{n-1}$ et $B_1, \dots, B_{n-1}$ sont déjà connus par hypothèse et il est facile de voir que ce sont des polynômes construits sur $\tilde{K}(x, L, t)$ et ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ (K étant toujours l'hamiltonien de (3.3)). Il reste donc, dans l'inversion de (5.2), à calculer A_n et B_n , ce qui est facile, bien qu'un peu long. Dans A_n et B_n , apparaîtront les n -èmes dérivées de K . Etant donné que la transformation (5.2) dérivant de (5.1) est infinitésimale en ϵ , on voit que : *si les dérivées de l'hamiltonien K du système initial existent et sont bornées(*) jusqu'à l'ordre $n+1$ pour $t \geq 0$, les formules (5.2) seront inversibles dès que ϵ sera suffisamment petit, et nous trouverons (5.5) à des termes $O(\epsilon^{n+1})$ près.*

Remarque : On pourrait objecter que nous formulons cette proposition alors que $\tilde{F}_n$ n'est pas encore déterminée. Mais en réalité, $\tilde{F}_n$ (et ses dérivées premières) n'intervient dans (5.5) que dans les termes d'ordre n et il suffit donc de supposer, *a priori* que $\tilde{F}_n$ a des dérivées bornées pour que la construction soit possible et de s'assurer *a posteriori* que cette condition est bien satisfaite en vertu des conditions posées sur K , puisqu'on trouvera pour $\tilde{F}_n$ un polynôme sur K et ses n premières dérivées.

Si nous obtenons alors une intégrale complète S_n de (5.3), elle nous donnera le mouvement $x, L = \frac{\partial S}{\partial x}$ du système moyenné (5.3) ; si nous introduisons x et L dans les formules (5.5) nous obtiendrons l'*approximation améliorée du n -ème ordre* ; mais nous aurons déjà une *approximation ordinaire du n -ème ordre* en introduisant ces mêmes x et L dans les formules (5.5) limitées aux termes en $n-1$.

6. Justification de la méthode proposée

Les notations que nous avons utilisées jusqu'ici suffisent pour les applications, mais pour justifier la méthode, nous devons les préciser quelque peu.

(*) Cette condition sera évidemment satisfaite sur un compact où K est $n+1$ fois continûment dérivable.

Reprenons donc G_n , défini par (5.1), et la transformation (5.2) qui en dérive et que nous prendrons comme transformation *exacte*. Dans un domaine de $\{\phi, J, \chi, L\}$ où K est $n+1$ fois *continûment dérivable*, (5.2) sera inversible pour ϵ suffisamment petit et nous pourrons écrire, au lieu de (5.5):

$$(6.1) \quad \begin{aligned} J &= L - \sum_{k=1}^n \epsilon^k A_k(\chi, L, t) + \epsilon^{n+1} a(\epsilon, \chi, L, t) ; \quad ||a|| = O(1) \\ \phi &= \chi + \sum_{k=1}^n \epsilon^k B_k(\chi, L, t) + \epsilon^{n+1} b(\epsilon, \chi, L, t) ; \quad ||b|| = O(1) \end{aligned}$$

les A_k et les B_k ayant les expressions précédemment obtenues par récurrence.

Désignons alors par $\epsilon M(\chi, L, t)$ l'hamiltonien *exact* obtenu en introduisant dans (3.3) la transformation dérivant de (5.1). Nous aurons la relation :

$$(6.2) \quad \epsilon M(\chi, L, t) = \epsilon K(\phi, J, t) + \frac{\partial G}{\partial t}(\chi, L, t)$$

que nous prendrons, elle aussi, sous forme exacte. Mais introduisons maintenant dans (6.2) la transformation (6.1) qui dérive de (5.1) : nous voyons que (6.1) n'étant autre que le développement de Taylor, à l'ordre n , de (J, ϕ) au voisinage de (L, χ) , nous trouverons d'après (6.2) l'expression de $\epsilon M(\chi, L, t)$ comme développement de $\epsilon K(\phi, J, t)$. Mais nous connaissons les n premiers termes, qui ne sont autre que l'hamiltonien approché qui figure dans (5.3), et comme la dérivée $(n+1)$ -ème de K est supposée continue, le *reste sera borné*; et si nous supposons que les dérivées d'ordre $(n+2)$ sont continues dans un certain domaine, *les dérivées* de ce reste seront bornées également :

$$(6.3) \quad \epsilon M(\chi, L, t) = \sum_{k=1}^n \epsilon^k \bar{K}_k(\chi, L, t) + \epsilon^{n+1} R(\epsilon, \chi, L, t)$$

$$R = O(1)$$

et nous écrirons l'équation équivalente à (3.3) par la transformation (5.2) ou (6.1) prise sous forme exacte :

$$(6.4) \quad \frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \epsilon^k \bar{K}_k(\chi, \frac{\partial \Sigma}{\partial \chi}, t) + \epsilon^{n+1} R(\epsilon, \chi, \frac{\partial \Sigma}{\partial \chi}, t) = 0$$

$$R = O(1)$$

Mais d'autre part, nous reprendrons l'équation approchée (5.3), mais en désignant maintenant par χ_n, L les variables canoniques correspondantes pour les distinguer des variables exactes qui sont définies par (6.4)(*). Nous aurons donc :

$$(6.5) \quad \frac{\partial S_n}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \epsilon^k \bar{K}_k(\chi_n, \frac{\partial S_n}{\partial \chi_n}, t) = 0.$$

Soit alors $S_n(\chi_n, \alpha, t)$ une intégrale complète de (6.5), où nous désignerons par α et β les constantes habituelles de Jacobi. La solution du système approché s'écrira donc :

$$(6.6) \quad L_n = \frac{\partial S_n}{\partial \chi_n}(\chi_n, \alpha, t) ; \quad \beta_n = \frac{\partial S_n}{\partial \alpha_n}(\chi_n, \alpha, t)$$

Effectuons maintenant une dernière transformation canonique : celle qui dérive de S_n prise comme fonction génératrice et que nous ferons agir sur l'équation exacte (6.4). En désignant par ρ, σ les nouvelles variables, $(L, \chi) \rightarrow (\rho, \sigma)$ s'écrira donc :

$$(6.7) \quad L = \frac{\partial S}{\partial \chi}(\chi, \rho, t) ; \quad \sigma = \frac{\partial S}{\partial \rho}(\chi, \rho, t)$$

En appliquant cette transformation à (6.4) et en désignant par $\epsilon^{n+1} R^*(\sigma, \rho, t)$ l'hamiltonien dans la représentation (ρ, σ) nous aurons :

$$(6.8) \quad \epsilon^{n+1} R^*(\sigma, \rho, t) = \sum_{k=1}^n \epsilon^k \bar{K}_k(\chi, L, t) + \epsilon^{n+1} R(\chi, L, t) + \frac{\partial S_n}{\partial t}(\chi, \rho, t)$$

Mais comme S_n est une intégrale complète de (6.5), la relation (6.8) se réduit à :

$$(6.9) \quad R^*(\sigma, \rho, t) = R(\chi, L, t)$$

(σ, ρ) et (χ, L) étant liés par la transformation (6.7) et comme cette dernière est inversible (par l'hypothèse même que S_n est une intégrale complète), il s'ensuit que R^* restera

(*) L'usage des lettres indicées telles que χ_n et L_n serait, par contre, inutile dans les applications et ne ferait qu'alourdir les notations.

borné avec ses dérivées premières dans tout domaine où il en sera ainsi pour R . Donc dans un tel domaine, (6.4) (qui est équivalente à l'équation initiale (3.3)) sera équivalente à l'équation :

$$(6.10) \quad \frac{\partial \Sigma^*}{\partial t} + \epsilon^{n+1} R^*(\sigma, \frac{\partial \Sigma^*}{\partial \sigma}, t) = 0, \quad |R^*| \leq C$$

où C est une certaine constante et Σ^* la nouvelle fonction principale de Hamilton, qui s'exprime en termes de σ et t . Si nous appliquons la même transformation (6.7) à l'équation approchée (6.5), nous obtiendrons par définition de S_n , l'équation :

$$(6.11) \quad \frac{\partial S_n^*}{\partial t} = 0$$

où S_n^* est la nouvelle fonction principale approchée qui s'exprime en termes des nouvelles variables canoniques ρ_n, σ_n . Choisissons pour intégrale complète de (6.11) :

$$(6.12) \quad S_n^* = \sigma_n \cdot \alpha$$

d'où il suit évidemment, en accord avec (6.6) :

$$(6.13) \quad \rho_n = \frac{\partial S_n^*}{\partial \sigma} = \alpha; \quad \beta = \frac{\partial S_n^*}{\partial \alpha} = \sigma_n$$

D'autre part, choisissons pour (6.10) une intégrale complète $\Sigma^*(\sigma, \alpha, t)$, avec les mêmes constantes α et telle qu'à l'instant t_0 on ait :

$$(6.14) \quad \Sigma^*(\sigma, \alpha, t_0) = \sigma \cdot \alpha,$$

ce qui signifie qu'on a :

$$(6.15) \quad \rho(t_0) = \frac{\partial \Sigma^*}{\partial \sigma} \Big|_{t_0} = \alpha = \rho_n; \quad \beta = \frac{\partial \Sigma^*}{\partial \alpha} \Big|_{t_0} = \sigma(t_0) = \sigma_n;$$

autrement dit que le mouvement exact défini par (6.10) et le mouvement approché défini par (6.11) commenceront avec les mêmes conditions initiales. Introduisons alors cette intégrale complète dans (6.10); comme nous avons pour tout t :

$$(6.16) \quad \rho = \frac{\partial \Sigma^*}{\partial \sigma}, \quad \beta = \frac{\partial \Sigma^*}{\partial \alpha}$$

nous obtiendrons, en dérivant (6.10) par rapport à σ et à α et en intégrant par rapport au temps, en tenant compte de (6.15) :

$$(6.17) \quad \begin{aligned} \rho(t) - \rho_n &= -\epsilon^{n+1} \int_{t_0}^t \frac{\partial R^*}{\partial \sigma}(\sigma, \frac{\partial \Sigma^*}{\partial \sigma}, \theta) d\theta \\ \sigma(t) - \sigma_n &= -\epsilon^{n+1} \int_{t_0}^t \frac{\partial R^*}{\partial \alpha}(\sigma, \frac{\partial \Sigma^*}{\partial \sigma}, \theta) d\theta \end{aligned}$$

Or, si l'hamiltonien K de (3.3) est $n+2$ fois continûment dérivable dans un certain domaine, nous pourrions nous placer dans une domaine correspondant de ρ, σ tel que :

$$(6.18) \quad \left| \frac{\partial R^*}{\partial \sigma} \right| \leq C_1, \quad \left| \frac{\partial R^*}{\partial \alpha} \right| \leq C_2$$

et il suit de (6.17) que :

$$(6.19) \quad ||\rho(t) - \rho_n|| \leq C_1 \epsilon^{n+1} |t - t_0|; \quad ||\sigma(t) - \sigma_n|| \leq C_2 \epsilon^{n+1} |t - t_0|$$

et donc :

$$(6.20) \quad ||\rho(t) - \rho_n|| \leq C_1 \epsilon^n; \quad ||\sigma(t) - \sigma_n|| \leq C_2 \epsilon^n \text{ si } |t - t_0| \leq \frac{1}{\epsilon}$$

Cela signifie que, pendant une durée qui n'excède pas $1/\epsilon$, $\rho(t)$ et $\sigma(t)$ ne s'écarteront pas plus que de ϵ^n par rapport aux valeurs approchées ρ_n et σ_n .

Nous pouvons maintenant remonter jusqu'aux variables initiales. Effectuons d'abord, sur (ρ, σ) et (ρ_n, σ_n) la même transformation (6.6) et (6.7) qui est continue et inversible, si bien que nous pouvons affirmer qu'il existera deux nouvelles constantes D_1 et D_2 telles que, d'après (6.20) :

$$(6.21) \quad ||L(t) - L_n(t)|| \leq D_1 \epsilon^n; \quad ||x(t) - x_n(t)|| \leq D_2 \epsilon^n$$

si $|t - t_0| \leq \frac{1}{\epsilon}$

Si nous appliquons maintenant à (L, x) et (L_n, x_n) la transformation continue et inversible (6.1), nous obtiendrons encore des inégalités du même type que (6.21) entre les variables (J, ϕ) du système initial et des variables que nous désignerons par (J', ϕ') qui sont les transformées de (L_n, x_n) par (6.21). Donc, avec de nouvelles constantes D'_1, D'_2 :

$$(6.22) \quad ||\vec{J}(t) - \vec{J}'(t)|| \leq D_1 \epsilon^n ; \quad ||\vec{\phi}(t) - \vec{\phi}'(t)|| \leq D_2 \epsilon^n$$

$$\text{si } |t - t_0| < \frac{1}{\epsilon}$$

Mais si, au lieu d'appliquer (6.1) aux variables $(\vec{L}_n, \vec{x}_n)$, nous appliquons la transformation approchée (5.5), nous aurons, au lieu de $(\vec{J}', \vec{\phi}')$, un nouveau couple de variables que nous désignerons par $(\vec{J}_n, \vec{\phi}_n)$ et tel que :

$$(6.23) \quad \vec{J}_n = \vec{L}_n - \sum_{k=1}^n \epsilon^k \vec{A}_k(\vec{x}_n, \vec{L}_n, t) ; \quad \vec{\phi}_n = \vec{x}_n + \sum_{k=1}^n \epsilon^k \vec{B}_k(\vec{x}_n, \vec{L}_n, t)$$

Mais $(\vec{J}_n, \vec{\phi}_n)$ n'est autre que l'approximation améliorée du n -ième ordre, puisque $(\vec{x}_n, \vec{L}_n)$ sont fournis par l'équation approchée (6.5). Or les transformations (6.1) et (6.5) (ou (6.23)) ne diffèrent que de $O(\epsilon^{n+1})$. Donc (6.22) est aussi valable pour $(\vec{J}_n, \vec{\phi}_n)$ avec de nouvelles constantes E_1, E_2 :

$$(6.24) \quad ||\vec{J}(t) - \vec{J}_n(t)|| \leq E_1 \epsilon^n ; \quad ||\vec{\phi}(t) - \vec{\phi}_n(t)|| \leq E_2 \epsilon^n$$

$$\text{si } |t - t_0| \leq \frac{1}{\epsilon}$$

Donc : Si une solution exacte du système initial et une solution améliorée du n -ième ordre ont mêmes conditions initiales, leur différence reste de l'ordre de ϵ^n pendant une durée de l'ordre de $1/\epsilon$.

Mais observons maintenant qu'en négligeant le dernier terme de (6.23), nous obtiendrons de nouvelles variables $(\vec{J}'_n, \vec{\phi}'_n)$:

$$(6.25) \quad \vec{J}'_n = \vec{L}_n - \sum_{k=1}^{n-1} \epsilon^k \vec{A}_k(\vec{x}_n, \vec{L}_n, t) ; \quad \vec{\phi}'_n = \vec{x}_n - \sum_{k=1}^{n-1} \epsilon^k \vec{B}_k(\vec{x}_n, \vec{L}_n, t)$$

C'est ce que nous appelions l'approximation ordinaire. Or $(\vec{J}_n, \vec{\phi}_n)$ et $(\vec{J}'_n, \vec{\phi}'_n)$ ne diffèrent que de quantités du n -ième ordre, si bien que nous aurons aussi, avec de nouvelles constantes :

$$(6.26) \quad ||\vec{J}(t) - \vec{J}'_n(t)|| \leq E_1 \epsilon^n ; \quad ||\vec{\phi}(t) - \vec{\phi}'_n(t)|| \leq E_2 \epsilon^n$$

$$\text{si } |t - t_0| \leq \frac{1}{\epsilon}$$

Et on voit que : l'approximation ordinaire du n -ième ordre possède des propriétés asymptotiques analogues à celles de l'approximation améliorée. Mais bien entendu, nous aurons :

$$(6.27) \quad E_1 \geq E_1 ; \quad E_2 \geq E_2$$

et l'approximation améliorée mérite donc bien son nom, mais elle le mérite surtout parce qu'elle fait apparaître dans $\vec{A}_n(\vec{x}_n, \vec{L}_n, t)$ et $\vec{B}_n(\vec{x}_n, \vec{L}_n, t)$ des harmoniques supérieures des vibrations, qui sont absentes de l'approximation ordinaire.

Remarques :

1. Le procédé que nous employons dans la démonstration du théorème ci-dessus est la transposition à la mécanique classique de celui utilisé en mécanique quantique (Lochak-Thiounn, 1969). On retrouve le même procédé chez Arnold (1976) et d'autres auteurs, mais limité à l'approximation ordinaire du premier ordre dans le cas des moyennes temporelles de Bogolioubov et Mitropolsky.

2. On peut remarquer qu'en réalité, ce théorème n'a aucun rapport avec des moyennes, quelles qu'elles soient ! Même nos relations (2.3) et (2.4) n'ont pas été utilisées. Le sens de ce théorème est donc très général : Si, par un changement de variables infinitésimal d'ordre n en ϵ , tel que (5.2), on substitue au système (3.3) une équation approchée telle que (5.3), les formules (6.23) et (6.25) donneront des approximations asymptotiques (respectivement améliorée et ordinaire) sous réserve que les fonctions $K, \vec{K}_k, \vec{A}_k, \vec{B}_k$ soient suffisamment régulières et ϵ suffisamment petit. Mais cela signifie donc qu'il faudrait établir un théorème beaucoup plus fin pour pouvoir vraiment comparer les différentes définitions possibles des moyennes.

7. Conclusion

Nous voudrions enfin, souligner l'intérêt principal de la méthode que nous proposons : à notre avis, cet intérêt réside en ce qu'il ne s'agit pas là d'une méthode de calcul aux règles rigides, mais plutôt d'une "recette" permettant de construire facilement des méthodes de calcul différentes adaptées à différents problèmes que l'on peut rencontrer. Cette souplesse provient évidemment de ce que l'al-

gorithme proposé n'utilise que les propriétés générales A, B, C (§2) imposées aux moyennes, la définition précise de celles-ci étant laissée *ad libitum*, c'est-à-dire adaptable à chaque cas particulier (nous en donnons un exemple en Appendice).

Le domaine d'application de la méthode ne semble limité, a priori, que par deux exigences :

1) Notre système type (3.1) est supposé représentable par un système "non perturbé" qui est conservatif et intégrable auquel se superpose une "petite perturbation" dépendant du temps. C'est le système non perturbé qui fournit les variables action-angle mais celles-ci n'ont pas à être connues exactement : notre méthode étant asymptotique (donc valable pendant un temps fini) il suffira de trouver pour le système non-perturbé, des variables action-angle elles-mêmes approchées et valables pendant un temps fini, pourvu que l'approximation ainsi introduite soit au moins aussi bonne que celle que l'on recherchera ensuite, par la méthode des moyennes, sur le système (3.1) tout entier. En d'autres termes, le système non perturbé H_0 dans (3.1) n'a pas à être intégrable, il suffit qu'on puisse l'approcher par un système intégrable, ce que nous verrons concrètement dans l'exemple traité en Appendice.

2) La seconde condition restrictive de la méthode est, bien entendu, de savoir effectivement définir une moyenne satisfaisant à nos conditions. Nous avons donné au § 2 quelques exemples dont l'un sera utilisé dans l'Appendice.

***** APPENDICE A

Nous traiterons, à titre d'exemple, le problème d'une perturbation paramétrique périodique d'un pendule non linéaire, en prenant pour hamiltonien :

$$(A.1) \quad H(q, p, t) = \frac{p^2}{2} + \omega_0^2(1 - \cos q) - \frac{1}{2} \epsilon \omega_0 \cos \omega t q^2$$

soit, pour des angles q suffisamment petits :

$$(A.2) \quad H(q, p, t) = \frac{1}{2}(p^2 + \omega_0^2 q^2) - \frac{\omega_0^2}{24} q^4 - \frac{1}{2} \epsilon \omega_0 \cos \omega t q^2$$

Nous devons d'abord faire apparaître les variables action-

angle du système non perturbé :

$$(A.3) \quad H_0 = \frac{1}{2}(p^2 + \omega_0^2 q^2) - \frac{\omega_0^2}{24} q^4$$

C'est un problème sans difficulté de principe qu'on résout, par exemple, grâce à la méthode de Lindstedt-Poincaré (Poincaré (1892-1893-1899), Juvet (1926), Goldstein (1980), Lochak (1981)).

Cependant, les calculs sont assez longs et comme ils ne sont pour rien dans l'illustration de notre méthode, nous les omettrons en ne donnant que quelques intermédiaires. La méthode de Lindstedt-Poincaré fournit une suite de transformations canoniques *approchées* qui seront valables ici pour des angles suffisamment petits, et qui seront définies par des fonctions génératrices $G_1, G_2, \dots$ etc. On trouve d'abord $(p, q) \rightarrow (J_1, \phi_1)$ qui dérive de la fonction :

$$(A.4) \quad F_1(q, J_1) = \frac{\omega_0}{2} q \sqrt{\frac{2J_1}{\omega_0} - q^2} + J_1 \text{Arc sin} q \sqrt{\frac{\omega_0}{2J_1}}$$

Puis on définit $(J_1, \phi_1) \rightarrow (J_2, \phi_2)$ grâce à :

$$(A.5) \quad F_2(\phi_1, J_2) = \phi_1 J_2 - \frac{J_2^2}{24\omega_0}(\sin 2\phi_1 - \frac{1}{8} \sin 4\phi_1)$$

A l'aide de ces deux transformations, (A.2) prend la forme :

$$(A.6) \quad H(\phi_2, J_2, t) = \omega_0 J_2 - \frac{1}{16} J_2^2 - \epsilon J_2 \cos \omega t \sin^2 \phi_2$$

qui est bien du type (3.1), mais nous pouvons la simplifier encore grâce au changement de variable $(\phi_2, J_2) \rightarrow (\phi_3, J_3)$ défini par :

$$(A.7) \quad F_3(\phi_2, J_3) = \phi_2(J_3 + \frac{J_3^2}{16\omega_0})$$

qui nous donnera, au lieu de (A.6) :

$$(A.8) \quad H(\phi_3, J_3, t) = \omega_0 J_3 - \epsilon J_3 \cos \omega t \sin^2 \phi_3$$

Et enfin, nous définirons $(\phi_3, J_3) \rightarrow (\phi, J)$ par la fonction :

$$(A.9) \quad F_4(\phi_3, J) = J \phi_3 - J \omega_0 t$$

qui nous donnera :

$$(A.10) \quad H(\phi, J, t) = -\epsilon J \cos \omega t \sin^2(\phi + \omega_0 t)$$

d'où nous tirons l'équation de Hamilton-Jacobi :

$$(A.11) \quad \frac{\partial S}{\partial t} - \epsilon \cos \omega t \sin^2(\phi + \omega_0 t) \frac{\partial S}{\partial \phi} = 0$$

qui est bien de la forme standard (3.1) :

$$(A.12) \quad \frac{\partial S}{\partial t} + \epsilon K(\phi, \frac{\partial S}{\partial \phi}, t) = 0,$$

avec K que nous écrirons sous forme développée :

$$(A.13) \quad K(\phi, J, t) = \frac{J}{4} \{ \cos[(\omega - 2\omega_0)t - 2\phi] + \cos[(\omega + 2\omega_0)t + 2\phi] - 2\cos \omega t \}$$

Nous voyons aussitôt apparaître l'écart par rapport à la résonance paramétrique linéaire : $\omega - 2\omega_0$. C'est pourquoi nous adopterons les définitions suivantes pour les parties "moyennes" et "oscillantes" de K :

$$(A.14) \quad \bar{K}(\phi, J, t) = \frac{J}{4} \cos[(\omega - 2\omega_0)t - 2\phi]$$

$$(A.15) \quad \tilde{K}(\phi, J, t) = \frac{J}{4(\omega + 2\omega_0)} \sin[(\omega + 2\omega_0)t + 2\phi] - \frac{J}{2\omega} \sin \omega t$$

Ces définitions sont du type (2.11) et satisfont évidemment à (2.3). L'équation *approchée* (4.2), au premier ordre en ϵ , s'écrira donc ici, d'après (4.5), (A.11) et (A.14) :

$$(A.16) \quad \frac{\partial S_1}{\partial t} + \frac{\epsilon}{4} \cos[(\omega - 2\omega_0)t - 2\chi] \frac{\partial S_1}{\partial \chi} = 0$$

D'après ce que nous avons vu au § 4, cette équation se déduit, à ϵ^2 près, de (A.12) grâce à une nouvelle transformation canonique $(\phi, J) \rightarrow (\chi, L)$ qui dérive de la fonction génératrice (4.1). Cette fonction s'écrira ici, d'après (4.5) et (A.15) :

$$(A.17) \quad G(\phi, L, t) = L \left\{ \phi - \frac{\epsilon}{4(\omega + 2\omega_0)} \sin[(\omega + 2\omega_0)t + 2\phi] + \frac{\epsilon}{2\omega} \sin \omega t \right\}$$

Pour trouver une solution *approchée* au premier ordre de (A.11), nous devons donc, tout d'abord, trouver une intégrale complète de (A.16). On trouve facilement l'intégrale :

$$(A.18) \quad S_1(\chi, \alpha, t) = \alpha \left\{ \frac{1}{\Delta} \operatorname{Arctg} \left[\frac{\Delta}{\delta - \epsilon/4} \operatorname{tg}(\delta t - \chi) \right] - t \right\}$$

où α est une constante d'intégration habituelle de Jacobi. Nous avons posé en outre :

$$(A.19) \quad \delta = \frac{\omega - 2\omega_0}{2}; \quad \Delta = \sqrt{\delta^2 - \frac{\epsilon^2}{16}}$$

Notons que nous sommes ici en dehors de la zone de résonance paramétrique, c'est-à-dire :

$$(A.20) \quad |\omega - 2\omega_0| > \frac{\epsilon}{2}$$

Nous trouverons maintenant l'évolution temporelle des variables χ et L en introduisant l'expression (A.18) de $S_1(\chi, \alpha, t)$ dans les formules (4.10) et on trouve ainsi :

$$(A.21) \quad \chi = \delta t - \operatorname{Arctg} \left[\frac{\delta - \epsilon/4}{\Delta} \operatorname{tg} \Delta(t - t_0) \right]$$

$$L = \frac{\alpha}{\Delta^2} \left[\delta + \frac{\epsilon}{4} \cos 2\Delta(t - t_0) \right]$$

Si nous posons simplement, comme dans (4.11) :

$$(A.22) \quad \phi = \chi; \quad J = L$$

les formules (A.21) nous donneront l'*approximation ordinaire du premier ordre* des solutions du système (A.11). Pour trouver l'approximation correspondante du système initial (A.2), il suffira de remonter les changements de variables définis par (A.9), (A.7), (A.5) et (A.1). Malgré les apparences, le calcul n'est pas très long et on trouve finalement :

$$(A.23) \quad q = \sqrt{\frac{2\alpha}{\omega_0 \Delta^2}} \left(1 + \frac{\omega_0^2}{6} A \right) \left[\sqrt{\left(\delta + \frac{\epsilon}{4} \right) \cos^2 \Delta(t - t_0)} \left(\sin \frac{\omega t}{2} + \frac{\omega_0^2}{6} B \cos \frac{\omega t}{2} \right) - \sqrt{\left(\delta - \frac{\epsilon}{4} \right) \sin^2 \Delta(t - t_0)} \left(\cos \frac{\omega t}{2} - \frac{\omega_0^2}{6} B \sin \frac{\omega t}{2} \right) \right]$$

avec les définitions :

$$(A.24) \quad A = \frac{\delta^2}{\omega_0^2} \frac{\alpha}{\Delta^2} \sin 2(\omega t - 4); \quad B = \frac{\epsilon}{\delta + \frac{\epsilon}{4}} \cos 2\Delta(t - t_0)$$

$$(A.25) B = \frac{3}{4} \left(\frac{\omega}{2} t - \frac{u}{2} \right) \frac{\delta}{\omega_0} \frac{\alpha}{\Delta} [\sin(\omega t - u) - \frac{1}{8} \sin 2(\omega t - u)]$$

$$(A.26) \operatorname{tg} \frac{u}{2} = \frac{\delta - \epsilon/4}{\Delta} \operatorname{tg} \Delta(t - t_0)$$

Mais nous pourrions, de même, obtenir l'*approximation améliorée* du premier ordre en définissant ϕ et J non pas à partir de (4.11) ou (A.22), mais à l'aide de (4.9), ce qu'on obtient facilement grâce à la définition (A.15) de $K(\chi, L, t)$. On trouve ainsi, au lieu de (A.22) :

$$(A.27) \phi = \chi + \frac{\epsilon}{4(\omega + 2\omega_0)} \sin[(\omega + 2\omega_0)t + 2\chi] - \frac{\epsilon}{2\omega} \sin \omega t$$

$$J = L \left\{ 1 - \frac{\epsilon}{2(\omega + 2\omega_0)} \cos[(\omega + 2\omega_0)t + 2\chi] \right\}$$

où χ et L conservent évidemment les expressions (A.21). Pour trouver l'approximation améliorée, c'est aux variables (A.27) qu'il faudra, maintenant, faire remonter la suite des transformations.

On observera que les termes qui se sont ajoutés à χ et à L dans les formules (A.27) oscillent "rapidement", avec les fréquences ω et $\omega + 2\omega_0$. Leur influence ne sera importante que *loin* de la résonance car ils deviendront alors, comparables aux termes "lents", qui oscillent avec les fréquences Δ et 2Δ et qui figurent déjà dans (A.21). Au contraire, près de la résonance, on aura une prépondérance des termes "lents" : ceux-ci décriront l'essentiel du phénomène, tandis que les termes "rapides" dans (A.27) n'ajouteront qu'une petite oscillation autour des termes lents.

Signalons encore qu'en passant au second ordre en ϵ , il est facile de retrouver le déplacement de résonance paramétrique. En effet, il suffit de calculer, dans (4.13), le terme $\bar{K}_2$ donné par la formule (4.20). Un calcul très simple montre alors, en utilisant (A.15), que l'équation (4.13) que nous devons maintenant substituer à (A.16) s'écrit ici :

$$(A.28) \frac{\partial S_2}{\partial t} + \left\{ \frac{\epsilon}{4} \cos[(\omega - 2\omega_0)t - 2\chi] + \frac{\epsilon^2}{16} \frac{1}{\omega + 2\omega_0} \right\} \frac{\partial S_2}{\partial \chi} = 0$$

On vérifie alors que tous les calculs précédemment faits restent valables, mais que la résonance $\omega = 2\omega_0$ y est simplement déplacée de $\frac{\epsilon^2}{16} \frac{1}{\omega + 2\omega_0}$.

BIBLIOGRAPHIE

ABRAGAM A., Les principes du magnétisme nucléaire, Presses Universitaires de France, Paris, 1961

AMIET J.P., HUGUENIN P., Helvetica Physica Acta, 55, 278, 1982

ARNOLD V., Les méthodes mathématiques de la mécanique classique, Editions Mir, Moscou, 1976

BOGOLIUBOV N. et MITROPOLSKY J., Les méthodes asymptotiques dans la théorie des oscillations non-linéaires, Gauthier-Villars, Paris, 1963

GOLDSTEIN H., Classical mechanics, 2nd edition, Addison-Wesley, Reading, 1980

GREBENIKOV E.A. et RIABOV J.A., Les méthodes constructives dans les systèmes non linéaires, Editions Sciences, Moscou, 1979

JUVET G., Mécanique analytique et théorie des quanta, Blanchard, Paris, 1926

LOCHAK G., Hadronic Journal 4, 1105, 1981
Dynamical Systems in Microphysics (Ed. A.Avez, A.Blaquière, A.Marzollo), Academic Press, New-York, 1982

LOCHAK G., ALAOUI A., Ann. Fond. L. de Br., 2, 87, 1977

LOCHAK G. et THIOUNN M., Le journal de physique, 30, 482, 1969

PAPADOPOULOS G.J., DEVREESE J.T. (editors), Path Integrals and their Applications in Quantum, Statistical and Solid State Physics, Plenum Press, N.Y., 1978

POINCARÉ H., Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Gauthier-Villars, Paris, 1892, 1893, 1899 ; Dover, New-York, 1957.