Annales de la Fondation Louis de Broglie,
Vol. 8, n° 4, 1983

MÉCANIQUE ALÉATOIRE, MÉCANIQUE PSEUDO-ALÉATOIRE, MÉCANIQUE QUANTIQUE

par Jean BASS

24, rue Ferdinand Jamin

92340 BOURG LA REINE

****

Séminaire du 24 Janvier 1983

****

Résumé : Dans ces trois mécaniques, le mouvement d'un point matériel (si l'on admet son existence) est très irrégulier et caractérisé par diverses moyennes, dont on donne les expressions mathématiques comparées. Les différences apparaissent lorsqu'il s'agit de moyennes de produits (de fonctions ou d'opérateurs). Elles seront discutées à propos des fonctions caractéristiques (au sens probabiliste). Elles existent toujours en mécanique aléatoire, elles peuvent ne pas exister en mécanique pseudo-aléatoire, et en mécanique quantique, elles peuvent ne pas résulter de mesures positives (pseudo densité de Wigner).

En *mécanique quantique*, il arrive qu'on emploie le langage de la mécanique macroscopique, et qu'on parle du mouvement des particules, alors que, d'une façon peu explicite, on évite d'assigner aux particules une trajectoire et un mouvement véritables. Ce point de vue est cependant discuté. On lit par exemple dans un récent livre de L. de BROGLIE, p. XXXVII, "Depuis environ 20 ans j'ai été de nouveau convaincu qu'il fallait revenir à l'idée que la particule est un très petit objet localisé décrivant une trajectoire (extrait d'une note aux comptes rendus de 1973)".

Et aussi (p. XIX) il est question de la "vibration interne du corpuscule".

J'hésiterai donc moins à employer en mécanique quantique le langage de la mécanique ordinaire, même si le formalisme mathématique semble s'en écarter.

La mécanique quantique a, parmi bien des particularités, celle de définir des *moyennes*. Elle n'est pas la seule mécanique à le faire. Je me propose ici de montrer certaines analogies que cela entraîne entre la mécanique quantique et d'autres mécaniques, qu'on peut appeler *mécanique aléatoire* et *mécanique pseudo-aléatoire*.

En *mécanique aléatoire*, la position d'un point est une fonction aléatoire $f(t,\omega)$ du temps t et d'un paramètre ω représentant un point dans un espace de probabilité Ω. Si $p(\omega)$ est la mesure de probabilité sur Ω, f a en général une valeur moyenne, définie par un opérateur E tel que

$$E\,f = \int_\Omega f(t,\omega)\,dp(\omega).$$

Il existe cependant des fonctions f qui n'ont pas de valeur moyenne. Elles sont mesurables, mais non intégrables par rapport à la mesure $p(\omega)$.

La *covariance* de f, si elle existe, est égale à

$$\gamma(\tau) = E\,\overline{f}(t,\omega)\,f(t+\tau,\omega)$$

On l'appelle aussi *fonction de corrélation* ou fonction d'autocorrélation.

En général, Ef dépend de t et $\gamma(\tau)$ dépend de τ et de t. Si Ef ne dépend pas de t, et si $\gamma(\tau)$ ne dépend que de τ, on dit que la fonction aléatoire f est *stationnaire*. Je ne considérerai dans la suite que des fonctions aléatoires stationnaires.

Dans les définitions qui précèdent, f peut être à valeurs complexes. Si f est à valeurs réelles, sa fonction

caractéristique est égale à

$$\phi(\alpha) = E\,e^{i\alpha f(t,\omega)} = \int_\Omega e^{i\alpha f(t,\omega)}dp(\omega).$$

Elle existe sans restrictions (si f est mesurable). En général elle dépend de t. Mais, si f est stationnaire, on peut convenir, par une extension naturelle de la notion de stationnarité, que ϕ ne dépend pas de t.

$\frac{\gamma(\tau)}{\gamma(0)}$ est la transformée de FOURIER d'une mesure "de probabilité" σ, dite mesure spectrale, et qui n'est pas interprétée comme une probabilité. $\phi(\alpha)$ est la transformée de FOURIER d'une autre mesure de probabilité, dont la fonction de répartition est la probabilité pour que $f(t,\omega) < y$.

En *mécanique pseudo-aléatoire*, f(t) est une fonction de t seul (il n'y a pas d'espace de probabilité). Sa moyenne, si elle existe, est définie par un opérateur M tel que

$$M\,f = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)\,dt.$$

Elle est donc constante par nature.

La fonction de corrélation de f, si elle existe, est égale à

$$\gamma(\tau) = M\,\overline{f}(t)\,f(t+\tau).$$

Si f est a valeurs réelles, sa fonction caractéristique, sous réserve d'existence, est

$$\phi(\alpha) = M\,e^{i\alpha f(t)}$$

$\frac{\gamma(\tau)}{\gamma(0)}$ est la transformée de FOURIER d'une mesure spectrale $\sigma(\omega)$. $\phi(\alpha)$ est la transformée de FOURIER d'une mesure de probabilité, dite ***mesure asymptotique***.

Exemple $f(t) = \sin t$

$M \sin t = 0$

$$\gamma(\tau) = M \sin t \sin(t+\tau) = \frac{1}{2}\cos\tau$$

$$\phi(\alpha) = M\, e^{i\alpha \sin t} = J_0(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{e^{i\alpha s}}{\sqrt{1-s^2}}\, ds$$

(J_0 fonction de Bessel d'ordre 0).

En *mécanique quantique*, la fonction de t qui joue le rôle de position de la particule, s'estompe. Voici quelles sont les données :

un espace de HILBERT complexe H ;

les opérateurs linéaires dans H ;

un élément ψ, de norme 1, appelé fonction d'onde, ou état.

La moyenne de l'opérateur A dans l'état ψ, notée Q A, est égale au produit scalaire

$$Q\,A = \langle A\psi, \psi\rangle \quad .$$

Elle existe sans restrictions nouvelles, au moins si l'opérateur A est borné.

Comme ici le temps n'intervient nulle part, il n'existe pas de notion analogue à la fonction de corrélation.

Si A est hermitien et si l'opérateur $e^{i\alpha A}$ est bien défini (c'est le cas si A est borné), cet opérateur est unitaire et sert à définir une fonction caractéristique

$$\phi(\alpha) = Q\, e^{i\alpha A} = \langle e^{i\alpha A}\psi, \psi\rangle$$

$\phi(\alpha)$ est la transformée de FOURIER d'une mesure de probabilité.

On notera que $e^{i\alpha A}$ constitue un groupe d'opérateurs unitaires paramétré par α, et dont A est l'opérateur infinitésimal : $A = \lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{e^{i\alpha A} - I}{i\alpha}$. L'existence de ce groupe est

soumise à moins de restrictions que celle de A. Un opérateur unitaire est toujours borné.

Exemple 1 On prend comme espace H l'espace L^2 des fonctions d'une variable x.

Si $A\psi = x\,\psi(x)$, on a

$$QA = \int_{-\infty}^{\infty} x\psi(x)\,\overline{\psi}(x)\,dx, \quad \phi(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}\,\psi(x)\,\overline{\psi}(x)\,dx$$

La mesure de probabilité a $|\psi(x)|^2$ pour densité.

Exemple 2 Si

$$A\,\psi = \frac{1}{i}\,\psi'(x),$$

$$QA = \frac{1}{i}\int_{-\infty}^{\infty} \psi'(x)\,\overline{\psi}(x)\,dx \quad .$$

$$\phi(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{\alpha\frac{d}{dx}}\psi(x)\right]\overline{\psi}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x+\alpha)\,\overline{\psi}(x)\,dx \quad .$$

Si l'on remplace $\psi(x)$ par sa transformée de FOURIER $\hat{\psi}(s)$, en posant

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixs}\,\hat{\psi}(s)\,ds \ ,$$

on a

$$\phi(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha s}\,|\hat{\psi}(s)|^2\,ds \ .$$

L'opérateur $\frac{1}{i}\frac{d}{dx}$ admet une densité de probabilité égale à $|\hat{\psi}(x)|^2$.

En mécanique quantique, la fonction ψ peut dépendre du temps. Mais alors ce temps joue un rôle absolument différent de celui qu'il joue en mécanique aléatoire ou pseudo-aléatoire. Au lieu de s'escamoter (fonctions aléatoires stationnaires) ou de servir au calcul des moyennes, le temps régit une évolution temporelle, qui, au point où nous en sommes, ne nous intéresse pas.

Les trois sortes de mécanique fournissent donc des moyennes qui, malgré des différences de structure, ont des propriétés tout à fait comparables. Cependant, il n'est pas possible de définir en mécanique quantique une fonction de corrélation. D'autre part, la fonction caractéristique, qui existe toujours en mécanique aléatoire et en mécanique quantique, peut fort bien ne pas exister en mécanique pseudo-aléatoire.

Voici quelques exemples montrant ce qui se passe lorsqu'une moyenne "n'existe pas".

La moyenne au sens probabiliste est une intégrale de LEBESGUE, qui peut se réduire à une intégrale de RIEMANN généralisée. Si Ω est la droite réelle revêtue de sa tribu borélienne, avec la mesure qui a pour densité $\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$, la variable aléatoire x (assimilable à une fonction aléatoire indépendante de t) n'a pas de moyenne. En effet *l'intégrale*

$$Ex = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{\pi}\lim_{\substack{T\to\infty\\ T'\to\infty}}\int_{-T'}^{T}\frac{x\,dx}{1+x^2}$$

n'existe pas.

$$\text{Si}\quad f(t) = \sin\log t \qquad (\text{pour } t > 0)$$
$$= 0 \qquad (\text{pour } t < 0)$$

la *moyenne*

$$Mf = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_0^T \sin\log t\,dt$$

n'existe pas. L'intégrale peut en effet se calculer et on est conduit à chercher la limite quand $T \to \infty$ de

$$\frac{1}{4}(\sin\log T - \cos\log T).$$

Cette fonction de T oscille sans aucune limite.

Le même calcul montre que la fonction log t (pour t > 0) n'a pas de fonction caractéristique.

Intermédiaire entre la moyenne et la fonction de corrélation se trouve la *moyenne quadratique*, qui mérite une

étude particulière.

$$E|f|^2 = \gamma(0) = -\phi''(0)$$
$$M|f|^2 = \gamma(0) = -\phi''(0)$$
$$Q\,A^2 = \langle A^2\psi,\psi\rangle = \|A\psi\|^2 \qquad (\text{si A est hermitien})$$
$$Q(A^*A) = \langle A^*A\psi,\psi\rangle = \|A\psi\|^2 \qquad (A^* \text{ opérateur adjoint de A})$$

L'existence de la moyenne quadratique entraîne diverses conséquences.

Si $E|f|^2$ existe, on est assuré que Ef existe, et $|Ef|^2 \leqslant E|f|^2$. Par contre l'existence de $M|f|^2$ n'entraîne pas celle de Mf. Voici un exemple de cette circonstance.

$$f(t) = (-1)^n \qquad \text{si}\quad 2^n < t < 2^{n+1}$$
$$= 0 \qquad \text{si}\quad t < 0.$$

f est réelle et, comme $f^2 = 1$, $Mf^2 = 1$. Mais Mf est la limite de la somme

$$\frac{1}{2^{n+1}}\,(1-2+4+\ldots+(-1)^n 2^n) = \frac{1}{2^{n+1}}\left[\frac{1+(-1)^n 2^{n+1}}{3}\right] = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{n+1}} + (-1)^n\right)$$

Or cette somme oscille quand $n \to \infty$ sans avoir aucune limite.

Examinons maintenant les propriétés des couples de fonctions ou d'opérateurs.

Soient f et g deux variables aléatoires. Si $E|f|^2$ et $E|g|^2$ existent, $E\,f\,\bar{g}$ existe et vérifie l'inégalité de SCHWARZ :

$$|E\,f\,\bar{g}| \leqslant \sqrt{E|f|^2\,.\,E|g|^2}$$

Supposons en particulier que f soit une fonction aléatoire stationnaire et choisissons $g = f(t+\tau,\omega)$. Si $E|f(t,\omega)|^2$ existe (et ne dépend pas de t), la fonction de corrélation $\gamma(\tau)$ existe, et vérifie l'inégalité

$$|\gamma(\tau)| \leqslant \gamma(0).$$

Si maintenant f et g sont des fonctions de t seul, on peut définir

$$M\, f\, \bar{g} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)\, \bar{g}(t)\, dt \; .$$

Mais cette limite peut ne pas exister, même si $M|f|^2$et $M|g|^2$ existent. Si par exemple $f = 1$ et si g n'a pas de moyenne, $M\, f\, \bar{g}$ n'existe pas. C'est le cas pour la fonction $g(t) = e^{i \log t}$, qui a une moyenne quadratique mais n'a pas de moyenne. En particulier l'existence de la fonction de corrélation

$$\gamma(\tau) = M\, \bar{f}(t)\, f(t+\tau)$$

ne résulte pas de celle de $M|f|^2 = \gamma(0)$.

En mécanique quantique, la situation est différente. Supposons pour fixer les idées que les opérateurs A et B soient hermitiens. *S'ils ne commutent pas*, il faut distinguer les deux produits AB et BA. Leurs moyennes sont

$$Q(AB) = \langle A\, B\, \psi, \psi\rangle = \langle B\psi,\, A\psi\rangle$$

$$Q(BA) = \langle B\, A\, \psi, \psi\rangle = \langle A\psi,\, B\psi\rangle \; .$$

Les opérateurs AB et BA ne sont pas hermitiens. Leurs moyennes ne sont pas réelles, et

$$Q(AB) = \overline{Q(BA)} \; .$$

Si donc A et B ne commutent pas, on ne peut pas définir une véritable moyenne du produit AB, et il n'y a plus d'inégalité de SCHWARZ. Plus exactement, on a bien l'inégalité

$$|\langle A\psi,\, B\psi\rangle| \leqslant \|A\psi\| \,.\, \|B\psi\| \quad ,$$

mais le premier membre ne correspond pas à la moyenne d'un produit. Par contre, au moins dans le cas où A et B sont liés par la relation

$$AB - BA = i\, h\, I$$

(où I est l'opérateur identité et h un nombre positif), les moyennes quadratiques satisfont à l'inégalité de HEISENBERG

$$\frac{h}{2} \leqslant \|A\psi\| \;.\; \|B\psi\|$$

Si A et B commutent, on peut définir la moyenne Q(AB) et la représenter par

$$\langle A\psi,\, B\psi \rangle.$$

Considérons maintenant l'ensemble des fonctions ou opérateurs ayant une moyenne quadratique.

L'ensemble des variables aléatoires ayant une moyenne quadratique constitue un espace vectoriel. Comme l'existence de $E|f|^2$ et de $E|g|^2$ entraîne celle de $E\, f\, \bar{g}$, c'est même un *espace de HILBERT* avec comme produit scalaire

$$\langle f,g\rangle = E(f\, \bar{g}).$$

L'ensemble des fonctions f telles que $M|f|^2$ existe n'est pas un espace vectoriel. Supposons par exemple que $f = 1$, que $|g| = 1$ et que Mg n'existe pas. Alors $M|g|^2 = 1$, et $M|f + g|^2$ n'existe pas. Cet espace non vectoriel peut être placé dans un espace vectoriel plus grand, qui est un espace de BANACH mais non un espace de HILBERT. C'est *l'espace $\mathcal{M}^2$ de MARCINKIEWICZ*. Les fonctions f qui appartiennent à l'espace $\mathcal{M}^2$ sont définies par la propriété que

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(t)|^2\, dt < \infty.$$

(Je rappelle que $\limsup_{T\to\infty} s(T) = \lim_{T\to\infty} [\sup_{T'>T} s(T')]$).

Dans l'espace $\mathcal{M}^2$, la norme de f est la racine carrée de la limite supérieure ci-dessus. Bien entendu, il s'agit en réalité d'une *semi-norme*, car il existe beaucoup de fonctions de norme nulle, entre autres celles qui tendent vers zéro à l'infini (c'est le cas des intégrales de FOURIER usuelles). Les moyennes de type M sont de nature asymptotique, et ne dépendent pas des propriétés des fonctions à distance finie.

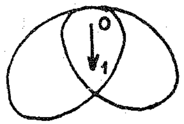
L'espace $\mathcal{M}^2$ contient des sous-espaces hilbertiens, dans lesquels deux fonctions quelconques admettent un produit moyen. Le produit scalaire est défini par

$$<f,g> = M\, f\, \bar{g}$$

Deux fonctions dont le produit admet une moyenne sont dites *comparables*.

Le plus connu des sous-espaces hilbertiens de l'espace $\mathcal{M}^2$ est l'espace des *fonctions presque-périodiques*. Il a même une structure d'algèbre, car le produit de deux fonctions presque-périodiques est presque-périodique.

Deux sous-espaces hilbertiens de $\mathcal{M}^2$ ont en commun l'élément 0. Ils peuvent avoir en commun d'autres éléments. Si les fonctions qu'ils contiennent ont des moyennes, elles sont comparables à la fonction 1, qui fait donc partie de l'intersection des deux espaces. Mais ils ne sont pas contenus dans un même sous-espace hilbertien plus grand.



Deux sous-espaces hilbertiens

Voici un exemple de cette structure.

Le premier espace contient les fonctions

$$1 \quad \text{et} \quad e^{it}$$

Le second espace contient les fonctions

$$1 \quad \text{et} \quad e^{i(t+\log t)} \qquad (t > 0).$$

On a déjà vu que

$$M\, e^{i(t+\log t)}\, e^{-it} = M\, e^{i \log t}$$

n'existe pas. Par contre

$$M\, e^{i(t+\log t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_0^T e^{i(t+\log t)} dt$$

existe et a la valeur 0. Pour le voir, on fait le changement de variable $t + \log t = s$ et on applique le second théorème de la moyenne.

Examinons maintenant la situation en mécanique quantique. Aux fonctions *réelles* correspondent les opérateurs *hermitiens*. Aux fonctions *complexes* correspondent les opérateurs *normaux*. Ce sont des opérateurs qui commutent avec leur adjoint. Ils sont de la forme $A = A_1 + i\, A_2$, où A_1 et A_2 sont des opérateurs hermitiens qui commutent :

$$A_1 = \frac{A + A^*}{2}, \quad A_2 = \frac{A - A^*}{2i}, \quad A\, A^* = A^*\, A\,.$$

L'ensemble des opérateurs normaux n'a pas une structure d'espace vectoriel. Si A et B sont normaux et ne commutent pas, A + B n'est pas en général normal. Si l'on donne un élément ψ de norme 1 dans l'espace de HILBERT, on peut cependant définir la moyenne quadratique $\|A\psi\|^2$ de A. Elle dépend du choix de ψ.

L'ensemble des opérateurs normaux est contenu dans l'espace vectoriel de tous les opérateurs. Dans cet espace, on peut définir une norme d'opérateur, qu'il faut distinguer de la moyenne quadratique. Cette norme est le nombre $\sup\limits_{\|\psi\|=1} \|A\psi\|$. La moyenne quadratique $\|A\psi\|^2$, ψ étant fixé, définit pour A une *semi-norme*.

Les opérateurs hermitiens sont un cas particulier des opérateurs normaux. Ils constituent un espace vectoriel. Cet espace a même une structure hilbertienne, car le produit $<A\psi,B\psi>$ d'éléments de l'espace H a aussi les propriétés d'un produit scalaire dans l'espace des opérateurs (hermitiens ou non). Mais cette propriété n'est pas en général intéressante, car $<A\psi,B\psi>$ ne peut pas s'interpréter comme une moyenne. Si AB et BA sont distincts, leurs moyennes sont des nombres complexes conjugués, alors que ce qu'on recherche, c'est un produit hermitien ayant une moyenne réelle.

Aux opérateurs normaux, avec la norme $\|A\psi\|$, correspondent naturellement les fonctions complexes f, avec la norme

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(t)|^2 \, dt$$

Dans les deux cas, il s'agit en réalité de semi-normes.

Aux fonctions réelles doivent alors correspondre les opérateurs hermitiens deux à deux commutatifs. Au produit scalaire

$$M(f\ g) = \langle f,g\rangle$$

correspond la moyenne quantique réelle

$$Q(A\ B) = \langle AB\psi,\psi\rangle = \langle A\psi,B\psi\rangle$$

Tout cela est consistant avec le fait que, si A et B commutent, alors AB est hermitien.

Mais la commutativité s'étend aux opérateurs normaux. Si deux opérateurs normaux commutent, leur somme est normale. On est ainsi conduit à considérer des espaces vectoriels d'opérateurs normaux commutatifs. Dans un de ces espaces, on définit un produit scalaire

$$\langle A,B\rangle = \langle A\psi,B\psi\rangle = \langle B^*A\psi,\psi\rangle$$

qu'on interprète comme la moyenne $Q(B^*A)$, ou $Q(AB^*)$ d'un produit d'opérateurs normaux.

Les sous-espaces vectoriels d'opérateurs normaux ont une structure tout à fait analogue à celle des sous-espaces vectoriels de fonctions deux à deux comparables.

Mais on est maintenant conduit à considérer des ensembles qui, avec deux éléments, contiennent leur produit, c'est-à-dire des *algèbres de fonctions ou d'opérateurs*. Une algèbre d'opérateurs contient d'habitude l'opérateur identique I. La moyenne d'un opérateur est donc

$$Q(A) = Q(A\ I) = \langle A\psi,\psi\rangle$$

Une algèbre de fonctions ne contient la fonction 1 que si ces fonctions ont des moyennes, ce qui est une hypothèse naturelle,

mais non spontanée. S'il en est ainsi, on peut (avec quelques précautions) définir soit la fonction exponentielle $e^{i\alpha f}$, soit l'opérateur unitaire $e^{i\alpha A}$, à condition que f soit réelle et que A soit hermitien. Ces exponentielles ont des moyennes

$$\phi(\alpha) = M\ e^{i\alpha f} = \langle e^{i\alpha f},1\rangle$$

ou

$$\phi(\alpha) = Q\ e^{i\alpha A} = \langle e^{i\alpha A},I\rangle = \langle e^{i\alpha A}\psi,\psi\rangle\ ,$$

qui ne sont autres que les fonctions caractéristiques introduites plus haut (dans la dernière formule, le symbole de produit scalaire $\langle\ \rangle$ a deux significations différentes).

Que se passe-t-il si l'on donne deux fonctions réelles f,g ou deux opérateurs hermitiens A,B ? On va essayer de définir par sa fonction caractéristique une *probabilité jointe*. Examinons d'abord le cas des fonctions. S'il s'agit de *variables ou de fonctions aléatoires*,

$$\phi(\alpha,\beta) = E\ e^{i(\alpha f+\beta g)}$$

se définit sans ambiguïtés ni restrictions.

S'il s'agit de *fonctions du temps* ordinaires, l'existence de $\phi(\alpha,\beta)$ n'est pas assurée a priori. Elle l'est si f et g appartiennent à un même espace vectoriel de fonctions comparables. Mais il existe des couples de fonctions f et g, qui ont individuellement une mesure asymptotique, et dont le couple n'en a pas. Du point de vue expérimental, l'expérience qui permettrait d'atteindre cette mesure de probabilité consiste à faire une moyenne dans un temps T et à faire croître T jusqu'à ce que la stabilisation se produise. Or, dans ce cas, il n'y a pas stabilisation. La moyenne oscille constamment en fonction de la durée T de l'expérience. Si donc on se donne f, il n'est pas possible de définir pour g une loi de probabilité conditionnelle. En ce sens, f et g ne sont pas simultanément mesurables.

Voici un exemple dans lequel le couple (f,g) admet une fonction caractéristique. Choisissons

$$f(t) = \sin t \quad , \quad g(t) = \sin(t+\tau).$$

En posant

$$\alpha + \beta\cos \tau = r \cos \omega \quad ; \quad \beta \sin \tau = r \sin \omega ,$$

on trouve

$$\phi(\alpha,\beta) = J_0(r) = J_0(\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\beta\cos \tau + \beta^2}) .$$

Au contraire, le couple

$$f(t) = t \quad , \quad g(t) = t + \log t$$

a une fonction caractéristique

$$\phi(\alpha,\beta) = M\, e^{i[\alpha t + \beta(t+\log t)]} ,$$

sauf pour $\beta = -\alpha$. Mais c'est un exemple peu utilisable, car la fonction caractéristique de f est discontinue. Elle est égale à 0 pour $\alpha \neq 0$, à 1 pour $\alpha = 0$. A l'aide de fonctions pseudo-aléatoires, on peut construire des exemples plus intéressants. Les développer dépasse le cadre de cet article.

Donnons-nous maintenant deux opérateurs hermitiens A et B. La combinaison linéaire $\alpha A + \beta B$ est un opérateur hermitien, l'exponentielle $e^{i(\alpha A+\beta B)}$ est un opérateur unitaire, et l'on peut former la moyenne

$$\phi(\alpha,\beta) = Q\, e^{i(\alpha A+\beta B)} = \langle e^{i(\alpha A+\beta B)}\psi,\psi\rangle$$

Si A et B commutent, on a aussi

$$e^{i(\alpha A+\beta B)} = e^{i\alpha A}\, e^{i\beta B} .$$

Alors $\phi(\alpha,\beta)$ est la transformée de FOURIER d'une mesure de probabilité à deux variables. C'est la fonction caractéristique du couple (A,B) dans l'état ψ. La situation est la même que celle des couples de fonctions comparables.

Si A et B ne commutent pas, $e^{i(\alpha A+\beta B)}$ constitue une famille, mais non un groupe, d'opérateurs unitaires. Il en résulte que la moyenne

$$\phi(\alpha,\beta) = \langle e^{i(\alpha A+\beta B)}\psi,\psi\rangle$$

n'est pas la transformée de FOURIER d'une mesure de probabilité, sauf peut-être pour certains ψ particuliers. Cependant $\phi(\alpha,\beta)$ peut se calculer, et les deux fonctions $\phi(\alpha,0)$, $\phi(0,\beta)$ sont de véritables fonctions caractéristiques. Cette sorte de pseudo-fonctions caractéristiques a été rencontrée par WIGNER. On en trouvera une étude dans la thèse de J. BASS (1948), dans l'article de 1948 cité en bibliographie, et dans le récent livre de L. de BROGLIE. Pour la construire, on pose

$$\theta(\lambda) = e^{i\lambda(\alpha A+\beta B)\psi}$$

La fonction $\theta(\lambda)$ vérifie l'équation fonctionnelle

$$\frac{\partial\theta}{\partial\lambda} = i(\alpha A+\beta B)\theta \quad , \quad \text{avec } \theta(0) = \psi$$

On a alors

$$\phi(\alpha,\beta) = \langle\theta(1),\theta(0)\rangle .$$

Si par exemple on se place dans l'espace L^2, on est souvent conduit à introduire les deux opérateurs A,B tels que

$$A\psi(x) = x\psi(x), \quad B\psi(x) = \frac{h}{i}\psi'(x) .$$

L'équation ci-dessus devient

$$\frac{\partial\theta}{\partial\lambda} = i\alpha x\theta + h\frac{\partial\theta}{\partial x} .$$

C'est une équation aux dérivées partielles linéaire facile à intégrer. On trouve

$$\phi(\alpha,\beta) = \frac{1}{h\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}\psi(x - \frac{h}{2}\beta)\,\overline{\psi}\,(x + \frac{h}{2}\beta)\,dx .$$

On notera que, si A et B ne commutent pas, il est possible de former d'autres pseudo-fonctions caractéristiques ayant de propriétés analogues, entre autres

$$\langle e^{i\alpha A}\, e^{i\alpha B}\,\psi,\ \psi\rangle \quad \text{et} \quad \langle e^{i\beta B}\, {}^{i\alpha A}\,\psi,\ \psi\rangle .$$

On sait que, lorsque $AB - BA = i\hbar I$, on a

$$e^{i\alpha A}\, e^{i\beta B} = e^{-i\frac{h}{2}\alpha\beta}\, e^{i(\alpha A+\beta B)}$$

Essayons maintenant de préciser la structure de ces fonctions ou pseudo-fonctions caractéristiques. Supposons pour fixer les idées que les opérateurs A et B aient des spectres de raies. Il existe alors deux familles d'opérateurs de projection P_k, Q_ℓ telles que

$$e^{i\alpha A} = \sum_k e^{i\alpha x_k} P_k , \qquad e^{i\beta B} = \sum_\ell e^{i\beta y_\ell} Q_\ell$$

où x_k, y_ℓ sont des nombres réels. Les P_k commutent entre eux, et $\sum_k P_k = I$. De même les Q_ℓ commutent entre eux et $\sum_\ell Q_\ell = I$. Si A et B commutent, chaque P_k commute avec chaque Q_ℓ. Les produits $P_k\, Q_\ell = R_{k\ell}$ constituent une nouvelle famille de projecteurs commutatifs, et

$$\phi(\alpha,\beta) = \sum_{k\ell} e^{i(\alpha x_k + \beta y_\ell)} \langle P_k\, Q_\ell\, \psi, \psi\rangle$$

est une vraie fonction caractéristique.

Si A et B ne commutent pas, il existe des couples P_k, Q_ℓ non commutatifs. On a toujours

$$e^{i\alpha A}\, e^{i\beta B} = \sum_{k\ell} e^{i(\alpha x_k + \beta y_\ell)}\, P_k\, Q_\ell ,$$

mais cette formule ne constitue pas une représentation spectrale, car certains des $P_k\, Q_\ell$ ne sont plus des projecteurs.

Revenons alors à la mécanique pseudo-aléatoire. La fonction f appartient à un espace de HILBERT, dans lequel on suppose pour fixer les idées qu'il existe une base dénombrable $e_0, e_1, \dots, e_n, \dots$, orthonormée. Les e_k sont des fonctions de t telles que

$$M\, e_k\, \overline{e_\ell} = \langle e_k, e_\ell\rangle = \delta_{k\ell}$$

En outre, e_0 représente la fonction qui prend l'unique valeur 1. Si les éléments de cet espace sont multipliables, on peut

écrire $e^{i\alpha f}$ sous la forme

$$e^{i\alpha f} = \sum_k a_k(\alpha)\, e_k .$$

Les coefficients $a_k(\alpha)$ satisfont à des relations caractéristiques, qui sont indépendantes de la fonction f, et ne dépendent que de la table de multiplication des e_k. Si par exemple $e_k\, e_\ell = e_{k+\ell}$, ce qui a lieu lorsque $e_k(t) = e^{ikt}$, on vérifie que, comme conséquence de la relation

$$e^{i(\alpha+\beta)f} = e^{i\alpha f}\, e^{i\beta f} ,$$

on a

$$a_k(\alpha+\beta) = \sum_j a_j(\alpha)\, a_{k-j}(\beta) .$$

Autrement dit, la suite $a(\alpha+\beta)$ est le *produit de convolution* des suites $a(\alpha)$, $a(\beta)$. Pour $\alpha = 0$, $e^{i\alpha f}$ se réduit à e_0, et par conséquent

$$a_0(0) = 1 , \quad a_k(0) = 0 \quad \text{pour } k \geqslant 1 .$$

En prenant la moyenne, on a :

$$\phi(\alpha) = M\, e^{i\alpha f} = a_0(\alpha).$$

Opérons de la même façon pour la fonction g. Si g est comparable à f, elle appartient au même espace de HILBERT. On peut utiliser la même base :

$$e^{i\beta g} = \sum_k b_k(\beta)\, e_k ,$$

D'après la formule de Parseval, on a

$$M\, e^{i(\alpha f + \beta g)} = \langle e^{i\alpha f}, e^{-i\beta g}\rangle = \sum a_k(\alpha)\, b_k(\beta).$$

Si g n'est pas comparable à f, il faut, pour représenter g, une base orthonormée $e'_0, e'_1, \dots, e'_k, \dots$ différente de la base e_k. Il existe des couples e_k, e'_ℓ qui n'ont pas de produit moyen, donc pas de produit scalaire. Cependant on peut identifier e'_0 à e_0, et peut être identifier aussi d'autres couples. On peut représenter le produit des fonctions $e^{i\alpha f}$, $e^{i\beta g}$ par la série

$$e^{i(\alpha f+\beta g)} = \sum_{k\ell} a_k(\alpha)\, b_\ell(\beta)\, e_k\, e'_\ell \quad ,$$

où $e_k\, e'_\ell$ est une fonction de t. Mais cette fonction n'a pas de moyenne, au moins pour certains couples d'indices. On ne peut donc pas utiliser l'opérateur M.

On peut cependant aller plus loin. Soit U(f,g) une forme bilinéaire définie sur l'espace $\mathcal{M}^2$. Supposons que, si f et g appartiennent à un même sous-espace hilbertien, on ait

$$U(f,g) = \langle f,g \rangle = M\,(f\bar{g}) \; .$$

Alors, sans aucune restriction, on a

$$U(e^{i\alpha f}, e^{-i\beta g}) = \sum a_k(\alpha)\, \bar{b}_\ell(\beta)\, u_{k\ell}, \text{ où } u_{k\ell} = U(e_k, \bar{e}'_\ell)$$

La fonction $\phi(\alpha,\beta) = U(e^{i\alpha f}, e^{-i\beta g})$, si incomplètement définie qu'elle soit, semble jouer un rôle analogue à la pseudo-fonction caractéristique de WIGNER.

Pour conclure, on constate que, entre la mécanique quantique et la mécanique pseudo-aléatoire, il existe des analogies telles que les singularités de la mécanique quantique se retrouvent en mécanique pseudo-aléatoire. Or la mécanique pseudo-aléatoire est une mécanique classique du point, plus proche peut-être de la réalité que la mécanique aléatoire. Jusqu'ici, elle apparaît comme une simple cinématique. Il serait souhaitable qu'elle devienne une dynamique. Pour cela, il faudrait découvrir des équations dynamiques contenant des termes non pas stochastiques (ou aléatoires), mais *pseudo-aléatoires*. Dans ces équations, le temps devrait jouer un double rôle, ou figurer de deux façons : un temps local permettant de calculer des moyennes, et un temps relatif à l'évolution macroscopique. Les équations moyennes seraient les équations de la dynamique newtonienne comme en mécanique quan-

tique (théorème d'EHRENFEST). Mais ces équations dynamiques risquent d'être d'une étude difficile, car le couple position-vitesse (x(t) et x'(t)) devrait avoir une structure inhabituelle : sa "loi de probabilité conjuguée" n'existerait pas (bien entendu, si x et x' sont bornées, la moyenne de xx' existe, et est nulle). Or l'étude des systèmes dynamiques n'est peut-être pas assez avancée pour permettre de prévoir et de démontrer des circonstances de ce genre. On sait seulement, grâce à des expériences numériques utilisant des ordinateurs, que les systèmes non linéaires peuvent avoir des solutions très compliquées, très sensibles aux petites variations des conditions initiales, et qui sont parfois qualifiées de solution *chaotiques*, ou même (à tort) de solutions stochastiques.

BIBLIOGRAPHIE

E. ARNOUS, Quelques applications de la théorie des groupes de transformations unitaires en calcul des probabilités et en mécanique quantique, revue scientifique, 3273, 1947.

J. BASS, Lois de probabilité, équations hydrodynamiques et mécanique quantique, revue scientifique, 3299, 1948.

J. BASS, Les fonctions pseudo-aléatoires, mémorial des sciences mathématiques, Gauthier-Villars, 1962.

J. BASS, Stationary functions and their applications to turbulence, journal of mathematical analysis and applications, 47, n° 2 et 3, 1974.

J. BASS, Moyennes et mesures en mécanique quantique et en mécanique classiques, Annales de l'Institut Henri Poincaré, XXXIII, 1980.

L. DE BROGLIE. Les incertitudes d'HEISENBERG et l'interprétation probabiliste de la mécanique ondulatoire, Gauthier-Villars, 1982.

N. WIENER, Generalized harmonic analysis, Acta Mathematica, 55, 1930.