Annales de la Fondation Louis de Broglie, Vol. 3, nº 3, 1983

PROCESSUS LIMITES EN MÉCANIQUE STATISTIQUE
CLASSIQUE HORS D'ÉQUILIBRE

par Raymond JANCEL

Laboratoire de Physique Théorique et Mathématique Université Paris VII 2, Place Jussieu 75521 Paris Cedex 05

(Séminaire de la Fondation L. de Broglie du 1er Décembre 1980)

Suite et fin de l'article de M. R. Jancel dont la première partie a paru dans le précédent numéro qui contient la table des matières complète.

3.3 Théorie cinétique des gaz et équation de Boltzmann

Pour préciser l'objet et la signification physique des théorèmes limites exposés dans le chapitre 4, il nous faut encore rappeler brièvement les idées d'ensemble qui sont à la base de la théorie cinétique des gaz au sens de Boltzmann. Celle-ci est en outre un exemple intéressant d'une autre définition de la "description réduite" de l'état d'un fluide : elle repose en effet sur l'introduction préalable de variables "semi-macroscopiques" et s'apparente de ce fait aux méthodes évoquées en (3.1 ba); elle diffère donc de la description cinétique au sens de Bogolioubov, où l'on considère d'abord des variables "fines" et où le processus de "coarse-graining" résulte (en principe !) des propriétés des solutions de la hiérarchie.

a - Description cinétique dans l'espace $\mu[2,33,45]$. L'état dynamique d'un système à N particules peut être représenté par un ensemble de N points (ou de N sphères dures) dans l'espace des phases à une particule $\mu = \Lambda \times R^3$. Pour tenir compte de l'imprécision des observations macroscopiques, on considère une partition de l'espace μ en cellules ω , supposées petites à l'échelle macroscopique mais suffisamment grandes pour que chacune d'elles contienne un grand nombre $\mathbf{n}_{_{\mathrm{In}}}$ de particules ; il faut donc admettre que les dimensions des particules sont elles-mêmes très petites à l'échelle des ω_{*} . L'état "macroscopique" du système est alors défini en théorie cinétique des gaz par l'ensemble des nombres d'occupation n associés aux cellules ω . A chaque état dynamique du système, représenté par un point P de l'espace des phases Γ, correspond un ensemble de nombres d'occupation bien déterminés $n_{_{10}}$ (P). Au cours de l'évolution, le point P décrit une trajectoire dans ſ, $P+P_t$, entrainant une variation des nombres d'occupation qui deviennent des fonctions de $P_t:n_{\omega_i}(P)+n_{\omega_i}(P_t)$; ces nombres ne sont donc bien déterminés au cours du temps que si l'on connaît la trajectoire exacte de P_{+} .

Il est alors facile de voir que la description "réduite" définie par les nombres $n_{\omega_i}(P_t)$ n'est pas autonome, c'est-à-dire que la donnée initiale des $n_{\omega_i}(P)$ ne permet pas

d'en déduire les n $_{\omega_i}$ (P $_t$). En effet, à chaque système de nombres n $_i$ (tels que $\sum_i^i n_i = N$) correspond un ensemble d'états dynamiques possibles satisfaisant aux conditions n $_{\omega_i}$ (P) = n $_i$; les points représentatifs de ces états occupent dans r une grande "cellule" (ou "constellation") Ω_i , dont le volume est donné par : V(Ω_i) = (N!/ π n $_i$!) $\pi\omega_i^{n_i}$. De cette cellule initiale Ω_i est issue une famille de trajectoires dans r, à laquelle on peut associer un ensemble de valeurs possibles pour chaque n $_{\omega_i}$ (P $_t$); comme ces valeurs correspondent toutes à la même condition initiale n $_{\omega_i}$ (P), on vérifie bien que les n $_{\omega_i}$ (P $_t$) ne définissent pas une description autonome.

Toutefois, comme les dimensions des cellules ω_s sont finies et que les nombres d'occupation n_{ω_z} sont très grands, il est vraisemblable que l'ensemble des valeurs possibles des n_{ω} (P_t) aura tendance à se grouper, avec une faible dispersion, autour d'une certaine valeur moyenne, conformément aux considérations développées par P. et T. Ehrenfest à propos de la courbe H (voir en particulier les conjectures IV dans [11]). Pour donner à cet argument une signification précise, on est conduit à revenir au point de vue de la Mécanique statistique, en considérant un ensemble statistique de systèmes à N particules, défini par une densité en phase $\rho_{m}(P)$ (par exemple la mesure de Lebesgue) sur la grande cellule Ω, de r. Au cours du temps, on a d'après l'équation de Liouville : $\rho_{N}(P)$ + $\rho_{N}(P;t)$; l'évolution du système est ainsi décrite par un processus stochastique dans Γ et les nombres d'occupation devienment des variables aléatoires $n_{\omega_{z}}(P_{t})$, dont la valeur moyenne \overline{n}_{ω_z} (t) et les corrélations sont définies par les formules (3.11) et (3.12) où interviennent les fonctions de distribution réduites $\tilde{\rho}_1(\tilde{x}_1,t)$ et $\tilde{\rho}_2(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,t)$. Comme l'évolution de ces fonctions est liée, à travers toutes les équations de la hiérarchie, à celle de la densité en phase $\rho_{M}(P,t)$ qui re-

^{*} On notera que le symbole ω_i représente à la fois la cellule considérée et son volume.

présente la description "maximale" de l'état du système, il s'ensuit que les nombres d'occupation moyen $\bar{\mathbf{n}}_{\omega}$ (t) ne permettent pas, en principe, de définir une description réduite autonome (cf. §3.1b). Cependant, si la propriété mentionnée cidessus est vérifiée, la valeur relative de la dispersion des variables n_{ω} (P_t) doit devenir très petite lorsque les n_{ω} sont suffisamment grands. On peut dans ce cas chercher à definir un système de nombres $n_i(t)$ (avec $\sum n_i(t) = N$), déterminés uniquement en fonction des nombres d'occupation initiaux $n_i(0) = n_i$, tels que l'on ait : $\overline{n}_m(t) + n_i(t)$ et $(n_{\omega} (P_{t}) - n_{i}(t)^{2}/N^{2} + 0$, cette convergence impliquant un certain passage à la limite où N + . Si cela est possible, les nombres $\overline{n}_{(i)}(t) = n_{i}(t)$ à la limite) définissent effectivement une description réduite autonome au niveau cinétique : on a au cours du temps $n_1(0)(=n_1) + n_1(t)$, l'évolution étant alors déterminée par les solutions d'une certaine équation cinétique [2]. En d'autres termes, les variables aléatoires n_{ov} (P_r) convergent dans ce cas vers les variables certaines $\overline{n}_{m}(t) = n_{i}(t)$ qui fournissent une description complète de l'état macroscopique du système.

D'une manière plus générale, on peut considérer l'ensemble statistique défini par une densité en phase initiale $\rho_N(P;0)$ telle que l'on ait :

$$(3.34) \quad (\overline{n_{\omega_{1}}(P) - \overline{n}_{\omega_{1}}(0))^{2}/N^{2} \approx \varepsilon , \quad (\varepsilon << 1),$$

avec $\overline{n}_{\omega}(0) = n_{1} = \int_{\omega} \widetilde{\rho}_{1}(x_{1},0)dx_{1}$. D'après les raisonnements précédents, on obtiendra une description réduite autonome en termes des variables $\overline{n}_{\omega}(t)$ si les conditions suivantes sont satisfaites : (i) la condition (3.34) est conservée au cours du temps pour une durée suffisamment longue, d'où :

$$(3.34) (\overline{n_{\omega_{i}}(P_{t}) - \overline{n_{\omega_{i}}(t)})^{2}}/N^{2} = \varepsilon$$

$$avec \ \overline{n_{\omega_{i}}}(t) = \int_{\omega_{i}}^{\omega_{i}} \widetilde{\rho_{i}(x_{i};t)} dx_{i}, \ (ii) \ \varepsilon + 0 \ pour \ un \ certain$$

l'échelle macroscopique , nous utiliserons la notation $\Delta x = \Delta r$ Δp pour représenter la cellule centrée au point (r,p) de l'espace μ . Les nombres d'occupation $n_{\Delta x}(P_t)$ ne pouvant évidemment pas être déduits de l'évolution dynamique exacte du système, on est conduit à introduire la notion de fonction de distribution des vitesses dans l'espace μ ; c'est la notion centrale de la théorie cinétique des gaz qui repose en fait sur plusieurs hypothèses. Compte tenu du grand nombre de particules contenues dans chaque cellule $\Delta x = \Delta r$ Δp , on admet d'abord qu'il existe une fonction f(r,p), lentement variable à l'échelle des Δx et telle que $n_{\Delta x}(P) \approx N f(r,p) \Delta r$ Δp ; on suppose ensuite qu'au cours de l'évolution, f(r,p) + f(r,p;t), de telle manière que $n_{\Delta x}(P_t) \approx N f(r,p;t) \Delta r$ Δp , où f(r,p;t) est la solution d'une certaine équation cinétique correspondant à la condition initiale f(r,p).

Les considérations du paragraphe précédent permettent de préciser à la fois la signification et les limites de ces hypothèses. Si l'on considère par exemple des cellules $\omega_{\rm c}$ grandes par rapport aux (Δr Δp), on a (en remplaçant les sommes par des intégrales) :

 $(3.36) \frac{n_{\omega_{i}}(P)}{N} = \int_{\omega_{i}}^{f(r,p)} dr dp, \frac{n_{\omega_{i}}(P_{t})}{N} = \int_{\omega_{i}}^{f(r,p;t)} dr dp$ $avec \int_{\Lambda \times R^{3}}^{f} dr dp = 1;$

en comparant avec les formules (3.35), on voit que la fonction f joue le rôle de la fonction de distribution à une particule $(1,N)\tilde{\rho}_1(\dot{x}_1;t)$ (dans la mesure où $\tilde{\rho}_1$ est elle-même solution d'une équation cinétique) et qu'elle peut ainsi s'interpréter comme représentant l'état "le plus probable" du système. Il est cependant important de remarquer que sa signification physique est très différente de celle de la fonction $\tilde{\rho}_1(\dot{x}_1;t)$; en effet, la fonction f de la théorie cinétique des gaz est en fait définie comme la densité des particules du système au

*On remarquera que ceci implique en fait de considérer, en plus de la limite N + ∞ , un autre passage à la limite dans lequel les dimensions des ω_1 tendent vers zéro, mais assez lentement pour que leur nombre d'occupation reste très grand (Cf. p. 221).

"voisinage" du point (\vec{r},\vec{p}) de l'espace μ et elle n'a de sens que pour des cellules $\Delta \vec{r}$ $\Delta \vec{p}$ de dimensions finies", contenant un grand nombre de particules. De son côté, $\tilde{\rho}_1(\vec{x}_1;t)$ est la densité de probabilité marginale (dans l'espace μ) correspondant à un ensemble statistique de systèmes défini dans l'espace Γ par une mesure absolument continue $\rho_{\vec{v}}(P)d\Gamma$; elle est donc bien définie en tout point $\vec{x}_1 \in \mu$, ainsi que la probabilité infinitésimale $\tilde{\rho}_1(\vec{x}_1)d\vec{x}_1$. Le lien entre ces deux définitions apparaît clairement dans le cas où les cellules ω sont de mêmes dimensions que les $(\Delta r \Delta \vec{p})$; on a alors :

 $n_{\omega_{\mathbf{i}}}(P_{\mathbf{t}})/N \approx n_{\Delta \mathbf{r}^{\dagger} \Delta \mathbf{p}^{\dagger}}(P_{\mathbf{t}})/N \approx f(\mathbf{r}^{\dagger}, \mathbf{p}^{\dagger}; \mathbf{t}) \Delta \mathbf{r}^{\dagger} \Delta \mathbf{p}^{\dagger} \approx (1/N) \int_{\Delta \mathbf{r}^{\dagger} \Delta \mathbf{p}} \tilde{\rho}_{1}(\mathbf{x}^{\dagger}_{1}; \mathbf{t}) d\mathbf{x}^{\dagger}_{1},$

d'où il ressort que f est une quantité "semi-fine" (coarse-grained) qui peut être définie comme la moyenne de $\tilde{\rho}_1$ prise sur la cellule ($\Delta \hat{r}$ $\Delta \hat{p}$). Notons d'ailleurs que cette différence de points de vue joue un rôle important dans les discussions relatives aux divers paradoxes de la théorie cinétique des gaz [28].

Ayant ainsi défini la fonction de distribution des vitesses f(r,p,t), il reste à établir l'équation cinétique à laquelle elle doit satisfaire. Dans le cas des gaz neutres dilués; où l'on peut négliger les "collisions" triples et d'ordre supérieur, un raisonnement bien connu conduit à la célèbre équation de Boltzmann, qui joue un rôle essentiel en théorie cinétique. Il suffira pour notre propos de rappeler les principales hypothèses à la base de cette équation, en nous plaçant dans le cas du modèle des sphères dures.

Nous considérons donc un système constitué de N sphères dures de diamètre σ , contenues dans une enceinte Λ et repérées par la position r et l'impulsion p de leur centre . Comme le système est supposé très dilué (soit $N\sigma^3/V(\Lambda) + 0$), on n'a à tenir compte que des collisions binaires, qui apparaissent comme des évènements relativement rares ; entre cellesci, les particules se meuvent librement et décrivent des segments de droite (libres parcours) avec une impulsion constante *bien qu'elles soient considérées comme infiniment petites à l'échelle macroscopique (!).

**On néglige ici le mouvement de rotation des particules.

 \vec{p} . Le taux de la variation temporelle de $f(\vec{r},\vec{p};t)$ se compose ainsi de deux termes : $\frac{\partial f}{\partial t} = \left\{\frac{\partial f}{\partial t}\right\}_f + \left\{\frac{\partial f}{\partial t}\right\}_C$, où $\left\{\frac{\partial f}{\partial t}\right\}_f = -\frac{\vec{p}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}}$ est le terme de flux correspondant au mouvement libre des partucules, et où $\left\{\frac{\partial f}{\partial t}\right\}_C$ représente la contribution des collisions binaires à la variation de f. Ce dernier terme résulte luimême d'un bilan entre deux contributions, soit $\left\{\frac{\partial f}{\partial t}\right\}_C = \left\{\frac{\partial f}{\partial t}\right\}_C - \left\{\frac{\partial f}{\partial t}\right\}_C$, où $\left\{\frac{\partial f}{\partial t}\right\}_+$ est le terme correspondant aux collisions qui font entrer une particule (avec la position \vec{r} et l'impulsion \vec{p}) dans la cellule $\Delta \vec{r}$ $\Delta \vec{p}$ et $\left\{\frac{\partial f}{\partial t}\right\}_C$ celui correspondant aux particules qui sortent de $\Delta \vec{r}$ $\Delta \vec{p}$ après une collision en (\vec{r},\vec{p}) .

Le calcul de ces deux contributions met en jeu la dynamique des collisions élastiques binaires ; comme la théorie en est bien connue, nous nous bornerons à expliciter les notations. Considérons la collision de deux particules 1 et 2 situées dans l'élément de volume Δr et d'impulsions initiales p_1 et p_2 ; celle-ci sera bien déterminée si l'on connaît en outre la direction de la ligne des centres au moment de la collision, repérée par le vecteur unité $\hat{\omega}$; pour que les deux particules se rapprochent avant la collision, on doit avoir nécessairement $\hat{\omega}_*(p_1-p_2) \geqslant 0$, cette inégalité définissant la demi-sphère unité S^+ . Après la collision, les impulsions finales p_1^* et p_2^* des deux particules sont déterminées par les relations :

$$(3.37) \qquad \begin{pmatrix} \vec{p}_1' \\ \vec{p}_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{p}_1 - [\hat{\omega} \cdot (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)] \hat{\omega} \\ \vec{p}_2 + [\hat{\omega} \cdot (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)] \hat{\omega} \end{pmatrix} = T_{\hat{\omega}} \begin{pmatrix} \vec{p}_1 \\ \vec{p}_2 \end{pmatrix}$$

où l'opérateur $T_{\widehat{\omega}}$ conserve le volume et satisfait à $T_{\widehat{\omega}}^2=1$ et $T_{\widehat{\omega}}=T_{-\widehat{\omega}}$; cette dernière relation exprime la microréversibilité du processus collisionnel puisque $T_{-\widehat{\omega}}$ décrit la collison "inverse" de (3.37), celle où les deux particules d'impulsions finales p_1 et p_2 se sont rencontrées avec des impulsions initiales p_1' et p_2' et avec une ligne des centres dirigée suivant $-\widehat{\omega}$.

Considérons alors le terme $(\partial f(r_1, p_i; t) \partial t) \Delta t$ qui représente la variation de f(r₁,p₁;t) due aux particules qui sortent de la cellule $\Delta x_1 = \Delta r_1 \Delta p_1$ à la suite des collisions durant 1t; ce terme est naturellement proportionnel au nombre de collisions subies durant At par les particules de la cellule Ar, Ap,. Ceci étant, un raisonnement élémentaire montre que la particule (1) d'impulsion $(p_1, \Delta p_1)$ n'entrera en collision avec une particule (2) d'impulsion $(p_2, \Delta p_2)$ que si cette dernière se trouve située dans un certain "cylindre de collision" de volume $\sigma^2\left\{\frac{p_1-p_2}{m}\right\}$. $\hat{\omega}$ $\Delta\hat{\omega}$ Δt , où $(\hat{\omega},\Delta\hat{\omega})$ détermine la direction de la ligne des centres lors de la collision. Finalement, le nombre de collisions des particules (1) de la cellule Δx_1 , avec les particules (2) d'impulsion $(\bar{p}_2, \Delta \bar{p}_2)$, est égal au nombre total des particules (2) situées dans l'ensemble des "cylindres de collision" relatifs aux particules (1), $\text{dont le volume est } v \ = \ \text{N} \ f(\stackrel{+}{r}_1, \stackrel{+}{p}_1; t) \Delta \stackrel{+}{r}_1 \ \Delta \stackrel{+}{p}_1 \ \times \ \sigma^2 \left\{ \frac{\stackrel{+}{p}_1 - \stackrel{+}{p}_2}{m} \right\}. \ \widehat{\omega} \ \Delta \widehat{\omega} \ \Delta t.$ C'est pour évaluer ce nombre que l'on est amené à faire l'hypothèse fondamentale de la théorie cinétique des gaz ; on suppose en effet que le nombre total de particules (2) d'impulsion $(p_2, \Delta p_2)$ contenues dans le volume v est donné simplement par $v \times N$ $f(r_1, p_2, t)$. Cette supposition, anodine en apparence, est en fait une hypothèse très forte sur le comportement statistique du système, puisque le volume v dépend des positions et impulsions des particules (1) par l'intermédiaire de la fonction $f(r_1,p_1;t)$; elle revient de ce fait à admettre que les particules (1) et (2) ne sont pas corrélées juste avant la collision, et ceci quel que soit t. C'est la célèbre hypothèse du chaos moléculaire : elle donne lieu à deux remarques importantes : d'une part, elle introduit manifestement une dissymétrie dans l'évolution temporelle du système, l'indépendance statistique entre les particules (1) et (2) étant postulée avant la collision et non après ; d'autre part, comme elle doit être valable à tout instant t, elle peut entrer en conflit avec les lois du mouvement et n'est en fait justifiée que pour un certain passage à la limite.

L'hypothèse du chaos moléculaire étant admise, le nombre total de collisions subies par les particules contenues dans la cellule $\Delta \vec{x}_1 = \Delta \vec{r}_1 \ \Delta \vec{p}_1$ est, d'après ce qui précède, donné par :

$$(3.38) N\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = \Delta t \Delta r_1 \Delta p_1 = N^2 \sigma^2 \Delta t \Delta r_1 \Delta p_1 \int_{S^+ \times R^3} d\hat{\omega} dp_2 \hat{\omega} \cdot \left(\frac{p_1 - p_2}{m}\right)$$

$$f(\hat{r}_1, \hat{p}_1; t) f(\hat{r}_1, \hat{p}_2; t).$$

On montrerait de même, en utilisant les propriétés de micro-réversibilité et de conservation de la mesure de l'opérateur T_{ω} , que l'on a, pour le nombre total de collisions "inverses" faisant entrer une particule dans la cellule Δr_1 Δp_1 :

$$(3.39) N \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{+} \Delta t \Delta r_{1} \Delta p_{1} = N^{2} \sigma^{2} \Delta t \Delta r_{1} \Delta p_{1} \int_{S^{+} \times R^{3}} d\hat{\omega} d\hat{p}_{2} \hat{\omega} \cdot \left(\frac{p_{1} - p_{2}}{m}\right)$$

$$f(r_1, p_1, t)f(r_1, p_2, t),$$

où p_1^{\prime} et p_2^{\prime} sont définis par (3.37). En réunissant ces diverses contributions, on obtient finalement l'équation de Boltzmann pour le modèle des sphères dures :

$$(3.40) \frac{\partial f(\vec{r}_{1}, \vec{p}_{1}; t)}{\partial t} + \frac{\vec{p}_{1}}{m} \cdot \frac{\partial f(\vec{r}_{1}, \vec{p}_{1}; t)}{\partial \vec{r}_{1}}$$

$$= N\sigma^{2} \int_{S^{+} \times R^{3}} d\hat{\omega} d\vec{p}_{2} \hat{\omega} \cdot \left\{ \frac{\vec{p}_{1} - \vec{p}_{2}}{m} \right\} [f(\vec{r}_{1}, \vec{p}_{1}'; t) f(\vec{r}_{1}, \vec{p}_{2}'; t) - f(\vec{r}_{1}, \vec{p}_{1}; t) f(\vec{r}_{1}, \vec{p}_{2}; t)] ,$$

où le terme de collisions du second membre satisfait aux relations de conservation du nombre de particules, de l'impulsion et de l'énergie cinétique ; on remarquera dans ce second membre la présence du facteur $N\sigma^2$, caractéristique de l'état granulaire de la matière puisqu'il est inversement proportionnel au l.p.m. des particules.

On sait que cette équation permet d'obtenir des résultats remarquables dans la théorie des gaz neutres dilués. Mais, pour notre propos, son importance tient essentiellement à son caractère irréversible qui est illustré par le célèbre

 $\frac{\text{Th\'eor\`eme H de Boltzmann}}{\text{temps d\'efinie par}}: \text{Soit H(t) la fonction du}$

(3.41)
$$H(t) = \int_{\Lambda \times \mathbb{R}^3} d\vec{r}_1 d\vec{p}_1 f(\vec{r}_1, \vec{p}_1; t) \log f(\vec{r}_1, \vec{p}_1; t)$$

si $f(r_1,p_1;t)$ est solution de l'équation de Boltzmann (3.40) et si les collisions des particules avec les parois de Λ sont élastiques, on a :

$$(3.42) \qquad \frac{dH(t)}{dt} \leq 0 ,$$

l'égalité n'ayant lieu que dans le cas où f est maxwellienne*, H(t) est donc une fonction monotone décroissante du temps. Comme l'on montre également que H(t) est bornée inférieurement si l'énergie cinétique totale du système est finie [37], on peut en conclure que, pour des conditions assez générales, la fonction de distribution $f(r_1,p_1;t)$ tend vers la distribution d'équilibre de Maxwell-Boltzmann lorsque $t+\infty$ [37,38].

L'équation de Boltzmann permet ainsi de prévoir le retour vers l'équilibre d'un système initialement hors d'équilibre, conformément aux données de l'observation macroscopique. Mais ce comportement irréversible du système s'oppose à la réversibilité des équations dynamiques qui régissent l'évolution au niveau microscopique. L'équation de Boltzmann et le théorème H qui en résulte comportent donc un élément d'irréversibilité incompatible avec l'évolution microscopique sous-jacente; cette incompatibilité fut à l'origine des paradoxes bien connus de la théorie cinétique des gaz et donna lieu à de longues discussions qui devaient déboucher sur l'interprétation statistique de la théorie. En fait, si l'on examine la démarche suivie pour établir l'équation (3.40), on voit sans peine

^{**} L'inégalité (3.42) résulte du fait que dH/dt peut se mettre sous la forme $\frac{dH}{dt} = \frac{N\sigma^2}{4} \int_{S^+ \times R^3 \times R^3 \times R^3} \hat{\omega} \cdot \left(\frac{p_1 - p_2}{m}\right) (f_1^+ f_2^+ - f_1^- f_2^-) \left[\log(f_1^+ f_2^+) - \log(f_1^+ f_2^+) \right] \leq 0, \text{ où l'on a posé}; f_1 = f(r_1, p_1; t), f_2 = f(r_1, p_2; t), f_1^+ = f(r_1, p_1^+; t) \text{ et } f_2^+ = f(r_1, p_2^+; t); l'égalité n'a lieu que si <math>f_1^+ f_2^- = f_1^+ f_2^+, \text{ ce qui implique une distribution maxwellienne.}$

que l'élément d'irréversibilité ne peut provenir que de l'hypothèse du chaos moléculaire qui permet d'exprimer le nombre de collisions binaires comme fonctionnelle de f . Pour réconcilier la réversibilité dynamique et l'irréversibilité de l'évolution résultant du théorème H, on doit alors admettre, conformément aux notions de base de la théorie cinétique des gaz. que cette hypothèse n'est en fait valable que pour "la plupart" des points P de l'espace des phases compatibles avec l'état cinétique du système (cf. (3.35) et les remarques du début de ce paragraphe); de ce point de vue, on peut dire que l'équation de Boltzmann décrit le comportement "le plus probable" du système. Ainsi se trouve mise en évidence la nature essentiellement statistique de l'hypothèse du chaos moléculaire ; pour la justifier rigoureusement et donner un sens précis aux considérations précédentes, on doit nécessairement revenir aux concepts de la Mécanique statistique où les notions de mesure et de probabilité s'introduisent naturellement.

c - Equation de Boltzmann et hiérarchie B.B.G.K.Y.[2,28] Dans cette perspective, on est conduit à comparer l'équation de Boltzmann (3.40) avec la première équation de la hiérarchie (3.33) pour le modèle des sphères dures. On constate aisément que cette dernière équation se réduit à l'équation de Boltzmann à condition : a) d'exprimer, dans le second membre de (3.33), la distribution réduite $\tilde{\rho}_2$ sous la forme d'un produit de $\tilde{\rho}_1$, en posant :

$$(3.43) \qquad \tilde{\rho}_{2}(\dot{x}_{1},\dot{x}_{2};t) = \tilde{\rho}_{1}(\dot{x}_{1};t)\tilde{\rho}_{1}(\dot{x}_{2};t),$$

(b) de remplacer $\frac{1}{N}\tilde{\rho}_1(\overset{+}{x}_1;t)$ par $f(\overset{+}{r}_1,\overset{+}{p}_1;t)$, ce qui fait apparaître le facteur N au second membre de (3.33); (c) de faire tendre σ + 0 dans f, de sorte que $f(\overset{+}{r}_1 \pm \sigma \hat{\omega},\overset{+}{p}_2;t)$ + $f(\overset{+}{r}_1,\overset{+}{p}_2;t)$.

Ces trois conditions permettent de déduire formellement l'équation de Boltzmann de la hiérarchie B.B.G.K.Y. en effectuant le passage à la limite de Boltzmann-Grad. En effet, pour que le terme de collisions demeure fini lorsque $\sigma + 0$, il faut nécessairement que N + \Rightarrow de telle manière que N σ^2 reste fini ; il s'ensuit que la condition c) revient à prendre la limite de Boltzmann-Grad et que l'équation de Boltzmann n'a de sens que pour cette situation limite particulière, ce qui est

d'ailleurs conforme aux hypothèses de base de la théorie cinétique des gaz. La condition b) permet d'autre part d'identifier à la limite la densité de probabilité à une particule $(1/N)\rho_1(x_1,t)$ à la fonction $f(r_1,\rho_1,t)$ de la théorie cinétique. Quant à la condition de factorisation (3.43), elle joue évidemment le même rôle que l'hypothèse du chaos moléculaire. Pour le voir, il suffit de remarquer que l'intégrale de collisions de (3.33) est définie sur la sphère-unité S+ (correspondant au cas où les particules 1 et 2 sont sur le point d'entrer en collision) et que la condition $\rho_2 = \rho_1 \rho_1$ exprime de ce fait l'absence de corrélations entre ces particules avant la collision: si l'intégrale de collisions était par contre définie sur la sphère S- (correspondant au cas où les particules se séparent juste après la collision), la même condition reviendrait à postuler l'absence de corrélations entre les particules après la collision; dans ce cas, le terme de collisions de l'équation de Boltzmann serait changé de signe, et le sens de l'évolution inversé. La condition (3.43) introduit donc l'irréversibilité dans le formalisme de la hiérarchie; mais, comme elle doit être valable quel que soit t, cette condition n'est pas compatible avec le modèle dynamique sous-jacent, tout comme l'hypothèse du chaos moléculaire à laquelle elle est pratiquement équivalente. Cependant, sa justification devient possible si l'on passe à la limite de Boltzmann-Grad ; on peut alors montrer que la propriété de chaos moléculaire se conserve au cours du temps sauf pour des situations "exceptionnelles" correspondant à des ensembles de "très petite mesure" (voir à ce propos les analyses détaillées de Grad dans [28]).

La signification de la condition de factorisation (3.43) peut être encore précisée, en remarquant qu'elle permet de satisfaire aux conditions (3.34) relatives à la dispersion des nombres d'occupation $n_{\omega}(P_{_{\rm T}}).$ En effet, en portant (3.43) dans les définitions (3.11) et (3.12) et en divisant N², il vient :

$$(3.44) \frac{\overline{n_{\omega}^{2}(t)} - \overline{n_{\omega}(t)}}{N^{2}} = \frac{1}{N^{2}} \int_{\substack{\omega \times \omega \\ \omega \times \omega}} \widetilde{\rho}_{2}(\dot{x}_{1}, \dot{x}_{2}; t) d\dot{x}_{1} d\dot{x}_{2} = \left\{ \frac{1}{N} \int_{\substack{\omega \\ \omega}} \widetilde{\rho}_{1}(\dot{x}_{1}; t) d\dot{x}_{1} \right\}^{2}$$
$$= \left\{ \frac{\overline{n}_{\omega}(t)}{N} \right\}^{2}$$

de sorte que la dispersion des $n_{in}(P_{+})/N$ s'écrit alors :

202

$$(3.44') \frac{\overline{(n_{\omega}(P_{t}) - \overline{n_{\omega}(P_{t})})^{2}}}{N^{2}} = \frac{\overline{n_{\omega}^{2}(P_{t})}}{N^{2}} - \left[\frac{\overline{n_{\omega}(P_{t})}}{N}\right]^{2} = \frac{1}{N} \left[\frac{\overline{n_{\omega}(t)}}{N}\right],$$

qui est évidemment très petite dès que N est suffisamment grand. On vérifie que les variables àléatoires $n_{\omega}(P_{t})/N$ deviennent de "bonnes" variables macroscopiques si la condition (3.43) est satisfaite, ce qui constitue une justification des méthodes de la théorie cinétique des gaz.

Les conditions précédentes montrent que le passage à la limite de Boltzmann-Grad permet de déduire formellement l'équation de Boltzmann des équations de la hiérarchie. Ce passage à la limite a essentiellement pour effet d'assurer la conservation au cours du temps de la propriété de chaos moléculaire ; il devient ainsi possible de "fermer" la hiérarchie et d'obtenir au niveau cinétique une description réduite autonome en termes de la seule fonction de distribution à une particule qui satisfait à l'équation de Boltzmann. Mais, pour établir ces analyses formelles sur une base rigoureuse (et donner notamment un sens à des expressions telles que "presque tous les points P", "très petite" dispersion, etc.), il faut prouver que les solutions de l'équation de Liouville et de la hiérarchie B.B.G.K.Y. convergent en un certain sens, à la limite de Boltzmann-Grad, vers une solution de l'équation de Boltzmann. C'est précisément l'objet du théorème de Lanford que nous allons traiter dans la section suivante.

d - Hiérarchie de Boltzmann [2,44]. Pour étudier la convergence des solutions de la hierarchie vers une solution de l'équation de Boltzmann, il est utile d'introduire les quantités correspondant, en théorie cinétique des gaz, aux densités de probabilité réduites $\rho_s(x_1,\ldots,x_s;t)$; On est ainsi conduit à considérer la suite des fonctions $f_s(x_1,\ldots,x_s;t)$, $(s=1,2,\ldots,i,\ldots)$, telles que :

(3.45)
$$f_s(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_s; t) = \prod_{i=1}^{s} f_i(\vec{x}_i; t)$$
,

où $f_1(x_1;t)$ est une solution de l'équation de Boltzmann (3.40); les fonctions f_1 sont donc définies par des relations qui généralisent la condition de chaos moléculaire. On vérifie alors aisément que cette suite de fonctions satisfait au système

d'équations :

(3.46)
$$\frac{\partial f_s}{\partial t} = L_s^0 f_s + C_{s,s+1}^0 f_{s+1}^s$$
,

où

$$(3.47) L_s^0 = -\sum_{i=1}^s \frac{p_i}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial r_i}$$

est l'opérateur de Liouville correspondant au mouvement libre d'un essaim de s particules, et où le terme de collisions $C_{s,s+1}^{\circ}$ s'écrit pour le modèle des sphères dures :

$$(3.48) (C_{s,s+1}^{\circ} f_{s+1}(\dot{x}_{1},\dot{x}_{2},...,\dot{x}_{s})$$

$$= N\sigma^{2} \sum_{i=1}^{S} \int_{S^{+} \times R^{3}} d\hat{\omega} d\hat{p}_{s+1} \hat{\omega} \cdot \left(\frac{\hat{p}_{i} - \hat{p}_{s+1}}{m} \right) \left\{ f_{s+1}(\hat{x}_{1}, \dots, \hat{r}_{i}, \hat{p}_{i}^{\dagger}, \dots, \hat{r}_{i}^{\dagger}, \hat{p}_{s+1}^{\dagger}) - f_{s+1}(\hat{x}_{1}, \dots, \hat{r}_{i}^{\dagger}, \hat{p}_{i}^{\dagger}, \dots, \hat{r}_{i}^{\dagger}, \hat{p}_{s+1}^{\dagger}) \right\};$$

dans (3.48), les quantités caractérisant la collision sont définies par les relations $(p_i^l, p_{s+1}^l) = T_{\widehat{\omega}}(p_i^l, p_{s+1}^l)$ analogues à (3.37).

Le système d'équation (3.46) est un système linéaire d'équations couplées de proche en proche : c'est la hiérrarchie de Boltzmann pour le modèle des sphères dures. Elle est vérifiée par les fonctions f_s si f_1 est solution de l'équation de Boltzmann (3.40); inversement, si des fonctions de la forme (3.45) sont solutions de (3.46), la fonction $f_1(x_1;t)$ est alors solution de l'équation de Boltzmann. Il s'ensuit que l'équation nonlinéaire de Boltzmann (3.40) est équivalente à la hiérarchie linéaire (3.46) complétée par la condition de factorisation (3.45).

La hiérarchie de Boltzmann peut être considérée comme l'analogue, en théorie cinétique des gaz, de la hiérarchie B.B.G.K.Y.. Toutefois, la hiérarchie de Boltzmann, comme l'équation de Boltzmann elle-même, n'est pas invariante par le changement de t en -t; elle a donc un caractère irréversible qui la distingue fondamentalement de la hiérarchie B.B.G.K.Y..

Il convient d'ailleurs de souligner qu'il existe une différence importante dans la définition de ces deux notions ; en effet, la hiérarchie B.B.G.K.Y. est déduite de l'équation de Liouville relative à la densité en phase $\rho_{\rm M}(P;t)$ par un procédé de régression, alors que la hiérarchie de Boltzmann est au contraire construite à partir de la fonction de distribution à une particule $f_1(x_1;t)$ en supposant l'absence de corrélations entre les particules (avant les collisions). Cette réserve étant faite, les équations (3.46) sont à comparer aux équations (3.31) de la hiérarchie B.B.G.K.Y. pour le modèle des sphères dures ; on constate sans peine que l'on passe formellement d'un système à l'autre : (i) en substituant les fonctions f de la théorie cinétique des gaz aux densités de probabilité p ; (ii) en remplaçant l'opérateur de Liouville L par l'opérateur L'où ne figurent plus les interactions entre les s particules; enfin, (iii) en faisant tendre $\sigma + 0$ dans l'intégrale de collisions de (3.32) de manière à obtenir le terme $C_{s,s+1}^{o}$ de (3.40).

4. Théorèmes limites en Mécanique statistique hors d'équilibre

Dans la section précédente, les problèmes posés par la justification des méthodes de la MSHE ont été examinés de divers points de vue, dans le but de mieux comprendre la portée et la signification exacte des théorèmes limites que nous allons maintenant exposer.

Dans tous les cas, il nous est apparu que des résultats rigoureux ne pouvaient être obtenus que pour des situations limites particulières où N + ∞ , et que les passages à la limite considérés avaient à jouer un double rôle : d'une part, permettre la définition de quantités "macroscopiques" dont la dispersion s'annule à la limite ; d'autre part, assurer la conservation de cette propriété au cours du temps, de manière à aboutir à une description réduite autonome de l'évolution du système. Comme l'état d'un système en Mécanique statistique est complètement déterminé à partir de la densité en phase initiale $\rho_N(P;0)$, les effets de ces passages à la limite doivent porter à la fois sur les conditions initiales et sur les mécanismes de l'évolution.

Ainsi que nous l'avons vu dans les paragraphes 3.2 et 3.3, l'application de ces idées générales au formalisme de la MSHE conduit finalement à rechercher sous quelles conditions les solutions de la hiérarchie B.B.G.K.Y. peuvent converger vers une classe de solutions particulières satisfaisant à une certaine équation cinétique, généralement irréversible. Des problèmes de ce type ont été notamment rencontrés dans la définition de l'"étape" cinétique selon Bogolioubov (\$ 3.2c) et lors de la déduction formelle de l'équation de Boltzmann suivant la méthode de Grad (§ 3.3c). C'est donc l'étude des modalités de telles convergences, pour des passages à la limite déterminés, qui constitue l'objet précis des théorèmes limites que nous allons examiner dans cette section. Du point de vue technique, la démonstration de tels théorèmes repose sur la considération de suites infinies d'ensembles de systèmes finis de plus en plus grands et requiert la définition d'un certain mode de convergence ; la méthode suivie s'apparente ainsi à celle utilisée dans l'étude de la limite thermodynamique pour des systèmes à l'équilibre.

Un certain nombre de théorèmes de ce type ont été démontrés ces dernières années ; ils peuvent être considérés comme les premiers résultats rigoureux de la MSHE. Nous allons exposer dans ce qui suit ceux qui nous paraissent les plus significatifs pour les besoins de la théorie cinétique, en traitant successivement les limites de Boltzmann-Grad, du couplage faible et du champ moyen*; nous insisterons plus particulièrerement sur la démonstration du théorème de Lanford qui constitue l'un des résultats les plus remarquables obtenus dans ce domaine.

4.1. Limite de Boltzmann-Grad et théorème de Lanford[2,4,20]

Conformément à l'argument original de Lanford [2], nous allons étudier la limite de Boltzmann-Grad des solutions de la hiérarchie B.B.G.K.Y. en nous plaçant dans le cas du modèle des sphères dures. Nous considérons donc un système constitué de N sphères dures de diamètre σ , contenues dans une enceinte Λ et interagissant entre elles (et avec les parois) par collisions élastiques. Comme l'on peut montrer que l'ensemble des points

^{*}Pour une étude plus complète, voir notamment [4].

de l'espace des phases correspondant à des collisions triples (ou d'ordre supérieur) est de mesure de Lebesgue nulle [44,46], on peut admettre que l'évolution d'un tel système est déterminée par les collisions élastiques binaires et par les collisions avec les parois*. D'après sa définition même, le passage à la limite de Boltzmann-Grad peut alors être représenté indifféremment par les conditions $N+\infty$ ou $\sigma+0$, pourvu que l'on ait dans les deux cas $N\sigma^2=Cte$. L'étude de ce passage à la limite nous conduit ainsi à envisager une suite infinie de systèmes, chacun d'entre eux étant caractérisé par son nombre de particules N et par la valeur correspondante du diamètre σ .

Du point de vue de la Mécanique statistique, l'état de chaque système de cette suite est décrit par un ensemble statistique, défini dans l'espace des phases $\Gamma_N = (\Lambda \times R^3)^N$ par une mesure absolument continue, ou une densité de probabilité $\rho_N^{(\sigma)}(P;t)$, satisfaisant à l'équation de Liouville. A la suite des nombres σ correspond donc une suite d'ensembles statistiques, auxquels on peut associer, par le procédé habituel de régression (3.3), les fonctions de distribution réduites $\tilde{\rho}_1^{(\sigma)}(\tilde{\chi}_1,t), \ \tilde{\rho}_2^{(\sigma)}(\tilde{\chi}_1,\tilde{\chi}_2;t), \ldots \tilde{\rho}_3^{(\sigma)}(\tilde{\chi}_1,\ldots,\tilde{\chi}_s;t)\ldots$, qui sont sont solutions de la hiérarchie B.B.C.K.Y. (3.31) relative au modèle des sphères dures. Mais, en raison de la relation de normalisation (3.9), ces fonctions doivent diverger lorsque σ + 0, puisque l'on a :

$$\lim_{\sigma \to 0} \int_{S} \tilde{\rho}_{S}^{(\sigma)}(\dot{x}_{1}, \dots, \dot{x}_{s}; t) d\dot{x}_{1} \dots d\dot{x}_{s} = \lim_{N \to \infty} N(N-1) \dots (N-s+1) = \infty$$

On est ainsi conduit à changer l'échelle des fonctions $\tilde{\rho}_s^{(\sigma)}$, en introduisant de nouvelles fonctions de distribution réduites $f_s^{(\sigma)}$ définies par :

$$(4.1) \ f_{s}^{(\sigma)}(\dot{x}_{1}, \dot{x}_{2}, \dots, \dot{x}_{s}; t) = N^{-s} \ \tilde{\rho}_{s}^{(\sigma)}(\dot{x}_{1}, \dot{x}_{2}, \dots, \dot{x}_{s}; t),$$

pour lesquelles on a :

(4.2)
$$\lim_{\sigma \to 0} \int_{(\Lambda \times R^3)^S} f_s^{(\sigma)}(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_S; t) d\dot{x}_1 \dots d\dot{x}_S = 1;$$

*Il suffit pour cela que la distribution initiale des N sphères soit absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. ces fonctions $f_s^{(\sigma)}$ satisfont également aux équations de la hiérarchie (3.31), dans lesquelles on a seulement à remplacer σ^2 par $N\sigma^2$ dans l'opérateur de collisions (3.32).

Ceci étant, on se propose d'étudier le comportement limite des fonctions $f_{i}^{(\sigma)}(\cdot;t)$ lorsque σ + 0, en vue de montrer que les solutions de la hiérarchie (3.31) tendent à la limite σ = 0 vers une solution particulière telle que $\lim_{\sigma \to 0} f_{i}^{(\sigma)}(\vec{x}_{i};t)$ soit solution de l'équation de Boltzmann (3.40). D'après les résultats du paragraphe 3.3.d, il suffit pour cela de prouver que les $f_{i}^{(\sigma)}(\cdot;t)$ tendent lorsque σ + 0 vers des solutions de la hiérarchie de Boltzmann (3.46) ; on est ainsi conduit à suivre la démarche suivante :

— a — On suppose d'abord que la suite de fonctions de distribution initiales $f_s^{(\sigma)}(\cdot;0)$ converge pour σ + 0 vers une limite (continue) $f_s^{(0)}(\cdot;0)$, soit :

(4.3) $\lim_{\sigma \to 0} f_s^{(\sigma)}(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_s; 0) = f_s^{(0)}(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_s; 0),$ où le mode de convergence reste à préciser. Au cours de l'évolution, on a ensuite $f_s^{(\sigma)}(\cdot; 0) + f_s^{(\sigma)}(\cdot; t)$, où les $f_s^{(\sigma)}(\cdot; t)$ sont les solutions de la hiérarchie (3.31) correspondant aux conditions initiales $f_s^{(\sigma)}(\cdot; 0)$.

 $-b-Avec\ ces\ hypotheses,\ on\ peut\ alors\ montrer$ que : $-\alpha)\ il\ existe\ un\ temps\ fini\ t_{_0}>0\ tel\ que,$ pour 0 < t < t_{_0}, les $f_{_S}^{(\sigma)}(\ ;t)$ convergent presque partout pour

 σ + 0 vers des fonctions limites $f_s^{(0)}(\cdot;t)$, soit :

$$(4.4) \lim_{\sigma \to 0} f_{s}^{(\sigma)}(\dot{x}_{1}, \dots, \dot{x}_{s}; t) + f_{s}^{(0)}(\dot{x}_{1}, \dots, \dot{x}_{s}; t) :$$

- B) les $f_S^{(0)}(\ ;t)$ sont des solutions de la hiérarchie de Boltzmann (3.46) ;

-Y) Si les $f_{\,\,S}^{\,(\,\,0\,)}(\ ;0\,)$ satisfont à la condition de factorisation

(4.5)
$$f_s^{(0)}(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_s; 0) = \int_{a=1}^{s} f_1^{(0)}(\dot{x}_1; 0),$$

il en est de même pour les $f_s^{(0)}(\cdot;t)$ qui vérifient alors la relation de factorisation (3.45), de sorte que $f_1^{(0)}(\overset{\star}{x}_1;t)$ est une solution de l'équation de Boltzmann (3.40).

Ces trois propositions constituent l'essentiel du théorème de Lanford, dont la démonstration permet en outre d'établir : (i) le type de convergence qui doit être mis en oeuvre dans (4.3) et (ii) la valeur de t₀ pour laquelle le théorème s'applique : en fait, cette valeur est malheureusement petite (de l'ordre d'une fraction du temps de l.p.m.), ce qui entraîne une limitation certaine de la portée du résultat obtenu.

Avant d'entrer dans le détail de la démonstration, il est intéressant d'essayer de préciser la signification physique du théorème. En rapprochant les conditions (4.3) et (4.5), on voit d'abord que celui-ci peut se ramener à la proposition suivante : si les conditions initiales $f^{(\sigma)}(0)$ convergent à la limite de Boltzmann-Grad vers des fonctions satisfaisant à (4.5), alors les solutions de la hiérarchie B.B.G.K.Y. (3.31) convergent vers celles de la hiérarchie de Boltzmann (3.46) et la relation de factorisation (4.5) est conservée pour des temps au moins égaux à t_{o} . En d'autres termes, le théorème de Lanford montre que l'on obtient, à la limite de Boltzmann-Grad, une description réduite autonome de l'état du système au moyen de la fonction de distribution à une particule $f_1^{(0)}(x_1;t)$. pourvu que soient satisfaites certaines conditions initiales. On est ainsi en mesure de préciser, dans le cas des gaz dilués, la nature des deux ingrédients nécessaires à toute description macroscopique (cf. 35 3.1c et d) : Au premier ingrédient, correspondent les conditions (4.3) et (4.5) relatives à l'état initial ; elles permettent de définir une description "réduite" de l'état cinétique du système valable à la limite $\sigma + 0$. Le second ingrédient résulte des conclusions du théorème de

Lanford qui garantissent la conservation de la relation (4.5) pour des durées au moins égale à $t_{\, 0}$; il s'ensuit que la description réduite, définie à t=0, demeure valable pour $0 \le t \le t_{\, 0}$ et que l'évolution du système est alors déterminée par l'équation de Boltzmann.

D'autre part, d'après les remarques de la fin du paragraphe 3.2c, la relation de factorisation (4.5) peut aussi s'interpréter de manière simple dans le langage des nombres d'occupation $n_{\omega}(P)$. En utilisant (3.44) et en désignant par ($^{-\sigma}$) les moyennes calculées avec les fonctions $f_{\omega}^{(\sigma)}$, on voit en effet que les conditions (4.3) et (4.5) permettent d'écrire :

$$\lim_{\substack{\sigma \to 0 \\ \sigma \to 0}} \frac{\overline{n_{\omega}^{2}}^{\sigma}(0) - (\overline{n_{\omega}^{\sigma}}(0))^{2}}{N^{2}} = \lim_{\substack{\sigma \to 0 \\ \sigma \to 0}} \left\{ \begin{cases} f_{2}^{(\sigma)}(\overset{+}{x}_{1},\overset{+}{x}_{2};0) - f_{1}^{(\sigma)}(\overset{+}{x}_{1};0) \\ \omega \times \omega \end{cases} - f_{1}^{(\sigma)}(\overset{+}{x}_{2};0) dx_{1}^{+} dx_{2}^{+} + \frac{1}{N} \int_{\omega} f_{1}^{(\sigma)}(\overset{+}{x}_{1};0) dx_{1}^{+} dx_{2}^{+} = 0,$$

de sorte que la dispersion des variables aléatoires $n_{\omega}(P)/N$ tend vers zéro à la limite de Boltzmann-Grad ; on peut encore dire que (4.3) et (4.5) impliquent la convergence en probabilité des $n_{\omega}(P)/N$ vers les grandeurs certaines $\overline{n}_{\omega}(0)/N^*$. De plus, si ces conditions sont réalisées à l'instant initial, le théorème de Lanford nous apprend alors que la propriété (4.0) est conservée au cours du temps, soit

$$(4.7) \lim_{\sigma \to 0} \frac{\overline{n}_{\omega}^{2\sigma}(t) - (\overline{n}_{\omega}^{\sigma}(t))^{2}}{N^{2}} = \begin{cases} f_{2}^{(0)}(x_{1}, x_{2}; t) - f_{1}^{(0)}(x_{1}; t) f_{1}^{(0)}(x_{2}; t) \\ dx_{1}dx_{2} = 0, \end{cases}$$

*Nous verrons plus loin (cf. p. 238) qu'il y a en fait équivalence entre les conditions (4.3) et (4.5) et l'absence de fluctuations à la limite N + ∞ pour les nombres n₀(P)/N.

où la fonction $f_1^{(0)}(x_1;t)$ est la solution de l'équation de Boltzmann correspondant à la condition initiale $f_1^{(0)}(x_1;0)$. On en conclut que le passage à la limite $\sigma + 0$ et la relation (4.5) de factorisation des $f_3^{(\sigma)}(\cdot;0)$ à l'instant initial permettent de satisfaire aux conditions (3.34)-(3.34'), d'après lesquelles les nombres d'occupation moyens $\bar{n}^{(0)}(\cdot;0)$ peuvent être considérés comme des variables "macroscopiqués" significatives; ainsi se trouvent justifiées à la limite de Boltzmann-Grad les définitions heuristiques de la théorie cinétique des gaz.

Ces remarques générales étant faites, venons-en à la démonstration de ce théorème. Le procédé utilisé consiste essentiellement à considérer les solutions formelles en séries de perturbation de la hiérarchie B.B.G.K.Y., et à les comparer aux solutions correspondantes de la hiérarchie de Boltzmann. A cet effet, il est commode d'écrire les équations de la hiérarchie (3.31) sous une forme compacte en introduisant, comme dans (3.10), le vecteur à N+1 dimensions $\mathbf{f}^{(\sigma)} = \{\mathbf{f}_0^{(\sigma)}, \mathbf{f}_1^{(\sigma)}, \ldots, \mathbf{f}_s^{(\sigma)}, \ldots\}$ qui a pour composantes l'ensemble des fonctions de distribution réduites $\mathbf{f}_s^{(\sigma)}(0 \le s \le N)$; notons qu'à la limite de Boltzmann-Grad, le vecteur $\mathbf{f}^{(\sigma)}$ a une infinité de composantes. Avec ces notations, le système d'équations (3.31) peut se mettre sous la forme :

$$(4.8) \frac{\partial \underline{f}^{(\sigma)}(\ldots,t)}{\partial t} = L^{(\sigma)}\underline{f}^{(\sigma)}(\ldots,t) + C^{(\sigma)}\underline{f}^{(\sigma)}(\ldots,t),$$

où L^(\sigma) est une matrice diagonale dont les éléments L^(\sigma)_s $\delta_{ss'}$ sont les opérateurs de Liouville à s particules (comprenant les collisions élastiques binaires et les effets de parois), et où C^(\sigma) est une matrice constituée des éléments C^(\sigma)_{s,s+1}, avec des zéros ailleurs ; d'après (3.32), l'action de C^(\sigma)_{s,s+1} sur les fonctions changées d'échelle f^(\sigma)_s ($\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_s$) s'écrit :

$$(4.9) (C_{s,s+1}^{(\sigma)}f_{s+1}^{(\sigma)})(\dot{x}_{1},...,\dot{x}_{s}) = N\sigma^{2} \sum_{i=1}^{s} d\dot{p}_{s+1}^{\dagger} d\hat{\omega} \hat{\omega}.(\frac{\dot{p}_{s+1}^{\dagger} - \dot{p}_{i}}{m})$$

$$f_{s+1}^{(\sigma)}(\dot{x}_{1},...,\dot{x}_{s}^{\dagger};\dot{r}_{i}^{\dagger} + \sigma\hat{\omega},\dot{p}_{s+1}^{\dagger}).$$

On voit ainsi apparaı̂tre au second membre de (4.8) l'opérateur total $L^{(\sigma)}+C^{(\sigma)}$, dans lequel le terme de collisions $C^{(\sigma)}$ peut être considéré comme une perturbation. En l'absence de ce terme, l'évolution du système est déterminée par l'opérateur non perturbé $L^{(\sigma)}$, la solution de (4.8) s'écrivant dans ce cas :

$$(4.10) \ \ \hat{\underline{t}}^{(\sigma)}(\ldots,t) = \underline{S}^{(\sigma)}(t) \hat{\underline{t}}^{(\sigma)}(\ldots,0), \ (\underline{S}^{(\sigma)}(t) \equiv \underline{U}^{(\sigma)}(-t)),$$

avec $(4.11) \left(S^{\left(\sigma\right)}(t) \underbrace{f^{\left(\sigma\right)}(\ldots;0)}_{s}\right)_{s} = e^{\sum_{s=1}^{s} f^{\left(\sigma\right)}_{s}(\ldots;0)},$

 $L_{s}^{(\sigma)}t$ où l'opérateur e $=U^{(\sigma)}(-t)$ décrit l'évolution d'un groupe de s sphères dures de diamètre σ interagissant par collisions élastiques (entre elles et avec les parois). Signalons toutefois que l'utilisation des opérateurs $S^{(\sigma)}$ demande quelques précautions puisqu'ils ne sont définis que si $|\vec{r}_1 - \vec{r}_1| \ge \sigma$. $\forall i,j=1,2,\ldots,N$; nous n'insisterons pas sur ces difficultés techniques qui peuvent être surmontées, par exemple en posant $f_s^{(\sigma)}(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_s)=0$ lorsque $|\vec{r}_1 - \vec{r}_1| < \sigma$.

Ceci étant, on peut obtenir des solutions formelles de l'équation complète (4.8) en appliquant le formalisme des séries de perturbation dépendant du temps $({\mbox{Dyson}})$; il vient ainsi :

$$(4.12) \underbrace{f}_{0}^{(\sigma)}(...;t) = S^{(\sigma)}(t) \underbrace{f}_{0}^{(\sigma)}(...;0) + \underbrace{\hat{\xi}}_{0}^{\tau} \underbrace{dt_{1}}_{0} \underbrace{dt_{2}}_{0}...$$

$$\int_{0}^{t_{m-1}} dt_{m} S^{(\sigma)}(t-t_{1}) C^{(\sigma)} S^{(\sigma)}(t_{1}-t_{2})... C^{(\sigma)} S^{(\sigma)}(t_{m}) \underbrace{f}_{0}^{(\sigma)}(...;0),$$

où l'on doit naturellement préciser le sens de la convergence. Par un raisonnement analogue, on obtient également des solutions formelles de la hiérarchie de Boltzmann, qui s'écrivent:

$$(4.13) \ \underline{t}^{(0)}(\ldots,t) = S^{(0)}(t)\underline{t}^{(0)}(\ldots,0) + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{0}^{t} dt_{1} \int_{0}^{t_{1}} dt_{2} \ldots \int_{0}^{t_{m-1}} dt_{m}$$

$$S^{(0)}(t-t_{1})C^{(0)}S^{(0)}(t_{1}-t_{2}) \ldots C^{(0)}S^{(0)}(t_{m})\underline{t}^{(0)}(\ldots,0),$$

où $S^{(0)}(t)$ décrit le mouvement libre des particules, soit :

$$(4.14) (S^{(0)}(t)f^{(0)}(...;0))_{s} = f_{s}^{(0)}(\dot{r}_{1} - \frac{\dot{p}_{1}}{m}t, \dot{p}_{1}, \dot{r}_{2} - \frac{\dot{p}_{2}}{m}t,$$

$$\dot{p}_{2},...,\dot{r}_{s} - \frac{\dot{p}_{s}}{m}t, \dot{p}_{s}; 0),$$

et où $\mathbf{C}^{(0)}$ est l'opérateur correspondant aux termes de collisions de Boltzmann (3.48).

Avant d'aller plus loin, il convient de remarquer que, malgré leur analogie formelle, les séries (4.12) et (4.13) doivent être traitées de manière différente. Ceci résulte en effet de la définition même des deux hiérarchies et du fait que la contribution du m'ème terme à la fonction f_s ne met en jeu que f_s . Or, dans le cas de la hiérarchie B.B.C.K.Y., on a $f_s^{(\sigma)} \equiv 0$ si i > N ; il s'ensuit donc que les séries (4.12) se réduisent à des sommes finies pour des valeurs finies de σ . Comme la solution $f_s^{(\sigma)}(\dots,t)$ est en principe bien définie par la dynamique des N sphères dures, on a seulement à vérifier la validité de (4.12) dans le cas fini. Par contre, comme la hiérarchie de Boltzmann est construite à partir de l'équation de Boltzmann relative à $f_s^{(0)}$, il n'y a pas lieu d'annuler identiquement les $f_s^{(0)}$ à partir d'un certain rang. Il faut donc examiner la convergence des séries (4.13) en vue de montrer qu'elles définissent bien une solution de la hiérarchie de Boltzmann.

Etant donné les solutions formelles (4.12) et (4.13), la démonstration des trois propositions a-y du théorème recherché passe alors par les étapes suivantes : (i) définir pour les séries (4.12) les conditions d'une convergence uniforme pour $\sigma + 0$; (ii) prouver que les séries (4.13) convergent vers une solution de la hiérarchie de Boltzmann et que cette solution satisfait à la condition de factorisation lorsque celle-ci est réalisée à l'instant initial ; (iii) montrer enfin que les séries (4.12) convergent terme à terme vers les séries (4.13) pour σ + 0. D'après les principes mêmes de la MSHE, les hypothèses nécessaires à la réalisation de ce programme ne peuvent porter que sur les conditions initiales : nous allons voir que le résultat cherché peut être atteint si les fonctions de distribution initiales $f^{(\sigma)}(\ldots,0)$ appartiennent à une classe particulière de fonctions définie par les conditions C1 et C2 énoncées ci-dessous.

On impose d'abord aux fonctions de distribution $f_{s}^{(\sigma)}(\ldots,0)$ d'être uniformément bornées en σ , afin d'assurer la convergence uniforme en σ des séries (4.12) sur un certain intervalle $|t| \leqslant t_{0}$. Pour fixer la borne supénieure des $f_{s}^{(\sigma)}(\ldots,0)$, il est indiqué d'utiliser les distributions maxwelliennes normalisées $\phi_{\beta}(\tilde{p}_{i})$, à la température (1/k β), soit :

$$(4.15) \quad \phi_{\beta}(\hat{p}_{i}) = (\frac{m\beta}{2\pi})^{3/2} \exp(-\frac{\beta}{2m} \hat{p}_{i}^{2}).$$

Les fonctions de distribution initiales $f^{(\sigma)}(\ldots,0)$ définies sur $(\Lambda \times R^3)^S$ sont alors choisies de manière à satisfaire à la condition :

 C_1 . Il existe une paire de nombres $z,\beta>0$ et une constante positive M indépendante de σ et de s, tels que l'on ait :

$$(4.16) |f_{s}^{(\sigma)}(\dot{x}_{1}, \dots, \dot{x}_{s})| \leq Mz^{s} |f_{i=1}^{s} |\phi_{\beta}(\dot{p}_{i})$$

pour tout $\sigma < \sigma_0$.

Cette condition signifie que les ensembles statis-

tiques initiaux doivent être tels que les fonctions $f_n^{(\sigma)}(...,0)$ soient bornées supérieurement par les fonctions de corrélations relatives à un état d'équilibre sans interactions à la température (1/kB). Dans ce cas, les suites de fonctions

 $||\cdot||_{z,\beta} = \sup_{s} \sup_{\overset{\cdot}{x}_{1}...\overset{\cdot}{x}_{s}} (|f(\overset{\cdot}{x}_{1},...,\overset{\cdot}{x}_{s},\overset{\cdot}{p})|/z^{s} \overset{s}{\parallel} \phi_{\beta}(\overset{\cdot}{p}_{1})).$

Remarquons que la condition C1 s'écrit alors avec ces notations:

$$(4.16') \qquad ||\underline{f}^{(\sigma)}||_{z,\beta} \leq M.$$

Pour être en mesure d'établir la convergence terme à terme des séries (4.12) vers les séries (4.13), on admet ensuite que la convergence pour $\sigma + 0$ des fonctions $f_s^{(\sigma)}(...,0)$ est définie par la condition : C_2 -Soit $r_e^{(0)} = [(\Lambda \times R^3)^S]^{(0)}$ l'ensemble des points de phase $(\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_s)$ tels que $\dot{r}_i\neq\dot{r}_j$ pour tout $i,j=1,2,\ldots,s$; il existe une fonction continue $f_s^{(0)}(\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_s)$ sur $f_s^{(0)}$ telle que l'on ait uniformément, sur tous les ensembles compacts de

$$(4.17) \lim_{\sigma \to 0} f_{s}^{(\sigma)}(\dot{x}_{1}, \dots, \dot{x}_{s}) = f_{s}^{(0)}(\dot{x}_{1}, \dots, \dot{x}_{s}).$$

Les deux conditions C1 et C2 permettent ainsi de donner une signification précise à la convergence postulée dans (4.3); nous allons voir maintenant, sans entrer dans le détail de toutes les estimations, comment elles conduisent au résultat désiré.

Pour étudier les conséquences de C_1 , considérons le terme général de rang un dans (4.12), où les $f^{(\sigma)}(\ldots,0)$ sont supposées satisfaire à (4.16). On a ainsi à examiner l'action successive des opérateurs $S^{(\sigma)}(t)$ et $C^{(\sigma)}$ définis par (4.11) et (4.9) respectivement.

En raison de la conservation de l'énergie cinétique au cours des collisions, on constate d'abord que les opérateurs $S^{(\sigma)}(t)$ conservent la norme $|\cdot|_{z,\beta}$ et qu'ils définissent donc des isométries sur les espaces, $N_{z,\beta}$. En utilisant (4.9) et (4.16), on peut ensuite montrer que l'opérateur de collisions $C_{s,s+1}^{(\sigma)}$ appliqué à $f_{s+1}^{(\sigma)}$ donne une contribution qui peut être majorée suivant la formule

$$(4.18) |C_{s,s+1}^{(\sigma)}f_{s+1}^{(\sigma)}(\dot{x}_{1},\ldots,\dot{x}_{s+1})| \leq Mz^{s} \prod_{i=1}^{s} \phi_{\beta}(\dot{p}_{i})(2\pi N\sigma^{2}z)$$

$$\left\{ \sum_{i=1}^{s} \int d\dot{p}_{s+1} \left| \frac{\dot{p}_{s+1} - \dot{p}_{i}}{m} \right| \phi_{\beta}(\dot{p}_{s+1}) \right\} .$$

On remarque que le terme entre crochet est une fonction non bornée des p, mais que l'on obtient une fonction bornée si on multiplie ce terme par l'expression $\prod_{i=1}^{n} [\phi_{\beta}(\hat{p}_{i})/\phi_{\beta},(\hat{p}_{i})]$, avec $\beta' < \beta'$; dans ce cas, la borne de cette fonction croît avec s comme $(\beta/\beta')^{3s/2}$. Compte tenu de la définition des espaces normés $N_{z,\beta}$, il s'ensuit que l'opérateur $C^{(\sigma)}$ définit une transformation bornée de l'espace $N_{z,\beta}$ sur l'espace $N_{z,\beta}$; pour tout $z' > (\beta/\beta')^{3/2}z$. Ces propriétés des opérateurs S et $C^{(\sigma)}$ permettent alors d'établir le

Lemme 1. Soient β , β' , z et z' des nombres positifs tels que : $\beta > \beta'$ et $z' > (\beta/\beta')^{3/2}z$; il existe une constante \hat{A} , dépendant seulement des rapports β'/β et z'/z(donc indépendante de m, β, z, σ et N) telle que

$$(4.19) ||S^{(\sigma)}(t-t_1)C^{(\sigma)}S^{(\sigma)}(t_1-t_2)...C^{(\sigma)}S^{(\sigma)}(t_m)f^{(\sigma)}||_{z^+,\beta^+}$$

$$\leq m! \left(AN\pi\sigma^2z(\frac{m\beta}{3})^{-\frac{1}{2}}\right)^m ||f^{(\sigma)}||_{z,\beta},$$
pour tout $m = 1, 2...$ et tout $f^{(\sigma)} \in N_{z,\beta}$.

Le terme du crochet s'interprète aisément en remarquant que l'on a, d'après les définitions précédentes, $(m\beta/3)^{-\frac{1}{2}}$ $= \sqrt{v^2} = \overline{v}$ et $Nz\pi\sigma^2 \simeq 1/\ell$; on voit ainsi que l'on a $Nz\pi\sigma^2(m\beta/3)^{-\frac{1}{2}} \simeq \overline{v}/\ell$ th = 1, t_{2pm} , où t_{2pm} est le temps de libre parcours moyen des particules à la température $1/k\beta$. On est donc conduit à introduire le temps t_0 , défini par

(4.20)
$$t_0 = \left(ANz \pi \sigma^2 (mB/3)^{-\frac{1}{2}}\right) - 1$$
,

qui est approximativement égal au temps de libre parcours multiplié par le facteur \mathbf{A}^{-1} .

Ceci étant, on obtient pour le terme général de / (4.12), en effectuant les intégrations temporelles, le

 $\underline{\text{Lemme 2. Si les conditions du lemme 1 sont satisfaites, on a}:$

$$(4.21) \left| \left| \int_{0}^{t} dt_{1} \int_{0}^{t_{1}} dt_{2} \dots \int_{0}^{t_{m-1}} dt_{m} S^{(\sigma)}(t-t_{1}) C^{(\sigma)} S^{(\sigma)}(t_{1}-t_{2}) \dots C^{(\sigma)} \right| \right|_{z',\beta'} \leq \left(\frac{|t|}{t_{0}} \right)^{m} \left| \left| f^{(\sigma)}_{z} \right| \right|_{z,\beta},$$

de sorte que le terme général de rang m dans (4.12) est borné en norme par $(|t|/t_0)^m$ (en tant qu'opérateur agissant de $N_{z,\beta}$ à $N_{z,\beta}$).

Il résulte immédiatement du lemme 2 que les séries (4.12) convergent uniformément (en N. σ , z et β) pour $|t| < t_0$, t_0 étant maintenu constant et égal à (4.20) (rappelons que l'on a N σ^2 = cte!). Pour obtenir la meilleure approximation et le domaine de convergence le plus grand possible, la constante A doit être rendue aussi petite que possible, ce que l'on réalise avec des β' très petits et des z' très grands; en fait, on a approximativement $A^{-1} \approx 1/5$. La convergence uniforme des séries (4.12) se trouve ainsi démontrée pour des temps

Les raisonnements précédents s'appliquent également aux solutions formelles (4.13) de la hiérarchie de Boltzmann. D'après le lemme 2, ces séries convergent pour

t de l'ordre d'une fraction du temps de libre parcours moyen.

 $|t| < t_0 \text{ et permettent de définir sur cet intervalle de temps} \\ \text{les solutions } f^{(0)}(\dots,t) \text{ de la hiérarchie de Boltzmann correspondant à des fonctions de distribution initiales satisfaisant à (4.18), c'est-à-dire telles que <math>f^{(0)}(\dots,0) \in \mathbb{N}_{2,\beta}$. Si les $f^{(0)}(\dots,0)$ vérifient de plus la relation de factorisation (4.5), on peut aussi montrer que cette relation se conserve pour des temps $|t| < t_0$; les solutions $f^{(0)}(\dots,t)$ satisfont donc dans ce cas à la relation de factorisation (3.45), de sorte que la fonction de distribution à une particule $f^{(0)}_1(\tilde{x},t)$ est une solution de l'équation de Boltzmann (3.40).

Ces résultats étant acquis, il reste encore à prouver que les séries (4.12) convergent terme à terme vers les séries (4.13). C'est ici qu'intervient la condition \mathcal{C}_2 qui permet précisément de montrer que l'on a

$$\begin{array}{ll} (4.22) \lim_{\sigma \to 0} \, S^{(\sigma)}(t-t_1) C^{(\sigma)} S^{(\sigma)}(t_1-t_2) \ldots C^{(\sigma)} S^{(\sigma)}(t_m) f^{(\sigma)} \\ \\ = & \, S^{(0)}(t-t_1) C^{(0)} S^{(0)}(t_1-t_2) \ldots C^{(0)} S^{(0)}(t_m) f^{(0)}, \, \forall m \, , \end{array}$$

pour tout t tel que : $t_0 > t > t_1 > t_2 > \ldots > t_m > 0$. Pour comprendre le mécanisme de la preuve, il suffit de considérer l'expression $S^{(\sigma)}(t-t_1)C_{s,s+1}^{(\sigma)}S^{(\sigma)}(t_1)f_{s+1}^{(\sigma)}$ qui représente la composante à s particules du terme m=1. Cette expression décrit successivement l'évolution d'un groupe de s sphères dures pour une durée $t-t_1$, l'adjonction à l'instant t_1 d'une (s+1) ème sphère d'impulsion p en contact avec la i ème particule, et l'évolution des (s+1) sphères pour la durée t_1 : elle comporte en outre une sommation sur toutes les sphères p et tous les points de contact possibles.

Il suffira pour notre propos d'étudier la contribution d'un tel terme au point de phase (\vec{x}_1, \vec{x}_2) , dans le cas simple où s = 3, c'est-à-dire de calculer l'expression :

$$(4.23) \quad \left[\sum_{i=1,2} S^{(\sigma)}(t-t_1) C_{i,3}^{(\sigma)} S^{(\sigma)}(t_1) f_3^{(\sigma)}\right] (\dot{x}_1, \dot{x}_2)$$

pour 0 < t₁ < t. On peut effectuer ce calcul en remontant l'évolution dans le sens des tenégatifs à partir du point de phase final $(\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t))$ correspondant aux sphères (1) et (2). En procédant ainsi, on suit d'abord sur l'intervalle t-t, l'évolution dynamique de (1) et (2) qui est décrite par un opérateur $S^{(\sigma)}$ et aboutit au point de phase antérieur $(\overset{\star}{x}_1(t_1),$ $x_2(t_1)$). A l'instant t_1 , on adjoint ensuite au point $\vec{r}_1(t_1) + \sigma \hat{\omega}$ la sphère (3) d'impulsion $\vec{p}_3(t_1)$ qui est en contact avec la sphère i (i = 1,2); si l'on a $(p_3(t_1) - p_2(t_1))$ $\hat{a} > 0$, la sphère (3) vient d'effectuer une collision avec la sphère (i) (à l'instant t₁), de sorte que leurs impulsions / immédiatement avant la collision sont données par $T_{\alpha}(\bar{p}_{z}(t_{1}),$ $p_3(t_1)$), d'après (3.37); dans le cas contraire où $(p_3(t_1))$ $-p_1(t_1)$. $\hat{\omega}$ < 0, les deux sphères (i) et (3) se meuvent séparément dans le sens des t négatifs. Enfin, on "remonte" l'évolution dynamique des trois sphères (décrite à nouveau par un opérateur $S^{(\sigma)}$) sur la durée t_1 pour aboutir au point de phase initial $(x_1(0), x_2(0), x_3(0))$; remarquons que ces phases initiales s'expriment alors en fonction de i, de \vec{p}_1 , de $\hat{\omega}$, de $\vec{X}_1(t)$ et de $\vec{X}_2(t)$. On obtient ainsi le terme (4.23) en formant la quantité $N\sigma^2 = \frac{\vec{p}_3(t) - \vec{p}_1(t_1)}{m} \cdot \hat{\omega} f_3^{(\sigma)} [\vec{x}_1(0), \vec{x}_2(0), \vec{x}_3(0)]$, en sommant sur i et en intégrant sur û et p. Ceci étant, la démonstration du résultat cherché repose essentiellement sur les deux arguments suivants :

- (i) Durant l'évolution décrite par les opérateurs $S^{(\sigma)}(t)$, des collisions ne se produisent que pour des points de phase exceptionnels qui donnent une contribution négligeable lorsque σ + 0. Considérons en effet le mouvement des sphères (1) et (2) de $(\dot{x}_1(t),\dot{x}_2(t))$ à $(\dot{x}_1(t_1),\dot{x}_2(t_1))$; il est clair que l'on peut toujours choisir σ suffisamment petit pour qu'il n'y ait pas de collisions durant $t-t_1$, sauf dans le cas exceptionnel où $\dot{p}_1-\dot{p}_2$ et $\dot{r}_1-\dot{r}_2$ sont colinéaires. De même, durant l'évolution "inverse" des trois sphères (1), (2) et (3) sur l'intervalle t_1 , il ne peut y avoir de collisions que pour des valeurs particulières de i, $\hat{\omega}$ et \dot{p}_1 qui donnent, à la li-

mite σ + 0, une contribution négligeable aux intégrales de (4.23). Ainsi, l'action de S^(\sigma)(t) se réduit à celle de S^(\sigma)(t) lorsque σ + 0, à l'exception d'ensembles de points de phase de mesure nulle. On remarquera à ce propos que ce type d'argument permet également d'éliminer les effets des "recollisions" entre particules qui sont à l'origine des divergences dans les développements en puissances de la densité (cf. §3.2c).

- (ii) La dimension finie des particules ne se manifeste dans l'action des opérateurs $C_{s,s+1}^{(\sigma)}$ que par une translation $\sigma\hat{\omega}$ de la position $\dot{r}_{s+1}^{(\tau)}(0)$ de la particule supplémentaire (s+1); ceci résulte clairement de la définition (4.9) et de l'analyse précédente concernant le terme particulier (4.23).

En tenant compte de ces deux arguments, il est alors facile d'effectuer le passage à la limite σ + 0 dans le terme (4.23), si les fonctions $f_0^{(\sigma)}(\ldots;0)$ satisfont à la condition C_2 ; dans ce cas, on obtient le terme limite en remplaçant simplement σ par zéro dans (4.23). Comme la généralisation de ce raisonnement pour m et s quelconques ne rencontre pas de difficultés particulières, la propriété de convergence (4.22) se trouve ainsi établie.

En conclusion des analyses précédentes, le théorème démontré s'énonce sous la forme suivante :

Théorème: Soit une suite d'ensembles statistiques initiaux de systèmes de sphères dures (de diamètre σ) avec des fonctions de corrélation $f_s^{(\sigma)}(\overset{\star}{x}_1,\overset{\star}{x}_2,\ldots,\overset{\star}{x}_s)$ satisfaisant aux conditions C_1 et C_2 . Soient $f_s^{(\sigma)}(\overset{\star}{x}_1,\overset{\star}{x}_2,\ldots,\overset{\star}{x}_s;t)$ la solution de la hiérarchie B.B.G.K.Y. correspondant à la condition initiale $f_s^{(\sigma)}(\overset{\star}{x}_1,\overset{\star}{x}_2,\ldots,\overset{\star}{x}_s)$ et $f_s^{(0)}(\overset{\star}{x}_1,\overset{\star}{x}_2,\ldots,\overset{\star}{x}_s;t)$ la solution de la hiérarchie de Boltzmann obtenue en prenant comme condition initiale la fonction $f_s^{(0)}(\overset{\star}{x}_1,\overset{\star}{x}_2,\ldots,\overset{\star}{x}_s)$ figurant dans C_2 .

Il existe alors un temps $t_0(z,\beta) > 0$ défini par

(4.20), tel que l'on ait pour $0 \le t \le t_0$,

 $\lim_{\sigma \to 0} f_S^{(\sigma)}(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_S; t) = f_S^{(0)}(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_S; t) \text{ presque partout, (avec No² = Cte), où les fonctions } f_S^{(\sigma)}(\dots; t) \text{ admettent une borne de la forme C1 avec z' > z et $\beta' < \beta$. Ce théorème comporte un corollaire important : }$

Corollaire. Si les conditions d'application du théorème précédent sont satisfaites et si l'on a en outre pour la fonction $f_s^{(0)}(\overset{\star}{x}_1,\overset{\star}{x}_2,\ldots,\overset{\star}{x}_s)$ de C_2 :

$$f_{s}^{(0)}(\dot{x}_{1},\dot{x}_{2},...,\dot{x}_{s}) = \int_{i=1}^{s} f_{1}^{(0)}(\dot{x}_{1}),$$

on a alors pour $0 \le t \le t_0$:

$$f_{s}^{(0)}(\dot{x}_{1}, \dot{x}_{2}, \dots, \dot{x}_{s}; t) = \prod_{i=1}^{s} f_{i}^{(0)}(\dot{x}_{i}; t)$$

et

$$\lim_{\sigma \to 0} f_1^{(\sigma)}(\dot{x}_1;t) = f_1^{(0)}(\dot{x}_1;t),$$

où $f_1^{(0)}(\dot{x}_1,t)$ est la solution de l'équation de Boltzmann correspondant à la condition initiale $f_1^{(0)}(\dot{x}_1)$.

Le théorème précédent constitue une formulation rigoureuse des résultats annoncés dans les propositions $\alpha-\gamma$. Son domaine de validité se trouve malheureusement limité à de petites valeurs de t (\leq t_0), égales au plus à une fraction du temps de l.p.m. Le résultat obtenu ne peut donc pas s'appliquer à l'étude du comportement du système sur de longues durées ; il apporte néanmoins une information capitale concernant l'établissement du régime cinétique, la relaxation de la fonction de distribution à une particule vers une Maxwellienne locale s'effectuant précisément sur une durée de l'ordre du temps de l.p.m.. On remarquera d'ailleurs que cette limitation semble plutôt d'ordre technique, puisqu'elle résulte du fait que la convergence des séries (4.12) et (4.13) ne peut être maîtrisée que pour de petites valeurs de t. Une autre limitation de la portée de ce théorème est due au modèle particulier

considéré (sphères dures); cependant, la plupart des résultats précédents ont pu être étendus au cas de potentiels d'interaction positifs et de portée finie, satisfaisant à certaines conditions de régularité [47].

Il est intéressant de signaler que Lanford a également proposé le procédé suivant pour construire des états statistiques initiaux satisfaisant aux conditions C_1 et C_2 ([26]). On se donne d'abord : (i) une fonction $f_1^{(0)}(\vec{x}_1)$ continue, définie sur $\Lambda \times R^3 \subset \mu_1$ et bornée par une maxwellienne ; (ii) une suite de partitions finies de $\Lambda \times R^3$ en cellules $\omega^{(\sigma)}$, dont les dimensions deviennent de plus en plus petites lorsque σ + 0, mais qui contiennent cependant un nombre de particules de plus en plus grand. Si cette suite satisfait à des conditions de régularité convenablement choisies, on obtient alors l'état statistique initial désiré en distribuant uniformément les particules contenues dans chaque cellule $\omega_1^{(\sigma)}$ de telle manière que leur nombre soit égal à $N = \sum_{i=1}^{(O)} \frac{1}{i} \left(\vec{x}_i \right) d\vec{x}_i$ à une erreur relative près de l'ordre de σ (avec $N\sigma^2 = cte$). On remarquera que l'on aboutit ainsi à une généralisation de la notion d'ensemble microcanonique à une situation hors d'équilibre.

L'une des principales conséquences du théorème de Lanford est d'apporter une solution satisfaisante au conflit entre réversibilité dynamique et irréversibilité macroscopique; les résultats précédents permettent en effet de montrer comment le comportement irréversible du système peut être déduit rigoureusement des principes généraux de la MSHE. A ce propos, nous concluerons cet exposé par les remarques suivantes :

(i). Il convient d'abord de souligner que la démonstration de la convergence des séries (4.12) vaut également pour les t négatifs, tels que $-t_0 \leqslant t \leqslant 0$; en reprenant les raisonnements précédents pour t < 0, on montre alors que la propriété de convergence (4.22) demeure valable, son second membre étant seulement changé de signe*. Il s'ensuit que, dans le cas t < 0,

*Ce changement de signe est dû à la circonstance suivante : dans le cas t < 0, une collision n'a lieu entre la particule i et la particule supplémentaire figurant dans $C^{(\sigma)}$ que pour la configuration inverse de celle qui conduit à une collision dans le cas t > 0.

les $f_S^{(\sigma)}(\ldots;t)$ convergent pour $\sigma \to 0$ vers une solution de la hiérarchie de Boltzmann avec des termes de collisions changés de signe.

(ii). Il résulte du théorème de Lanford que les solutions de la hiérarchie B.B.G.K.Y. (de caractère réversible) pour un fluide de sphères dures tendent, à la limite de Boltzmann-Grad, vers les solutions de la hiérarchie de Boltzmann (de caractère irréversible). On constate ainsi que l'irréversibilité est introduite dans le formalisme par le passage à la limite σ + 0 et qu'elle apparaît comme une propriété limite du système pour le cas σ = 0. Comme ce passage à la limite assure en outre la conservation au cours du temps de la propriété de factorisation des fonctions de distribution, on voit qu'il permet également de justifier la description réduite de l'état du système au moyen d'une fonction de distribution à une particule, solution de l'équation cinétique de Boltzmann.

Le théorème de Lanford se présente donc comme un cas particulier des théorèmes limites évoqués au §3.1d et conduit à décrire l'évolution d'un fluide de sphères dures par un processus limite markovien nonlinéaire (cf. [4]).

(iii). Pour terminer, il est intéressant d'insister sur le procédé technique qui permet de concilier, dans le théorème de Lanford, la réversibilité dynamique et l'irréversibilité de l'évolution limite. En se référant à la démonstration du théorème, on constate que ce résultat est rendu possible par la différence entre les modes de convergence à l'instant initial etàl'instant t. En effet, d'après la condition C_2 , on impose à l'instant initial une convergence uniforme des $f_s^{(\sigma)}(\ldots,0)$

vers les $f^{(0)}(\ldots;0)$, alors qu'à l'instant t la convergence entre ces fonctions a seulement lieu presque partout ; cette restriction est essentielle, car elle rend compte de l'existence possible d'un ensemble de trajectoires exceptionnelles dont la mesure devient rigoureusement nulle à la limite $\sigma=0$. D'autre part, si l'on inverse toutes les vitesses à l'instant

t, les fonctions $f_S^{(\sigma)}(\ldots;t)$ définissent de nouvelles conditions initiales qui ne satisfont pas à la condition C_2 ; le théorème de Lanford ne s'applique donc pas à cette situation, ce qui permet d'éviter les contradictions liées à la réversi-

bilité du modèle dynamique. La différence entre les modes de convergence à l'instant initial et à l'instant t introduit en fait une dissymétrie dans l'évolution temporelle qui est liée au caractère irreversible du processus limite.

4.2 Limite du couplage faible. Cas du gaz de Lorentz $\{4,48\}$

a) Considérations générales. Nous allons maintenant étudier une autre situation limite, celle du couplage faible, qui caractérise l'évolution de systèmes dont le potentiel d'interaction $\lambda V(\overset{+}{r}_1,\ldots,\overset{+}{r}_N)$ est très petit et d'ordre de grandeur $\lambda.$ Comme la variation (Δp_α) de l'impulsion d'une particule est à chaque collision de l'ordre de λ , il faut nécessairement un grand nombre de collisions pour observer une modification finie de l'état du système. Dans ce cas, l'évolution résulte donc des effets cumulatifs de très nombreuses mais très faibles collisions, et l'on montre qu'elle peut être assimilée à un certain processus de diffusion dans l'espace des phases dont l'échelle de temps est de l'ordre de λ^{-2} . Pour décrire un tel processus, on est ainsi conduit à dilater les échelles de temps et d'espace du système, en introduisant les nouvelles variables $\tau = \lambda^2 t$ et $\rho = \lambda^2 r$. La limite du couplage faible consiste alors à faire tendre simultanément $\lambda + 0$ et t (ou \dot{r}) + ∞ , de telle manière que les produits $\lambda^2 t = \tau$ et $\lambda^2 r$ = p demeurent finis ; la densité des particules restant fixée, on définit ainsi une situation limite dans laquelle l'évolution du système est rigoureusement décrite par un processus de diffusion caractérisé par un temps de relaxation $\tau_{R} = 0(1)$ ou $t_{R} = 0(\lambda^{-2})$.

Pour étudier le comportement de la hiérarchie à cette limite, il est commode d'utiliser une définition équivalente de la limite du couplage faible, dans laquelle les changements d'échelle portent sur la densité du système et sur la portée des forces d'interaction. En laissant inchangées les variables de temps et d'espace, on voit que la limite du couplage faible est obtenue si la densité n des particules croît comme ε^{-3} et si la portée des forces d'interaction décroît comme ε , où $\varepsilon \equiv \lambda^2$. On peut alors procéder comme pour la limite de Boltzmann-Grad, et considérer une suite infinie de systèmes dont la densité augmente avec ε^{-3} et dont le poten-

tiel d'interaction est de la forme $\varepsilon^{\frac{1}{2}}V(\overset{\star}{r}_{1}/\varepsilon,\ldots,\overset{\star}{r}_{N}/\varepsilon)$. Cette suite étant indexée par l'indice ε , l'état statistique de chaque système est décrit par une densité de probabilité $\rho_{N}^{(\varepsilon)}(P;t)$ dans l'espace des phases Γ_{N} et par les fonctions de corrélations $\widetilde{\rho}_{S}^{(\varepsilon)}(\overset{\star}{x}_{1},\ldots,\overset{\star}{x}_{S};t)$ correspondantes ; avec ces définitions, la limite du couplage faible s'obtient en faisant tendre ε + 0 (cf.[4]).

Comme les fonctions $\tilde{\rho}_{S}^{(\varepsilon)}(\dot{x}_{1},\ldots,\dot{x}_{S};t)$ ne restent pas bornées à cette limite, on doit changer l'échelle des fonctions de corrélations en introduisant, comme dans la section (4.1), de nouvelles fonctions de distribution réduites $f_{S}^{(\varepsilon)}$. Compte tenu des conditions précédentes, celles-ci sont maintenant définies par :

$$(4.24) \quad f_{S}^{(\varepsilon)}(\overset{+}{x}_{1},\ldots,\overset{+}{x}_{S};t) = \varepsilon^{3s} \quad \tilde{\rho}_{S}^{(\varepsilon)}(\overset{+}{x}_{1},\ldots,\overset{+}{x}_{S};t),$$

et sont telles que $\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{3s} \tilde{\rho}_{s}^{(\varepsilon)}$ conserve un sens.

Pour étudier la limite du couplage faible, on doit alors considérer les propriétés de la suite d'ensembles statistiques $\rho_N^{(\varepsilon)}(P;t)$ lorsque ε + 0. On reprend à cet effet la démarche de la section précédente qui consiste à définir une suite d'ensembles statistiques initiaux $\rho_N^{(\varepsilon)}(\ldots;0)$ (et de fonctions de corrélations $\rho_S^{(\varepsilon)}(\ldots;0)$) tels que l'on obtienne, à la limite ε + 0, une description réduite autonome de l'évolution du système. On est ainsi conduit à se donner une suite de fonctions de distribution initiales $f_S^{(\varepsilon)}(\ldots;0)$ qui converge en un certain sens vers une fonction limite $f_S^{(0)}(\ldots;0)$, c'est-à-dire telles que :

(4.25)
$$\lim_{\varepsilon \to 0} f_s^{(\varepsilon)}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_s; 0) = f_s^{(0)}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_s; 0),$$
où la fonction $f_s^{(0)}(\dots; 0)$ satisfait à la condition de facto-

risation :

$$(4.26) f_{s}^{(0)}(\dot{x}_{1}, \dots, \dot{x}_{s}; 0) = \int_{i=1}^{s} f_{i}^{(0)}(\dot{x}_{i}; 0).$$

Au cours de l'évolution déterminée par le potentiel d'interaction $\epsilon^{\frac{1}{2}}V(\overset{+}{r}_1/\varepsilon,\ldots,\overset{+}{r}_N/\varepsilon)$, l'état statistique initial $\rho_N^{(\varepsilon)}(\ldots,0)$ et les fonctions de corrélations correspondantes $f_N^{(\varepsilon)}(\ldots,0)$ se transforment respectivement en $\rho_N^{(\varepsilon)}(\ldots,t)$ et $f_N^{(\varepsilon)}(\ldots,t)$; pour obtenir la propriété désirée, les $f_N^{(\varepsilon)}(\ldots,t)$ doivent à limite ε + 0 satisfaire à la condition :

$$(4.27) \quad \lim_{\epsilon \to 0} f_{s}^{(\epsilon)}(\dot{x}_{1}, \dots, \dot{x}_{s}; t) = \int_{i=1}^{s} f_{i}^{(0)}(\dot{x}_{i}; t),$$

où les $f_1^{(0)}(x,t) \equiv f(r,p,t)$ sont dans ce cas solutions, pour la condition initiale $f_1(r,p,0) = f_1^{(0)}(x,0)$, de l'équation de Landau nonlinéaire :

$$(4.28) \quad \frac{\partial f(r,p;t)}{\partial t} + \frac{p}{m} \cdot \nabla_r f(r,p;t)$$

$$= \int d_{p_1}^{\dagger} f(r, p_1; t) [\vec{\nabla}_{p} \cdot \vec{a}(p-p_1) + \vec{\nabla}_{p} \cdot (\vec{D}(p-p_1) \cdot \vec{\nabla}_{p})] f(r, p; t);$$
dans (4.28),

le terme de friction $\vec{a}(p)$ et la matrice de diffusion $\vec{D}(p)$ sont des fonctions de l'impulsion définies par :

(4.29)
$$\vec{a}(p) = -\alpha \vec{p}/|p|^3$$
, $\vec{D}(p) = (\alpha/2|p|)(\vec{\delta} - \vec{p}\vec{p}/p^2)$,

 α étant une constante de diffusion qui dépend de la forme du potentiel V.

Si les conditions précédentes sont satisfaites, on aboutit alors à une description réduite autonome de l'état du système en termes de la fonction de distribution à une particule $\mathbf{f}_1^{(0)}(\mathbf{x},t)$ qui vérifie l'équation de Landau (4.28). Comme celle-ci possède les mêmes propriétés d'irréversibilité que l'équation de Boltzmann (on démontre en effet que le théorème H

s'applique et que la distribution maxwellienne est la seule solution stationnaire annulant le terme de collision), on voit comment les solutions des équations (réversibles) de la hiérarchie peuvent tendre à la limite du couplage faible vers un processus à caractère irréversible. Toutefois, la démonstration rigoureuse de la convergence impliquée par (4.27) se révèle beaucoup plus délicate pour la limite du couplage faible que pour celle de Boltzmann-Grad; en fait, on n'a pu obtenir dans ce domaine que des résultats partiels pour le cas particulier du modèle de Lorentz dont nous allons rappeler brièvement les propriétés essentielles.

b) Modèle de Lorentz. Le gaz de Lorentz est un gaz idéal constitué de particules sans interactions entre elles, se déplaçant dans un système de centres diffuseurs fixes distribués au hasard; c'est donc un cas particulier des modèles où le système étudié se trouve en interaction avec un certain réservoir. Il correspond notamment au modèle "wind-tree" de P.T. Ehrenfest [48,49], dans lequel on considère un gaz de particules légères (ou "vent") sans interactions entre elles, mais interagissant classiquement avec un gaz de particules lourdes (les "arbres"); si on les suppose infiniment lourdes, les particules "arbres" ne sont pas affectées par leurs interactions avec les particules de "vent"; elles peuvent alors être considérées comme des centres diffuseurs fixes dont la distribution dans l'espace est celle correspondant à l'équilibre thermique.

Les particules de "vent" étant sans interaction entre elles, il suffit de considérer le mouvement d'une seule particule (particule-test), dont la position et l'impulsion sont définies par le vecteur $x(t) = \lfloor r(t), p(t) \rfloor \in \Lambda \times R^3$; cette particule se déplace soit dans l'espace physique $R^3(\equiv \Lambda)$ dans le cas d'un système illimité de centres diffuseurs, soit dans une région finie $\Lambda \subset R^3$ délimitée par une frontière lisse $\Im \Lambda$ où la particule subit une certaine réflexion (dont les conditions dépendent de la nature de la paroi). Ceci étant, le modèle de Lorentz est complètement défini par la donnée du potentiel d'interaction V entre le "vent" et les "arbres" et par la loi de distribution des centres diffuseurs. On admet généralement que le potentiel d'interaction V, supposé deux fois différentiable, correspond à des forces centrales de portée

finie ; il est dans ce cas de la forme $V(|\vec{r}-\vec{R}\,|)$, où \vec{R} est la position du centre de la particule lourde. Si $\{R\}=(\vec{R}_1,\ldots,\vec{R}_1,\ldots)$ désigne une configuration particulière des centres diffuseurs dans R^3 , la trajectoire de la particule de Lorentz relative à cette configuration est alors déterminée par la solution des équations du mouvement

$$(4.30) \frac{d\hat{r}(t;\{R\})}{dt} = \hat{p}(t;\{R\})/m , \frac{d\hat{p}(t;\{R\})}{dt} = -\sum_{i=1}^{n} \hat{v}_{r} V(|\hat{r}(t;\{R\}) - \hat{R}_{i}|),$$

satisfaisant aux conditions initiales $\vec{r}(0;\{R\}) = \vec{r}_0$, $\vec{p}(0;\{R\}) = \vec{p}_0$, où \vec{r}_0 et \vec{p}_0 représentent la position et l'impulsion initiales de la particule. Cette solution peut se metre sous la forme $\vec{x}(t;\{R\}) = T_t^{\{R\}} \vec{x}_0$, avec $\vec{x}_0 \in \Lambda \times R^3$, où $T_t^{\{R\}}$ représente un groupe continu de transformations à un paramètre qui conserve la mesure de Lebesgue sur $\Lambda \times R^3$.

Pour compléter le modèle, il reste encore à définir la loi de distribution $\mu(\{R\})$ des configurations $\{R\}$. Si 1'on se place dans le cas où les centres diffuseurs sont distribués dans tout R^3 , une configuration $(\vec{R}_1, \dots, \vec{R}_i, \dots)$ est une suite finie ou dénombrable de points de R³ : ëlle doit être telle que toute région bornée de R3 ne contienne qu'un nombre fini de centres diffuseurs. Le choix de la loi de distribution la mieux appropriée résulte alors des considérations suivantes : (i). Comme, par hypothèse, les particules de "vent" n'ont pas d'effet sur les "arbres", on peut considérer les particules lourdes comme étant en équilibre thermique; (ii) si l'on suppose de plus que ces particules lourdes sont sans interaction entre elles, leur fonction de distribution sera celle d'un gaz idéal à l'équilibre. On est ainsi conduit à choisir pour la loi de distribution $\mu(\{R\})$ des centres diffuseurs fixes (correspondant à des particules infiniment lourdes) une loi de Poisson avec une densité variable, déterminée par ses fonctions de corrélation $\tilde{\rho}_s(\tilde{R}_1,\ldots,\tilde{R}_s)$, $s\geqslant 0$, où $\tilde{\rho}_s(\tilde{R}_1,\ldots,\tilde{R}_s)$ est la densité de probabilité de trouver un groupe de s centres diffuseurs en $\tilde{R}_1,\ldots,\tilde{R}_s$. D'après ces définitions, le mouvement de la particule de Lorentz représenté par $x(t;\{R\}) = T_{+}^{\{R\}} x_{0}$ est un processus stochastique qui est complètement déterminé par les équations (4.30) et la distribution $\mu(\{R\})$: c'est le processus de Lorentz associé à $\mu(\{R\})[4,48,51]$.

Considérons maintenant la description réduite du gaz de Lorentz en termes de la fonction de distribution à une particule $f(\bar{x};t)$. Si $f(\bar{x})$ est la distribution initiale des particules de "vent", la distribution de ces particules à l'instant t, pour une configuration particulière $\{R\}$, est donnée par : $f(T_{-t}^{\{R\}_{x}^{+}}) = f[\bar{x}(-t;\{R\})]$. La fonction de distribution $f(\bar{x};t)$ est alors la moyenne de cette expression sur toutes les configurations possibles des centres diffuseurs, soit :

(4.31)
$$f(x,t) = \int f[x(-t,\{R\})] d\mu(\{R\}) = W_t f(x),$$

où l'opérateur d'évolution "réduite" W_{μ} est linéaire ; cette propriété est due à la linéarité de l'équation de Liouville et au fait que l'état des centres diffuseurs n'est pas affecté par leurs interactions avec les particules de "vent". Il est de plus aisé de vérifier que l'opérateur $\mathbf{W}_{\mathbf{t}}$ correspond à une évolution non-markovienne, en raison même de la définition du processus de Lorentz $x(t;\{R\})$. En effet, si l'on suppose connues la position et l'impulsion $(r(s), p(s)) \equiv x$ de la particule à un instant s, avec $0 \le s \le t$, la probabilité de présence de cette particule dans un certain volume Δ à l'instant t est déterminée par l'ensemble des trajectoires issues de x et correspondant à toutes les configurations possibles (R) des centres diffuseurs. Par contre, si la trajectoire exacte de la particule est connue avant l'instant s sur un certain intervalle de temps (par exemple [0,s]), on ne doit alors tenir compte dans le calcul de la probabilité de présence que des configurations (R) qui conservent cette trajectoire. Il s'ensuit que l'on obtient généralement des résultats différents pour chacune des situations précédentes, et que la probabilité de présence dépend de l'"histoire" de la particule avant l'instant s. Le processus de Lorentz est donc non-markovien et l'opérateur W, comporte des effets de mémoire qui peuvent être exprimés par un certain opérateur de convolution. Ces effets résultent en fait d'un mécanisme complexe qui rend très difficile l'étude des propriétés de transport et du comportement asymptotique du gaz de Lorentz; en dépit de sa simplicité

apparente, le modèle de Lorentz est donc encore trop compliqué pour qu'il soit possible d'en déduire, dans le cas général, des résultats rigoureux.

On est ainsi conduit à rechercher s'il existe des situations physiques telles que le processus de Lorentz puisse se ramener approximativement à un processus plus simple. De ce point de vue, il est naturel d'étudier les propriétés limites de ce modèle pour certains passages à la limite (limite du couplage faible, de Boltzmann-Grad,...), avec l'espoir de prouver la convergence du processus de Lorentz vers des processus limites se prêtant à des calculs explicites et présentant un comportement irréversible. Conformément aux méthodes. exposées dans cette section, on est amené à considérer une suite infinie de systèmes avec une densité croissante des centres diffuseurs et une portée du potentiel d'interaction convenablement décroissante ; cette suite est indexée par un paramètre ε choisi de telle manière que la situation limite correspondante soit définie par la condition $\varepsilon + 0$ (on a par exemple. $\varepsilon = \lambda^2$ pour la limite du couplage faible, et $\varepsilon = \sigma$ pour la limite de Boltzmann-Grad avec des sphères dures de diamètre σ); l'opérateur d'évolution réduite W_t est dans ce cas noté W_t^ε , pour rappeler sa dépendance en ε . En raisonnant comme précédemment, il s'agit alors de prouver, moyennant un changement d'échelle approprié des fonctions de corrélation, l'existence de la limite :

(4.32)
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{W}_{\mathsf{t}}^{\varepsilon} \mathbf{f}(\dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{W}_{\mathsf{t}} \mathbf{f}(\dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{f}(\dot{\mathbf{x}};\mathsf{t}),$$

où l'opérateur limite W_t est généralement markovien et possède des propriétés de semi-groupe, contrairement à l'opérateur W_t^ε qui comporte des effets de mémoire. On peut ainsi obtenir une justification rigoureuse du passage de l'évolution déterministe correspondant aux opérateurs $T_t^{\{R\}}$ à une description réduite autonome à caractère irréversible. Pour mener à bien ce programme, il faut naturellement préciser en quel sens a lieu la convergence impliquée par (4.32) ainsi que les conditions qui doivent être satisfaites par les fonctions de corrélations des centres diffuseurs. Comme nous ne pouvons exposer ici tous les détails techniques des démonstrations, nous nous bor-

nerons à indiquer les principaux résultats obtenus dans ce domaine, en renvoyant à la littérature et notamment à l'article de H. Spohn [4] pour de plus amples développements.

Pour traiter la limite du couplage faible, on doit procéder comme au paragraphe a). On introduit à cet effet une suite infinie de systèmes de centres diffuseurs dont la densité croît comme ε^{-3} , alors que la portée des forces d'interaction avec les particules de "vent" décroît comme ε (avec $\varepsilon=\lambda^2$). L'état statistique de chacun des systèmes est défini par une distribution de Poisson à laquelle correspondent les fonctions de corrélations réduites $f_s^{(\varepsilon)}=\varepsilon^{3s}\,\tilde{\rho}_s(\vec{R}_1,\ldots,\vec{R}_s)$. Dans le cas simple où la densité $n(=\tilde{\rho}_1)$ des centres diffuseurs est indépendante de la position \vec{R}_1 , on peut alors montrer l'existence de la limite (4.32) où l'opérateur \vec{W}_t est tel que $f(\vec{x},t)$ satisfait à une équation de Landau linéaire de la forme :

$$(4.33) \quad \frac{\partial f(\vec{x};t)}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \cdot \vec{\nabla}_r f(\vec{x};t) = n \vec{\nabla}_p \cdot (\vec{D}(p) \cdot \vec{\nabla}_p) f(\vec{x};t),$$

dans laquelle la matrice de diffusion $\tilde{\mathbb{D}}(p)$ est donnée par (4.29); on vérifie ainsi que le passage à la limite du couplage faible permet dans ce cas de ramener l'évolution de $f(\bar{x},t)$ à un processus de diffusion dans l'espace des impulsions. Notons que la démonstration de la convergence peut être déduite des travaux de Kesten et Papanicolaou [50] portant sur le mouvement d'une particule matérielle dans un champ de force stochastique indépendant du temps (cf. [4]). Diverses extensions de ce résultat peuvent être envisagées, notamment dans le cas où la densité des centres diffuseurs est fonction de la position \tilde{R}_1 . Signalons également que d'autres théorèmes ont été démontrés pour un modèle analogue concernant les propriétés de transport d'un gaz d'électrons en présence d'impuretés (cf.[4]).

Lorsque le potentiel d'interaction a une portée finie, on peut aussi étudier les propriétés du modèle de Lorentz à la limite de Boltzmann-Grad. On établit dans ce cas que la limite (4.32) existe effectivement sous certaines conditions et que la fonction de distribution f(x;t) satisfait

alors à une équation de Boltzmann linéaire. Ce résultat a pu être démontré pour une classe générale de potentiels V, grâce à une adaptation convenable de la méthode de Lanford exposée dans la section 4.1 (cf. Spohn [51]) : d'autres démonstrations de la convergence de la limite de Boltzmann-Grad ont été également proposées dans le cas particulier où les centres diffuseurs sont des sphères dures de diamètre = (cf. Gallavotti [52,53] et Spohn [4]). Il convient enfin de remarquer que les méthodes précédentes ne peuvent s'appliquer à des potentiels de portée infinie : on est conduit dans ce cas à considérer un autre type de passage à la limite approprié à cette situation: c'est la limite du champ moyen, dans laquelle l'effet des centres diffuseurs est décrit par un certain potentiel moyen de nature collective. Contrairement à ce qui se passe pour les passages à la limite précédents, on peut alors montrer qu'à la limite du champ moven, le mouvement de la particule de Lorentz obéit à des équations déterministes dérivant d'un hamiltonien effectif que nous allons définir dans la section suivante.

4.3 Limite du champ moyen et équation de Vlasov

Nous n'avons considéré jusqu'à maintenant que des systèmes dont les forces d'interaction ont une portée finie. généralement petite. L'évolution résulte dans ce cas de deux contributions qu'il est possible de traiter séparément à une bonne approximation ; celle due au mouvement libre des particules et celle due aux "brèves" interactions ou collisions des particules entre elles (rappelons que cette distinction est à la base de l'établissement de l'équation cinétique de Boltzmann). Par contre, un tel modèle n'a plus aucune signification lorsque les forces d'interaction ont une portée infinie (cas des forces coulombiennes ou gravitationnelles), chaque particule du système se trouvant constamment en interaction avec toutes les autres particules. Dans ce cas, les méthodes des deux sections précédentes ne s'appliquent plus puisqu'elles impliquent des changements d'échelle dans lesquels la portée des forces d'interaction tend vers zéro à une certaine limite. Pour un potentiel d'interaction faible mais de longue portée, on est alors amené à considérer une autre situation limite, dans laquelle la somme des forces s'exercant sur une particule donnée peut être représentée par un certain champ moyen effectif : c'est la limite du champ moven que nous allons maintenant définir.

Soit un système à N-particules dont le potentiel d'interaction est de la forme $V(\vec{r}_1,\ldots,\vec{r}_N)=\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant N}\phi(r_{ij})$ (où $\phi(r_{ij})$ est supposé à longue portée), et dont on décrit l'évolution dans l'espace des phases μ_1 au moyen de la fonction de distribution à une particule $f(\vec{x}_1;t)(=\frac{1}{N}\;\widetilde{\rho}_1(\vec{x}_1;t))$. Introduisons alors une force moyenne $\overline{f}(\vec{r}_1;t)$, dérivant d'un potentiel effectif $\overline{v}(\vec{r}_1;t)$ et définie par :

$$(4.34) \ \vec{f}(\vec{r}_{1};t) = -\vec{\nabla}_{r_{1}} \int_{u_{2}} \phi(r_{12}) f(\vec{x}_{2};t) d\vec{x}_{2} = -\vec{\nabla}_{r_{1}} \overline{v}(\vec{r}_{1};t);$$

dans la situation limite du champ moyen, on admet que l'effet de toutes les interactions élémentaires sur une particule quelconque (d'indice 1 par exemple) se ramène à l'action de la seule force moyenne $\hat{\mathbf{F}}$, qui joue alors dans l'équation cinétique le rôle d'une force extérieure. Avec ces hypothèses, l'équation cinétique à laquelle doit satisfaire la fonction de distribution $\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_1;\mathbf{t})$ prend la forme de l'équation nonlinéaire de Vlasov

$$(4.35) \frac{\partial f(\dot{x}_{1};t)}{\partial t} + \frac{\dot{p}_{1}}{m} \cdot \dot{\nabla}_{r_{1}} f_{1}(\dot{x}_{1};t) - \left\{ \int_{\mu_{2}} \dot{\nabla}_{r_{1}} \phi(r_{12}) f(\dot{x}_{2};t) d\dot{x}_{2} \right\} \\ \cdot \frac{\partial f(\dot{x}_{1};t)}{\partial \dot{p}_{1}} = 0 ,$$

qui détermine l'évolution de $f(\vec{x}_i;t)$ sous l'effet du champ "collectif" $-\vec{v}_i$ $\vec{v}(\vec{r}_i;t)$. On constate ainsi que l'approximation du champ moyen, contrairement aux limites de Boltzmann-Grad et du couplage faible, conduit à décrire le mouvement d'une particule-test du système par un processus déterministe défini par les équations canoniques

$$(4.36) \qquad \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \frac{\vec{p}_1}{m} \quad , \qquad \frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}(\vec{r}_1;t) \quad ;$$

celles-ci peuvent être déduites d'un hamiltonien effectif $H_{eff} = \vec{p}_i^2/2m + \vec{v}(\vec{r}_i;t)$ et ne sont autres que les équations des caractéristiques de (4.35).

L'équation de Vlasov (4.35) appelle deux remarques importantes pour notre propos. D'une part, elle peut être obtenue directement à partir de la première équation de la hiérachie (3.16), si l'on suppose que la fonction de corrélation de rang 2, $f_2(\vec{x}_1,\vec{x}_2;t) (=\frac{1}{N^2} \tilde{\rho}_2(\vec{x}_1,\vec{x}_2;t))$ satisfait à la condition de factorisation $f_2(\vec{x}_1,\vec{x}_2;t) = f_1(\vec{x}_1;t)f_1(\vec{x}_2;t)$. D'autre part, c'est une équation réversible qui n'implique pas le retour du fluide vers un état d'équilibre ; pour le vérifier, il suffit de remarquer : (i) que l'équation (4.35) reste invariante par la transformation t + -t, $\vec{r}_1 + \vec{r}_1$ et $\vec{p}_1 + -\vec{p}_1$ et (ii) que l'on a pour la variation temporelle de la grandeur H(t) (3.41) de Boltzmann, $\frac{dH}{dt} = 0$, pour des conditions aux limites telles que f + 0 lorsque \vec{r} et $\vec{p} + \infty$.

Pour préciser la signification de la limite du champ moyen, il convient de considérer les équations genérales du système à N particules. En désignant par λ l'ordre de grandeur du potentiel d'interaction, que l'on note donc $\lambda V(r_1,\ldots,r_N)$, les équations du mouvement des N particules s'écrivent :

$$(4.37) \frac{dr_{i}}{dt} = \frac{\dot{p}_{i}}{m} , \frac{d\dot{p}_{i}}{dt} = -\lambda \vec{\nabla}_{r_{i}} \sum_{1 \leq i \leq N} \phi(r_{ij}), (i=1,2,...N),$$

et l'état statistique de ce système est décrit par la hierarchie B.B.G.K.Y. (3.16). En utilisant les fonctions de distribution changées d'échelle $f_S^{(N)} = N^{-S} \tilde{\rho}_S$, et compte tenu de (3.21), cette hiérarchie peut se mettre sous la forme :

$$(4.38) \frac{\partial f_{s}^{(N)}(\dot{x}_{1}, \dots \dot{x}_{s}; t)}{\partial t} + \begin{cases} s & \dot{p}_{1} \\ \vdots & 1 & 1 \end{cases} - \lambda \sum_{i < j = 1}^{s} \frac{\partial \phi(r_{i,j})}{\partial \dot{r}_{i}} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{p}_{j}} \\ f_{s}^{(N)}(\dot{x}_{1}, \dots, \dot{x}_{s}; t) = N\lambda \sum_{i = 1}^{s} \frac{\partial \phi(r_{i,s+1})}{\partial \dot{r}_{i}} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{p}_{i}} f_{s+1}^{(N)}(\dot{x}_{1}, \dots, \dot{x}_{s-1}; t) \\ \frac{\partial \phi(r_{i,s+1})}{\partial \dot{r}_{i}} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{p}_{i}} f_{s+1}^{(N)}(\dot{x}_{1}, \dots, \dot{x}_{s-1}; t) \end{cases}$$

A la limite du champ moyen, la force d'interaction entre deux particules quelconques tend vers zéro, alors que demeure finie

la force totale exercée par toutes les autres particules sur l'une d'entre elles. D'après (4.38) on voit que ce résultat peut être obtenu en faisant tendre N + ∞ et λ + 0, de telle manière que le produit N λ reste fini. En effectuant ce passage à la limite, on constate sans peine que (4.38) converge formellement vers la hiérarchie de Vlasov (3.25), qui s'écrit :

$$(4.39) \quad \frac{\partial f_{s}^{(\infty)}(\dot{x}_{1},\ldots,\dot{x}_{s};t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{s} \frac{\dot{p}_{i}}{m} \cdot \frac{\partial f_{s}^{(\infty)}(\dot{x}_{1},\ldots,\dot{x}_{s};t)}{\partial \dot{r}_{i}}$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \int_{\mu_{s+1}} \frac{\partial \phi(r_{i,s+1})}{\partial r_{i}} \cdot \frac{\partial}{\partial p_{i}} f_{s+1}^{(\infty)}(\dot{x}_{1}, \dots, \dot{x}_{s+1}; t) d\dot{x}_{s+1},$$

/ où l'on a posé $f_s^{(\infty)}(\overset{\star}{x}_1,\ldots,\overset{\star}{x}_s;t) = \lim_{N \to \infty} f_s^{(N)}(\overset{\star}{x}_1,\ldots,\overset{\star}{x}_s;t)$. Dans

le cas d'un plasma (où ϕ est coulombien), la limite du champ moyen se rapporte au "régime de Debye", défini dans la section 3 par les conditions (3.24), et elle correspond au cas où le paramètre de plasma g = $1/nr_D^3$ + 0. Cette limite est encore

appelée "limite de fluide" (Rostoker et Rosenbluth [54]), car elle revient à décrire le système comme un fluide continu en négligeant tous les effets dus au caractère granulaire de la matière ; ceci apparaît clairement dans le cas d'un plasma, où cette limite est obtenue en faisant tendre les paramètres e, m, 1/n et $T \pm 0$, de telle manière que les densités de masse mn, de charge ne et d'énergie cinétique nT demeurent finies.

Ceci étant, on vérifie aisément que, contrairement à la hiérarchie BBGKY (4.38), la hiérarchie de Vlasov (4.39) admet des solutions $f_s^{(\infty)}(\ldots;t)$ factorisables, de la forme $f_s^{(\infty)}(\overset{\star}{x_1},\ldots,\overset{\star}{x_s};t)=\prod_{i=1}^{\infty}f_i(\overset{\star}{x_i};t)$, si $f_i(\overset{\star}{x_i};t)$ est une solution i=1 de l'équation de Vlasov (4.35); en d'autres termes, si la propriété de "chaos moléculaire" se trouve réalisée pour les fonctions $f_s^{(\infty)}$ à un instant donné, elle est conservée au cours du temps quel que soit t. Naturellement, cette propriété qui résulte d'un passage à la limite formel demande à être établie rigoureusement en prouvant la convergence, à la limite du champ

moyen, des solutions $f_s^{(N)}(...,t)$ de la hiérarchie (4.38) vers des fonctions de la forme π $f_1(\vec{x}_i,t)$ où $f_1(\vec{x}_i,t)$ est solu-i=1

tion de l'équation de Vlasov (4.35). Sur ce point, des résultats remarquables ont été obtenus récemment par Braun et Hepp [55]; ils permettent de démontrer la convergence désirée à un instant quelconque pour une large classe de potentiels.

Nous ne pouvons développer ici toutes les étapes de la démarche suivie et des démonstrations ; elles s'appuient sur les relations existant entre les solutions de l'équation de Vlasov (4.35) et les solutions $\dot{x}(t;x_0;\{\mu\})$ des équations newtoniennes de la forme :

 $(4.40) \stackrel{:}{r}(t) = \stackrel{:}{p}(t) \stackrel{:}{m}, \stackrel{:}{p}(t) = \lambda \left[\mu(dx_b) \stackrel{:}{F} [\stackrel{:}{r}(t; x_o; \{\mu\}) - \stackrel{:}{r}(t; x_b; \{\mu\})] \right]$

qui décrivent le mouvement d'une particule dans l'espace R6 $(\dot{x}(t) \equiv (\dot{r}(t), \dot{p}(t)), \text{ où } \dot{F}(\dot{R}) = -\vec{\nabla}_{R} \phi(\dot{R}) \text{ est une force à } 2$ corps dérivant d'un potentiel $\phi(\vec{R})$ (avec $\vec{R} \equiv \vec{r}(t_i \vec{x}_0; \{\mu_i\})$ $-r(t;x_0;\{\mu\}))$; ces équations représentent le mouvement d'une particule dans l'espace R^6 , sous l'effet d'une force $\lambda F(R)$ et pour des conditions initiales $\tilde{x}_0 = \tilde{x}(0; \tilde{x}_0; \{\mu\})$ distribuées sur R^6 selon une mesure de Borel réelle $\mu(dx_4)$. Il est important pour notre propos de remarquer que les équations de la dynamique à N particules (4.37) et l'équation de Vlasov (4.35) peuvent être considérées comme des cas particuliers des équations newtoniennes (4.40), ceux correspondant respectivement aux mesures $\mu(dx_0) = \mu^{(N)}(dx_0) = \frac{1}{N(\lambda)} \sum_{i=1}^{N} \delta(\dot{x}_0 - \dot{x}_0, i)$ et $\mu(dx_0) = \mu^{f}(dx_0) = f(x_0)dx_0$; on vérifie notamment que les équations (4.40) relatives à $\mu^{(N)}(dx_0)$ sont équivalentes aux équations (4.37), avec $\lambda \approx 1/N(\lambda)$ et pour les conditions initiales $x_i(0) = x_{0i}$

Conformément à l'objectif recherché, on doit alors prouver que la dynamique du fluide de Vlasov représente le comportement asymptotique de la densité numérique dans R⁶ du système à N-particules (4.37), lorsque l'on a initialement lim $\mu^{(N)} = \mu^f$, où N(λ) + ∞ et λ + 0 de telle manière que N+ ∞

 $\lambda_N(\lambda) \simeq 1.$ Après avoir démontré l'existence, l'unicité et la régularité des solutions des équations newtoniennes (4.40), et établi la relation existant entre $\vec{x}(t;\vec{x}_0;\{\mu^f\})$ et les solutions $f(\vec{x}_0;t)$ de l'équation de Vlasov, Braun et Hepp ont prouvé l'important théorème suivant :

Théorème de Braun et Hepp. Soit $\phi(\vec{R})$ un potentiel deux fois différentiable, avec des dérivées finies, et soient $\{x, (t; \{x_0, j\}), i=1,2,\ldots,N, \text{ les solutions des équations } (4.37) \text{ relatives à un système de } N(\lambda)(=1/\lambda) \text{ particules, pour les conditions initiales } x_1(0, \{x_0, j\}) = x_0, i ; \text{ les } x_1(t; \{x_0, j\})$ peuvent aussi être regardées comme les solutions des équations (4.40), avec la mesure initiale $\mu_0(\mathrm{d}x) \equiv \mu_0^{(N)}(\mathrm{d}x) = (1/N(\lambda))$ N $\sum_{i=1}^{N} \delta(x-x_0, i)$ qui se transforme au cours de l'évolution en i=1 N $\mu_1^{(N)}(\mathrm{d}x) = (1/N(\lambda))$ $\sum_{i=1}^{N} \delta(x-x_1, i)$. Ceci étant, considérons la $\mu_1^{(N)}(\mathrm{d}x) = (1/N(\lambda))$

suite infinie de systèmes définie par $N(\lambda) + \infty$, $\lambda + 0$ avec $\lambda N(\lambda) = 1$; si l'on a initialement, au sens de la convergence faible sur R^6 ,

(4.41)
$$\lim_{N\to\infty} \mu_0^{(N)}(dx) = \mu_0(dx)$$

où $\mu_0(dx)$ est une mesure de probabilité, on a alors à l'instant t, au sens de la convergence faible,

(4.42)
$$\lim_{N \to \infty} \mu_{t}^{(N)}(dx) = \mu_{t}(dx),$$

où $\mu_t(dx)$ est une solution faible de l'équation de Vlasov pour la condition initiale $\mu_0(dx)$. Si, de plus, $\mu_0(dx)$ admet une densité f(x) différentiable, soit $\mu_0(dx) = f(x)dx$, on a aussi $\mu_t(dx) = f(x,t)dx$, où f(x,t) est la solution usuelle de l'équation de Vlasov (4.35) pour la condition initiale f(x,0) = f(x).

On remarquera la généralité de ce théorème qui est valable quel que soit t pour toute suite de conditions initiales satisfaisant à (4.41). On peut en déduire la convergence des solutions $\mathbf{f}_s^{(N)}(\dot{\mathbf{x}}_1,\ldots,\dot{\mathbf{x}}_s;t)$ de la hiérarchie BBGKY (4.38) vers des solutions factorisables de la forme $\mathbf{f}_s^{(1)}(\dot{\mathbf{x}}_1;t)$, où

les $f_1(\overset{\star}{x_1};t)$ sont des solutions de l'équation de Vlasov, à condition que la propriété de factorisation soit vérifiée à un instant initial quelconque ; à la limite du champ moyen, la "propagation du chaos moléculaire" est donc assurée quel que soit t. On constate ainsi que les résultats rigoureux obtenus à la limite du champ moyen ont un domaine de validité beaucoup plus étendu que ceux relatifs aux autres limites considérées dans ce chapitre* ; ils permettent d'établir comment un système à N particules, interagissant par des forces à longue portée, tend vers un certain état de fluide continu dont l'évolution ne présente cependant pas de caractère irréversible.

4.4 Remarques sur les fluctuations. Nous terminerons cette étude par quelques indications sur les résultats rigoureux qui ont été obtenus pour les fluctuations d'un système hors d'équilibre. Ainsi que nous l'avons vu, les théorèmes limites de cette section permettent généralement de déterminer les conditions asymptotiques pour lesquelles se trouve vérifiée la "propagation du chaos moléculaire", c'est-à-dire la conservation au cours du temps de la propriété de factorisation des fonctions de corrélations.

Or, d'après les raisonnements des sections 3.3a et 3.3c (voir notamment les formules (3.34), (3.44) ainsi que (4.6-7)) relatifs à la définition d'une description cinétique autonome, on sait que la propriété limite de factorisation des fonctions de corrélations entraı̂ne que la dispersion du nombre d'occupation relatif n_{ω}/N , d'une cellule quelconque ω de l'espace des phases μ , tend asymptotiquement vers zéro lorsque $N+\infty$. Il en est d'ailleurs de même pour toute grandeur définie par une fonction de phase "sommatoire" $A^{(N)}(P) \equiv A^{(N)}(\vec{x}_1, \vec{x}_N) = \sum\limits_{i=1}^{N} A_i(\vec{x}_i)$, pour laquelle on peut écrire (avec i=1)

^{*} Voir à ce sujet les remarques du chapitre 5 (cf. p. 246-247).

$$\overline{A}^{(N)} = \int_{\mu_1} \widetilde{\rho}_1^{(N)} (\overset{+}{\mathbf{x}}_1) A_1 (\overset{+}{\mathbf{x}}_1) d\overset{+}{\mathbf{x}}_1) * :$$

$$(4.43) \quad \lim_{N \to \infty} \frac{(A^{(N)}(P) - \overline{A}^{(N)})^2}{N^2}$$

$$= \lim_{N \to \infty} \left\{ \frac{1}{N^2} \int_{\substack{\mu_1 \times \mu_2 \\ \mu_1 \times \mu_2}}^{(N)} (\overset{\star}{\mathbf{x}}_1, \overset{\star}{\mathbf{x}}_2) - \tilde{\rho}_1^{(N)} (\overset{\star}{\mathbf{x}}_1) \tilde{\rho}_1^{(N)} (\overset{\star}{\mathbf{x}}_2) \left[\mathbf{A}_1(\overset{\star}{\mathbf{x}}_1) \mathbf{A}_1(\overset{\star}{\mathbf{x}}_2) \mathrm{d} \overset{\star}{\mathbf{x}}_1 \mathrm{d} \overset{\star}{\mathbf{x}}_2 \right] \\ + \frac{1}{N^2} \left\{ \tilde{\rho}_1^{(N)} (\overset{\star}{\mathbf{x}}_1) \mathbf{A}_1(\overset{\star}{\mathbf{x}}_1) \mathrm{d} \overset{\star}{\mathbf{x}}_1 \right\} = \left\{ \int_{\substack{\mu_1 \times \mu_2 \\ \mu_1 \times \mu_2}}^{(\infty)} (\overset{\star}{\mathbf{x}}_1, \overset{\star}{\mathbf{x}}_2) - f_1^{(\infty)} (\overset{\star}{\mathbf{x}}_1) f_1^{(\infty)} (\overset{\star}{\mathbf{x}}_2) \right] \\ + \frac{1}{N^2} \left\{ \tilde{\rho}_1^{(N)} (\overset{\star}{\mathbf{x}}_1) \mathbf{A}_1(\overset{\star}{\mathbf{x}}_2) \mathrm{d} \overset{\star}{\mathbf{x}}_1 \mathrm{d} \overset{\star}{\mathbf{x}}_2 \right\} = 0 ,$$

si se trouve satisfaite la condition de factorisation :

$$(4.44) \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N^{2}} \tilde{\rho}_{S}^{(N)}(\vec{x}_{1}, \dots, \vec{x}_{S}) = \lim_{N \to \infty} f_{S}^{(N)}(\vec{x}_{1}, \dots, \vec{x}_{S})$$

$$= \prod_{i=1}^{S} f_{i}^{(\infty)}(\vec{x}_{i}) ;$$

notons que la formule (4.43) s'obtient immédiatement si l'on remarque que le nombre d'occupation d'une cellule ω n'est qu'un cas particulier des fonctions de phase $A^{(N)}(P)$, celui pour lequel $A_1(x_1) = \chi_{\omega}(x_1)$ où $\chi_{\omega}(x_1)$ est la fonction caractéristique du domaine ω , égale à 1 si $x_1 \in \omega$ et à 0 si $x_2 \notin \omega$. D'autre part, on peut montrer inversement que, si un ensemble d'états statistiques est tel que la propriété (4.43) soit satisfaite, les fonctions de corrélations vérifient alors la propriété de factorisation (4.44).On peut donc en conclure qu'il y a équi-

valence entre l'hypothèse du chaos moléculaire et celle de l'absence de fluctuations pour les nombres d'occupation relatifs des cellules de l'espace μ , ou plus généralement pour des grandeurs "sommatoires" intensives de la forme $A^{\left(N\right)}(P)/N$ [2,4].

Dans le cas où l'un des théorèmes limites de ce chapitre s'applique, il y a conservation au cours du temps de la propriété (4.44) (c'est la propagation du "chaos moléculaire"), et par suite de (4.43), ce qui s'écrit (avec $\overline{A}^{(N)}(t) = \int_{\mu_1} \widehat{\rho}_1^{(N)}(\overset{+}{x}_1;t) A_1(\overset{+}{x}_1) d\overset{+}{x}_1) :$ $\mu_1 = \int_{\mu_1} \frac{(A^{(N)}(P;t) - \overline{A}^{(N)}(t))^2}{N^2}$ $= \int_{\mu_1 \times \mu_2} [f_2^{(\infty)}(\overset{+}{x}_1,\overset{+}{x}_2;t) - f_1^{(\infty)}(\overset{+}{x}_1;t) f_1^{(\infty)}(\overset{+}{x}_2;t)] A_1(\overset{+}{x}_1) A_1(\overset{+}{x}_2) d\overset{+}{x}_1 d\overset{+}{x}_2 = 0,$

où $A^{(N)}(P,t) \equiv A_t^{(N)}(P)$ est la fonction de phase à l'instant t qui se déduit de $A^{(N)}(P)$ par les équations du mouvement. En d'autres termes, si l'état statistique initial du système est tel qu'à la limite considérée, les fluctuations des grandeurs $A^{(N)}(P)/N$ sont nulles, ces fluctuations restent nulles au cours de l'évolution ultérieure. Il s'ensuit que l'état d'un système dynamique à N particules peut être alors rigoureusement représenté à la limite par son état moyen, dont l'évolution est déterminée par une équation cinétique de Boltzmann, de Fokker-Planck ou de Vlasov, selon que l'on considère les limites de Boltzmann-Grad, du couplage faible ou du champ moyen respectivement.

Pour les situations physiques réelles où la limite $N=\infty$ n'est pas strictement atteinte, on peut seulement dire que la distribution des valeurs possibles de $A^{(N)}(P;t)$ présente un pic très aigu autour de la moyenne $\overline{A}^{(N)}(t)$; dans ce cas, l'équation cinétique ne rend compte du comportement du système que pour certaines configurations initiales, telles que l'on ait à l'instant $t:A^{(N)}(P;t)=\overline{A}^{(N)}(t)$. Pour décrire de ma-

^{*} nous utilisons dans (4.43) une notation plus générale dans laquelle les suites infinies de systèmes sont indexées par le nombre N de particules au lieu de l'être par le petit paramètre correspondant $(\sigma \text{ ou } \varepsilon)$; les deux notations sont évidemment équivalentes, les $f_s^{(0)}(\overset{\star}{x_1},\ldots,\overset{\star}{x_s})$ des sections (4.1) et (4.2) correspondant ici aux $f_s^{(\infty)}(\overset{\star}{x_1},\ldots,\overset{\star}{x_s})$.

nière plus détaillée les phénomènes de fluctuations, on est conduit à les considérer à une échelle beaucoup plus fine, en introduisant des variables de fluctuations définies par :

$$(4.46) \quad \xi^{(N)}(A;t) = \frac{1}{N^{\frac{1}{2}}}(A^{(N)}(P;t) - \overline{A}^{(N)}(t)),$$

dont on étudie le comportement limite pour N + ∞ . D'une manière générale, on s'attend alors à ce que les $\xi^{(N)}(A;t)$ convergent vers une variable aléatoire gaussienne $\xi(A;t)$, lorsque l'ensemble statistique initial et le potentiel d'interaction satisfont à certaines conditions. Si cette conjecture s'avère exacte, on a $\lim_{N\to\infty} \xi^{(N)}(A;t) = \xi(A;t)$ et l'on peut écrire d'après $\lim_{N\to\infty} \xi^{(N)}(A;t)$ pour N suffisamment grand,

$$(4.47) \frac{A^{(N)}(P;t)}{N} \simeq \int_{\mu_1} f_1^{(\infty)}(\vec{x}_1;t) A_1(\vec{x}_1) d\vec{x}_1 + \frac{1}{N^{\frac{1}{2}}} \xi(A;t)$$

où $f_1^{(\infty)}(\vec{x}_1;t)$ est la solution de l'équation cinétique correspondante ; on voit ainsi que l'évolution de la grandeur intensive $A^{(N)}(P;t)/N$ résulte d'une contribution dominante de nature déterministe, à laquelle s'ajoute une petite fluctuation aléatoire dont la loi de distribution est gaussienne. De plus, des exemples connus conduisent à penser que l'évolution de la variable aléatoire gaussienne $\xi(A;t)$ est gouvernée par une certaine équation différentielle stochastique linéaire, dont on peut préciser la forme de la manière suivante. On introduit à cet effet la variable aléatoire $\xi(\vec{x}_1;t)$, définie formellement par $\xi(A;t) = \int_{\mu_1} d\vec{x}_1 \ A(\vec{x}_1) \, \xi(\vec{x}_1;t)$; celle-ci doit alors vérifier l'équation stochastique :

$$(4.48) \quad \frac{\partial \xi(\dot{x}_{1};t)}{\partial t} = L^{(f_{1}^{(\infty)}(t))} \xi(\dot{x}_{1};t) + \eta(\dot{x}_{1};t),$$

où $L^{\left(f_{1}^{\left(\infty\right)}\left(t\right)\right)}$ est l'opérateur linéaire obtenu en linéarisant l'équation cinétique relative à $f_{1}^{\left(\infty\right)}(\overset{+}{x}_{1};t)$, et où $n(\overset{+}{x}_{1};t)$ est un terme de "bruit blanc" gaussien avec une valeur moyenne

nulle.

Spohn [4]) :

Ces assertions demandent naturellement à être confirmées par des démonstrations rigoureuses, pour lesquelles on ne dispose encore que d'un nombre restreint de résultats. Le plus général d'entre eux a été établi pour la limite du champ moyen, dans le prolongement du théorème de Braun et Hepp. En introduisant, conformément aux notations de la section précédente, la fluctuation $\xi^{\left(N\right)}(t,x_{0};\{\mu^{\left(N\right)})=N^{\frac{1}{2}}[\overset{t}{x}(t,x_{0};\{\mu^{\left(N\right)}\})-\overset{t}{x}(t,x_{0};\{\mu^{\left(N\right)}\})$ qui représente l'écart entre la trajectoire déterministe du problème à N particules et l'approximation du champ moyen, on peut alors

montrer le théorème suivant (Braun et Hepp [55], voir aussi

Théorème. Soient $\phi(\vec{R})$ un potentiel quatre fois différentiable, avec des dérivées uniformément continues, et une suite infinie de systèmes dont les états statistiques initiaux sont tels que l'on ait, au sens de la limite du champ moyen, $\lim_{N \to \infty} N^{-s} \tilde{\rho}_{S}^{(N)}(\vec{x}_{1}, \dots, \vec{x}_{s}) = \prod_{i=1}^{K} f_{1}^{(\infty)}(\vec{x}_{1})$. Si, de plus, la fluctuation $\tilde{\xi}^{(N)}(A) = N^{-\frac{1}{2}}[A^{(N)}(P) - \overline{A}^{(N)}]$ converge lorsque $N + \infty$ vers une variable aléatoire gaussienne $\xi(A)$ pour toute fonction de phase $A^{(N)}(P)$ trois fois différentiable avec des dérivées uniformément continues, on a alors à l'instant t:

(4.49)
$$\lim_{N \to \infty} \xi^{(N)}(A,t) = \xi(A,t),$$

au sens de la convergence faible pour les distributions de dimensions finies ; $\xi(A;t)$ est dans ce cas une variable gaussienne, qui vérifie une équation différentielle stochastique du type (4.48) pour la condition initiale $\xi(A)$. Dans cette équation, le terme de bruit blanc $\eta(\tilde{\mathbf{x}}_1;t)$ est identiquement nul, l'opérateur $L^{\left(f^{\left(\infty\right)}(t)\right)}$ est l'opérateur de Vlasov linéarisé et $f_1^{\left(\infty\right)}(\tilde{\mathbf{x}}_1;t)$ est la solution de l'équation de Vlasov (4.35) pour la condition initiale $f_1^{\left(\infty\right)}(\tilde{\mathbf{x}}_1)$.

On remarquera une fois de plus la généralité de ce théorème qui est valable quel que soit t. lorsque le potentiel

d'interaction et la fonction de phase $A^{(N)}(P)$ satisfont aux conditions de différentiabilité énoncées ci-dessus.

Signalons pour terminer qu'un autre résultat de portée plus restreinte a été également établi pour la limite de Boltzmann-Grad [56]. Il concerne un système de sphères dures de diamètre σ en équilibre thermique, avec une distribution d'équilibre grand-canonique de température $1/k\beta$ et de fugacité $z_{\sigma}=\sigma^{-2}$ z. Lorsque $N+\varpi$ et $\sigma+0$, avec $N\sigma^2=Cte$, les valeurs de $A^{(N)}(P;t)/N$ se regroupent autour de la valeur moyenne $\overline{A}=z$ $\int dx_1^{-} \phi_{\beta}(\bar{p}_1)A_1(\bar{x}_1)$ (où $\phi_{\beta}(\bar{p}_1)$ est la maxwellienne définie en (4.15)) et le système tend vers l'état d'un gaz idéal à l'équilibre. On peut alors montrer que la covariance des fluctuations $\xi^{(N)}(A;t)$ converge lorsque $\sigma+0$, pour tout t $\leq t_0(z;\beta)$ (où t_0 est défini par (4.20)) ; si l'on admet de plus, que la fluctuation limite $\xi(A;t)$ existe et est une variable aléatoire gaussienne, l'existence d'une covariance limite des fluctuations entraîne que $\xi(A;t)$ est déterminée par une

équation de la forme (4.48), où $L^{\left(f_1^{\left(\infty\right)}(t)\right)}$ est alors l'opérateur de Boltzmann linéarisé. Il convient aussi de mentionner qu'un résultat de même nature a été obtenu pour le gaz de Lorentz, dans le cas où les centres diffuseurs sont des sphères dures de diamètre σ distribuées suivant une loi de Poisson [4].

5. Conclusion

Nous nous sommes proposé dans ce mémoire de présenter les principaux résultats rigoureux obtenus jusqu'à présent en MSHE, en nous plaçant dans le cadre de la description cinétique, puisque c'est dans ce domaine que les théorèmes les plus significatifs ont été établis. Au cours de l'exposé, nous nous sommes attaché à situer ces résultats dans le contexte des problèmes fondamentaux de la Mécanique Statistique, et à en préciser la signification physique ; c'est ainsi, notamment, que nous nous sommes efforcé de faire apparaître le contenu physique des opérations abstraites impliquées par les passages à la limite $N+\infty$, et de montrer comment celles-ci permettent de décrire et d'interpréter le passage de la dynamique hamiltonienne à N-corps à une évolution macroscopique irréversible

et dissipative. Nous avons ainsi été amené à dégager un certain nombre d'idées directrices qui peuvent éventuellement susciter des recherches ultérieures, et que nous rappelons brièvement ci-dessous:

- C'est d'abord l'importante notion de "niveau de description" d'un système, qui est liée physiquement à l'existence de plusieurs échelles caractéristiques de l'état de ce système; elle conduit à introduire des "descriptions réduites" définies par divers procédés de "coarse-graining" et à représenter l'état macroscopique du système par des variables "coarse-grained" de très petite dispersion.
- Cette notion trouve son aboutissement avec la définition de "descriptions réduites autonomes", dans lesquelles l'évolution du système s'exprime en termes des seules variables "coarse-grained", dont la dispersion doit demeurer très petite au cours du temps. Une telle description n'est en fait possible qu'en raison de l'existence de régimes particuliers dans l'évolution du système, dont la définition rigoureuse repose, en dernière analyse, sur des passages à la limite appropriés qui correspondent à la situation physique et au changement d'échelle considérés.
- Dans le cas de la description cinétique, on est ainsi conduit à définir des limites où N + ∞ (grands systèmes), alors que le volume V(Λ) occupé par le fluide reste fini et que la portée ou l'amplitude du potentiel d'interaction tend vers zéro, de telle manière que soit conservée une grandeur caractéristique du régime considéré (le l.p.m. pour la limite de Boltzmann-Grad, le champ moyen pour le régime de Vlasov, etc.). L'état statistique du système doit alors être décrit en termes des fonctions de distribution réduites changées d'échelle $f\binom{(N)}{S} = N^{-S} \widetilde{\rho}\binom{(N)}{S}$; lorsque ces fonctions satisfont à la condition de chaos moléculaire pour N + ∞ , la fonction de distribution à une particule $f_1^{(\infty)}\binom{*}{X_1}$; t) peut jouer le rôle de variable "coarse-grained" sans dispersion, dans la mesure où elle verifie une certaine équation cinétique.
- Ceci étant, les théorèmes limites ont précisément pour objet de déterminer les conditions qui doivent être satisfaites par l'état statistique initial (par exemple les condi-

tions C_1 et C_2 du théorème de Lanford) pour que la fonction $f_1^{(\infty)}$ vérifie une équation cinétique à la limite considérée. Ces conditions assurent la conservation au cours du temps de la propriété de chaos moléculaire, ce qui entraîne l'absence de fluctuations à l'échelle des variables "coarse-grained" (en l'occurrence, la fonction de distribution $f_1^{(\infty)}$) durant l'évolution. De ce point de vue, les limites considérées peuvent être conçues comme des changements d'échelles pour lesquels l'évolution d'un système dynamique à N-corps admet un certain régime cinétique de nature généralement markovienne.

- Dans cette perspective, on peut également esquisser une théorie générale des fluctuations hors d'équilibre, en se plaçant à une échelle beaucoup plus fine d'ordre $N^{-\frac{1}{2}}$ (comparée à celle des fluctuations des variables coarse-grained). On est ainsi conduit à rechercher les équations différentielles stochastiques vérifiées par les variables aléatoires ξ associées aux fluctuations ; c'est là un problème difficile, pour lequel on ne dispose pour l'instant que d'un nombre restreint de résultats, comme nous l'avons vu dans le \S 4.4.

Au regard des problèmes fondamentaux de la MSHE, les résultats ainsi obtenus constituent un progrès réel pour la compréhension du passage de la description microscopique à la description macroscopique d'un système à N-corps. Les théorèmes limites du chapitre 4 montrent en effet qu'il est possible, au moins dans certains cas, de décrire ce passage par des méthodes rigoureuses fondées sur le caractère macroscopique du système étudié, et d'approfondir ainsi la nature des liens entre les domaines microscopique et macroscopique. Il convient par contre d'insister sur la portée restreinte de ces méthodes, puisqu'elles ne s'appliquent qu'à des situations limites bien déterminées pour lesquelles la dynamique du système devient particulièrement simple. En fait, mise à part la limite du couplage faible pour laquelle les démonstrations de convergence ne sont pas encore complètement acquises, les théorèmes en question ne portent que sur deux cas limites : la limite de Boltzmann-Grad, qui correspond au cas d'un fluide très dilué dont l'évolution est déterminée par des interactions discrètes isolées, et la limite du champ moyen où le système peut être décrit comme un fluide continu soumis à l'action d'une certaine

force effective. Le cas des gaz modérément denses, dont nous avons souligné les difficultés et l'importance pour la théorie cinétique (cf. § 3.2c), ne rentre donc pas dans le champ d'applications des méthodes du chapitre 4 ; on ne voit d'ailleurs pas clairement comment celles-ci pourraient être adaptées à une telle situation, l'une des difficultés étant de définir un régime cinétique (et la limite correspondante) pour lequel les quantités sans dimensions $n\sigma^3$ et ℓ/L resteraient finies (cf. § 3.1d).

Une autre limitation de la portée des résultats exposés dans ce mémoire tient au point de vue même qui a été adopté. En effet, on s'est systématiquement placé dans le cadre de la Mécanique statistique, en considérant comme notions premières les ensembles statistiques de systèmes et les mesures absolument continues dans l'espace des phases. Dans cette perspective, l'intérêt majeur des théorèmes démontrés est de permettre la déduction rigoureuse d'équations cinétiques à partir des équations exactes de la hiérarchie BBCKY, en considérant des situations limites appropriées et en incorporant toutes les hypothèses de nature statistique dans l'état statistique initial du système. Si l'on élimine ainsi toute possibilité de contradiction entre les lois dynamiques et le comportement du système au niveau cinétique, le problème de la justification des conditions initiales choisies n'a par contre pas été abordé. En fait, ces méthodes relèvent de la démarche d'inspiration probabiliste mentionnée dans l'introduction et dans le § 2.1, dans laquelle la priorité est donnée aux arguments fondés sur le très grand nombre de degrés de liberté du système, alors que les passages à la limite ont pour effet de simplifier considérablement le rôle de la dynamique. Du point de vue des fondements de la Mécanique statistique, il reste encore à justifier les hypothèses statistiques qui portent sur l'état initial du système et qui sont nécessaires pour prouver l'existence d'un régime cinétique ; il est clair que l'on se trouve ainsi confronté de nouveau à l'un des problèmes fondamentaux les plus délicats de la Mécanique statistique. Compte-tenu des arguments développés dans cet article, on peut faire à ce sujet les remarques suivantes :

- (i) On constate que les raisonnements du chapitre 4 apportent à l'étude de ces problèmes une contribution

non négligeable : ils permettent en effet de montrer que les résultats obtenus pour une situation limite donnée sont relativement indépendants de l'état statistique initial qui doit seulement satisfaire à des conditions très générales. On retrouve ainsi en MSHE une propriété comparable à l'équivalence des ensembles microcanonique, canonique et grand-canonique de la MSE pour le calcul des valeurs moyennes d'équilibre à la limite thermodynamique. Rappelons toutefois que, dans le cas de la MSE, on peut en outre justifier le choix des ensembles statistiques en se fondant sur les propriétés dynamiques du système, grâce à l'existence de théorèmes ergodiques valables pour certains modèles et notamment pour les systèmes de sphères dures (théorème de Sinai).

- (ii) Pour tenter d'établir des liens plus pro-/fonds entre dynamique et statistique pour des systèmes hors d'équilibre, il conviendrait de développer une analyse fine, au niveau microscopique, du processus de "préparation" d'un système dans un état "macroscopique" donné ; il s'agirait notamment de comprendre comment un certain état statistique initial peut résulter de ce processus, et comment se justifie le passage d'une description microscopique discontinue, mettant en jeu des fonctions &, à une description statistique s'exprimant au moyen de mesures absolument continues. Pour mener à bien un tel programme, il serait en fait nécessaire d'avoir une connaissance approfondie de l'influence du passage à la limite N + • sur les propriétés d'ergodicité et de mixing, et plus généralement sur la "stochasticité" intrinsèque des systèmes à un grand nombre de degrés de liberté : une telle connaissance devrait permettre notamment d'analyser le comportement de ces systèmes sur de courtes durées correspondant à l'"étape initiale" de la théorie de Bogolioubov. On notera à ce propos que l'on retrouve ainsi les problèmes posés par la description des systèmes infinis que nous avons signalés dans le § 2.6.

Pour conclure, il nous reste à faire une remarque importante concernant l'irréversibilité. Nous avons vu que, dans l'esprit des méthodes développées dans cet article, celleci résulte de l'existence de processus limites irréversibles, et qu'elle peut être interprétée comme une propriété limite attachée à une certaine description réduite de l'état d'un

système dynamique à N particules. Comme il est communément admis. l'irréversibilité apparaît donc étroitement liée à la définition d'un ensemble de variables coarse-grained convenablement choisies; or, les résultats exposés dans le chapitre 4 montrent à l'évidence que le processus de coarse-graining ne suffit pas à lui seul pour garantir un comportement irréversible à l'échelle "macroscopique". En effet, si l'on compare les théorèmes limites de Lanford et de Braun et Hepp. on constate que chacun d'entre eux permet d'établir l'existence d'un régime cinétique, correspondant respectivement à la limite de Boltzmann-Grad ou à celle du champ moyen. Dans les deuxcas, la démarche suivie est analogue et l'état "macroscopique" est défini par la fonction de distribution à une particule f.: qui joue le rôle de variable coarse-grained et vérifie une équation cinétique, celle de Boltzmann ou celle de Vlasov respectivement. Pourtant, seule la première de ces deux équations présente un comportement irréversible ; ainsi, bien que le passage du niveau microscopique à une description "macroscopique" implique toujours un certain processus de coarse-graining (qui se manifeste par la réduction du nombre de variables), l'irréversibilité de l'évolution "macroscopique" n'en résulte pas nécessairement.

Il est difficile de déterminer clairement quelles raisons sont à l'origine du comportement si différent de ces deux régimes limites. Selon une remarque de Lanford [57b], cette différence est probablement due à la nature des liens existant, dans chacun de ces deux modèles, entre les niveaux microscopique et "macroscopique". En effet, dans le cas de la limite du champ moyen, la connaissance de l'état "macroscopique" (en l'occurrence la fonction f₁) suffit à déterminer le champ moyen effectif dans le système et, par conséquent, la trajectoire d'une particule-test quelconque ; on peut ainsi entrevoir les raisons de la généralité du théorème de Braun et Hepp (valable quel que soit t) et de la réversibilité de l'équation de Vlasov. Par contre, il n'en est pas de même pour la limite de Boltzmann-Grad, où la trajectoire d'une particule individuelle dépend de données relatives au mouvement des autres particules qui ne peuvent être tirées de la connaissance de f.. Il s'ensuit que le passage du microscopique au "macroscopique" implique dans ce cas une certaine "perte d'information" qui explique l'apparition d'un comportement irréversible, alors que l'existence d'un ensemble de trajectoires exceptionnelles de mesure évanescente permet d'éviter les paradoxes liés au théorème H de Boltzmann. Il faut d'ailleurs noter que ces particularités se manifestent également dans l'étude des fluctuations qui se développent dans ces deux modèles (cf. [57a]).

Les remarques précédentes confirment, une fois de plus, le rôle central joué par certains passages à la limite dans la recherche de résultats rigoureux en MSHE; ils permettent notamment de donner, dans chaque situation particulière, un sens physique précis à des notions comme celles de coarse-graining ou de description réduite qui sont en ellesmêmes essentiellement imprécises. Les méthodes exposées dans cet article constituent ainsi une première ébauche d'un statut de la MSHE fondé à la fois sur les propriétés dynamiques et statistiques des systèmes macroscopiques. Pour terminer, il faut également signaler une autre contribution à l'étude de ces problèmes ; il s'agit des travaux de B. Misra, I. Prigogine et al. ([58;59]), qui tendent à développer un point de vue différent, fondé sur une critique de la notion de trajectoire dynamique pour des systèmes présentant un haut degré d'"instabilité" et sur un concept d'équivalence entre processus déterministes et processus Markoviens qui s'appliquerait à de tels systèmes.

BIBLIOGRAPHIE

- 1. J.L. Lebowitz, (a) Hamiltonian Flows and Rigorous Results in Nonequilibrium Statistical Mechanics, in Statistical Mechanics, New Concepts, New Problems, New Applications (S.A. Rice, K.F. Freed and J.C. Light, eds.), Univ. of Chicago Press, 1972.
 - (b) Exact Results in Nonequilibrium Statistical Mechanics : Where do we stand ; Prog. Theor. Phys. Suppl., $\underline{64}$ (1978), 35.
- 2. O.E. Lanford, Time Evolution of Large Classical Systems, in Dynamical Systems, Theory and Applications, (J. Moser, ed.), Springer-Verlag, Berlin, (1975).
- 3. O. Penrose, Foundations of Statistical Mechanics; Rep. Prog. Phys., 42, (1979), 1937.
- 4. H. Spohn, Kinetic Equations from Hamiltonian Dynamics: Markovian Limits; Rev. Mod. Phys., 52, (1980), 509.
- 5. B.O. Koopman, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 17 (1931), 315.
- 6. R.C. Tolman, The Principles of Statistical Mechanics, Oxford Univ. Press, 1938.
- 7. E.T. Javnes, (a) Phys. Rev., 106, (1957), 620.
 - (b) Phys. Rev., $\overline{108}$, (1957), 171.
 - (c) Information Theory and Statistical Mechanics, in 1962 Brandeis Lectures, Vol 3. Benjamin. New-York, 1963.
- 8. P.R. Halmos, Lectures on Ergodic Theory, Chelsea Publ. Co... New-York, 1956.
- 9. V.I. Arnold et A. Avez, Problèmes ergodiques de la Mécanique classique, Gauthier-Villars, Paris, 1907.
- 10. Ya. G. Sinai, Introduction to Ergodic Theory, Math. Notes. Princeton Univ. Press, 1970.
- 11. P. and T. Ehrenfest, Begriffliche Grundlagen der Statistische Auffassung in der Mechanik, in Enzykl. Mat. Wiss. IV 2, II. (Leipzig: Teubner, 1911); Engl. Tranl.: The Conceptual Foundations of the Statistical Approach in Mechanics, Cornell Univ. Press, 1959.

- 12. Ya G. Sinai, (a) in Statistical Mechanics: Foundations and Applications (Proc. IUPAP Meeting, 1966), T.A. Bak ed. (New-York: Benjamin, 1967), p. 559.
 (b) Development of Krylov's Ideas, in Works on the Foundations of Statistical Physics by N.C. Krylov, (Engl. Transl.) Princeton Univ. Press, 1979.
- 13. A.I. Khintchine, Mathematical Foundations of Statistical Mechanics, Dover, New-York, 1949.
- 14. D. Ruelle, Statistical Mechanics, Rigorous Results, Benjamin, New-York, 1909.
- 15. R.B. Griffiths, Rigorous Results and Theorems, in Phase Transitions and Critical Phenomena, C. Domb and M.S. Green eds., Vol 1, New-York Acad. Press, 1972, p.7.
- 10 R. Rechtman and O. Penrose, J. Stat. Phys. 19, (1978), 359.
- 17. R. Kubo, (a) J. Phys. Soc. Japan, <u>12</u>, (1957), 570.
 (b) The Fluctuation-Dissipation Theorem, Rep. Prog. Phys. 29, (1960), 255.
- 18. J.R. Dorfman, Kinetic and Hydrodynamic Theory of Time Correlation Functions, in Fundamental Problems in Statistical Mechanics III, E.J.D. Cohen ed., North-Holland, 1975.
- 19. I.E. Farquhar, Ergodicity and Related Topics in Irreversibility in the Many-Body Problem, J. Biel and J. Rae eds.. Plenum Press, New-York 1972.
- 20. R. Balescu, Equilibrium and Non-Equilibrium Statistical Mechanics, J. Wiley, New-York, 1975.
- 21. H. Grad, Levels of Description in Statistical Mechanics and Thermodynamics. In Studies in the Foundations, Vol 1, p. 49.
- 22. R. Zwanzig, Phys. Rev., 124 (1961), 983.
- 23. H. Mori, Prog. Theor. Phys., 33, (1905), 423.
- 24. L.S. Garcia-Colin and J.L. Del Rio, (a) J. Stat. Phys., 10 (1977), 235.
 (b) Physica 90A, (1979), 606.
- 25. J.L. Del Rio and L.S. Garcia-Colin, J. Stat. Phys., $\underline{19}$ (1978), 109.

- 26. O.E. Lanford, Soc. Math. de France, Astérisque <u>40</u> (1970), 117.
- 27. H. Mori, Prog. Theor. Phys. 52, (1974), 433.
- 28. H. Grad, Principles of the Kinetic Theory of Jases, in Handbuch der Physik, S. Flügge ed., (Springer-Verlag, Berlin), Vol. 12, (1958), 205.
- 29. M. Tokuyama and H. Mori, Prog. Theor. Phys. <u>50</u>, (1970), 1073.
- 30. T. Morita, H. Mori and M. Tokuyama, J. Stat. Phys. <u>18</u>, (1978), 137.
- 31. N.N. Bogolioubov, Problems of Dynamical Theory in Statistical Physics, (Engl. Trans.), in Studies in Statistical Mechanics, J. de Boer and G.E. Uhlenbeck eds., (North-Holland, Amsterdam, 1962), p.1.
- 32. E.G.D. Cohen, The Boltzmann Equation and Its Generalization to Higher Densities, in Fundamental Problems in Statistical Mechanics, E.G.D. Cohen ed., North-Holland. Amsterdam, 1962.
- 33. R. Jancel, Les Fondements de la Mécanique Statistique Classique et Quantique, Gauthier-Villars, Paris, 1903.
- 34. G. Sandri, Ann. Phys. <u>24</u> (1963), 332.
- 35. E.G.D. Cohen, (a) On the Statistical Mechanics of Moderately Dense Gases not in Equilibrium, in Lectures in Theoretical Physics, Vol VIII A (W.E. Brittin ed.), Univ. Colorado Press, 1960, p. 145.
 - (b) Kinetic Theory of Dense Gases, in Lectures in Theoretical Physics, Vol. IX C (W.E. Brittin ed.), Univ. Colorado Press, 1967, p. 279.
 - (c) The Kinetic Theory of Dense Gases, in Fundamental Problems in Statistical Mechanics, Vol. II, (E.G.D. Cohen ed.), North-Holland, Amsterdam, 1968.
- 36. T.Y. Wu, Kinetic Equations of Gases and Plasmas, Addison-Wesley, Reading, 1906.
- 37. J.R. Dorfman and H. van Beijeren, The Kinetic Theory of Gases, in Statistical Mechanics, Part B, (B.J. Berne, ed.), Plenum Press, New-York, 1977.

- 38. S. Chapman and T.G. Cowling, The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases, Cambridge Univ. Press, 1953.
- 39. H. Grad, (a) Phys. Fluids, $\underline{6}$ (1963), 147. (b) in : Rarefied \overline{G} as Dynamics (K. Karamcheti, ed.) Acad. Press, New-York, 1974.
- 40. M.S. Greén and R.A. Piccirelli, Phys. Rev. <u>132</u>, (1963), 1388.
- 41. S.T. Choh and G.E. Uhlenbeck, The Kinetic Theory of Phenomena in Dense Gases, Thesis, Univ. of Michigan, 1958.
- 42. K. Kawasaki and I. Oppenheim, Phys. Rev., $\underline{139}$ (1965), 1763 A.
- 43. E.A. Frieman and R. Goldman, J. Math. Phys., 7, (1966), 2153; 8, (1967), 1410.
- C. Cercignani, (a) Transp. Theory and Stat. Phys. 2, (1972), 211;
 (b) Theory and Application of the Boltzmann Equation, Scottish Acad. Press, Edinburgh and London, 1975.
- 45. G.E. Uhlenbeck and G.W. Ford, Lectures in Statistical Mechanics, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1963.
- 46. R.K. Alexander, Ph. D. Thesis, Univ. of California, Berkeley, 1975.
- 47. F.G. King, Ph. D. Thesis, University of California, Berkeley, 1975.
- 48. P.A. Martin, Modèles en Mécanique Statistique des Processus Irréversibles, Lecture Notes in Physics, Springer-Verlag, Berlin, n° 103, 1979.
- 49. P. and T. Ehrenfest, in Coll. Scientific Papers, North-Holland, Amsterdam, 1965, p. 299.
- 50. H. Kesten and G.C. Papanicolaou, A Limit Theorem for Stochastic Acceleration, Preprint, 1979.
- 51. H. Spohn, Comm. Math. Phys. 60, (1978), 277.
- 52. G. Gallavotti, (a) Phys. Rev., 185, (1969), 308.

 (b) Lectures on the Billiard, in Dynamical Systems, Theory and Applications, (J. Moser ed.), Springer-Verlag, Berlin, 1975.

- 53. G. Gallavotti, O.E. Lanford and J.L. Lebowitz, J. Math. Phys. <u>11</u>, (1970), 2896.
- 54. N. Rostoker and M.N. Rosenbluth, Phys. Fluids, $\frac{3}{2}$ (1000), 1.
- 55. W. Braun and K. Hepp, Comm. Math. Phys., 56, (1977), 101.
- H. Van Beijeren, O.E. Lanford, J.L. Lebowitz and H. Spohn,
 J. Stat. Phys., <u>22</u>, (1980), 237.
- 57. O.E. Lanford, (a) Time Dependent Phenomena in Statistical Mechanics; in Mathematical Problems in Theoretical Physics, (K. Osterwalder ed.); Springer-Verlag, Berlin, 1980.
 (b) Physica, 106A, (1981), 70.
- 58. B. Misra, I. Prigogine and M. Courbage, Physica <u>984</u>, (1979), 1.
- 59. S. Goldstein, B. Misra and M. Courbage, J. Stat. Phys. <u>25</u>. (1981), 111.