Annales de la Fondation Louis de Broglie,
Vol. 8, n° 4, 1983

SUR UN MONOPÔLE DE MASSE NULLE DÉCRIT PAR L'ÉQUATION
DE DIRAC ET SUR UNE ÉQUATION GÉNÉRALE NON LINÉAIRE
QUI CONTIENT DES MONOPÔLES DE SPIN 1/2 (1ère partie)

par Georges LOCHAK

Fondation Louis de Broglie

1, rue Montgolfier,
F-75003 PARIS

(manuscrit reçu le 20 Mai 1983)

*Ce travail a fait l'objet de deux exposés devant
le Séminaire de la Fondation Louis de Broglie les 12 et 19
Décembre 1983.*

*Résumé : L'équation de Dirac en champ libre possède
deux (et seulement deux) jauges invariantes de la forme $e^{i\Gamma\theta}$.
La première : $e^{i\theta}$ introduit le couplage électromagnétique de
l'électron de Dirac. La seconde : $e^{i\gamma_5\theta}$ n'est valable que
si $m_0 = 0$; elle est connue en théorie du neutrino et généra-
lise la transformation de Salam $\psi \rightarrow \gamma_5\psi$.*

*Nous montrons ici que cette seconde jauge invarian-
te permet d'introduire dans l'équation de Dirac un nouveau cou-
plage électromagnétique minimal qui fait intervenir le courant
axial au lieu du courant polaire habituel. On verra que l'é-
quation ainsi obtenue répond aux lois de symétrie du magnétis-
me libre prévues par Pierre Curie. C'est l'équation d'un mono-
pôle magnétique de masse nulle. Dans l'interaction avec une
charge électrique fixe, on retrouve bien l'intégrale première
de Poincaré et on montre que la relation de Dirac $eg/\hbar c = n/2$*

est une simple conséquence de la condition de continuité des fonctions d'onde.

Le trait le plus remarquable de l'équation est de ne pas entraîner de polarisation du vide, parce que les paires monopôle-antimonopôle sont d'hélicités opposées mais de même charge magnétique : deux monopôles opposés ne sont pas des états d'une même particule et ne peuvent donc être ni créés ni annihilés par paires. Ceci est une conséquence directe du couplage imposé par la loi de jauge et en conformité avec les lois de symétrie de Curie.

Un paragraphe et un appendice sont consacrés à une équation générale non linéaire de spin 1/2 invariante par la même loi de jauge. Elle généralise une équation précédemment proposée par Heisenberg, mais contrairement à cette dernière, elle contient des monopôles.

1. Introduction

Le but du présent article est de montrer qu'il y a place, dans l'équation de Dirac, non seulement pour l'électron et le neutrino, ainsi qu'il est connu, mais encore pour un monopôle magnétique de masse nulle*. Celui-ci résulte de ce que la nullité de la masse confère à l'équation une seconde jauge invariante qui est pseudo-scalaire, au lieu d'être scalaire comme la jauge habituelle. On peut alors introduire un nouveau couplage électromagnétique qui associe le courant axial de l'équation (porté par le vecteur spin) à un pseudo-potential électromagnétique (c'est-à-dire le dual d'un tenseur antisymétrique de rang trois). Les ingrédients de la théorie sont évidemment connus et ils sont notamment utilisés dans la théorie des interactions faibles, mais pour autant que je sache, personne n'a jamais montré qu'on peut ainsi construire l'équation d'un monopôle magnétique. Certes, l'hypothèse d'un monopôle de masse nulle associé au vecteur axial de Dirac a été émise par Salam [1], mais elle semble avoir été abandonnée et la

* On verra au §6 une généralisation non linéaire de cette théorie.

seule référence que j'aie pu trouver par la suite, classe cette idée parmi les "caractéristiques pathologiques" attribuées au monopôle [2] ! L'opinion a, en effet, toujours prévalu que le monopôle devrait être très lourd et cette tendance n'a pu que se renforcer depuis que la seule théorie structurée qui existe, celle de 't Hooft et Polyakov [3][4], a prévu la masse énorme de 10^{16} G ev (10^{-8} g).

Il se peut également que la crainte (d'ailleurs justifiée) que la théorie ne prévoie une très forte polarisation du vide, ait conduit à écarter l'hypothèse d'une masse faible ou a fortiori nulle, alors qu'au contraire une masse élevée diminuerait cette polarisation [5]. Or, précisément, c'est un trait remarquable de la théorie proposée ici, que les monopôles de charges opposées ne sont pas les antiparticules les uns des autres. Une paire monopôle-antimonopôle est constituée de deux monopôles d'hélicités opposées mais de même charge. On ne doit donc attendre ni création, ni annihilation de paires de charges opposées, ni donc de polarisation correspondante du vide.

Cette difficulté étant écartée, plus rien ne s'oppose a priori, à l'hypothèse d'un monopôle obéissant à l'équation qui sera établie plus loin : elle a les bonnes symétries et les bonnes lois du mouvement et elle est l'exacte contrepartie de l'équation de l'électron de Dirac, car il n'existe pas d'autre couplage électromagnétique minimal que ces deux-là.

Le monopôle que je propose est tout à fait différent de celui de 't Hooft et Polyakov mais n'oublions pas que c'est de deux choses l'une : ou il n'existe pas du tout de monopôles et nous serons nombreux à avoir travaillé pour rien ; ou bien il en existe et ils seront aussi nombreux et divers que les particules chargées électriquement.

Dans cet article entièrement consacré à l'exposé d'un résultat, il n'est pas possible de faire beaucoup de rappels généraux, d'autant plus que depuis les fameux articles de Dirac [6][7], environ 3000 autres sont parus. Pour aider les lecteurs auxquels le problème du monopôle serait étranger, nous donnerons cependant quelques points de repère.

Rappelons tout d'abord que le monopôle reste hypothétique et que, malgré les efforts expérimentaux, on ne pense l'avoir vu qu'une seule fois [8], ce qui constitue un encouragement mais non une preuve. Signalons également que l'idée, sinon du monopôle magnétique en tant que particule, tout au moins du magnétisme libre, est très ancienne et remonte au Moyen-Âge. La première description précise des lois de symétrie du magnétisme libre a été donnée par Pierre Curie [9]. Par contre, ce qui appartient à Dirac et qui explique le succès de ses articles, c'est l'idée que s'il existe des charges magnétiques élémentaires g , elles sont liées à la charge électrique élémentaire e par la formule :

$$(1.0) \quad \frac{eg}{hc} = \frac{n}{2} \quad (n \text{ entier}) \quad e = \frac{2\pi}{n} g$$

Nous ne donnerons pas ici le raisonnement de Dirac, mais nous montrerons plus loin que *notre équation entraîne cette relation en vertu des conditions de continuité habituelles de fonctions d'ondes*. La formule (1,0) a d'ailleurs été obtenue de différentes manières que l'on trouvera dans le petit choix de bibliographie que nous donnons maintenant.

On trouvera d'abord des exposés généraux, ou des remarques générales intéressantes, incluses dans des travaux plus particuliers, dans : [6], [7], [9], [10], [11], [12], [13], [14]. Il est intéressant, ensuite, de connaître la description du mouvement d'une charge électrique autour d'un centre coulombien magnétique (ou l'inverse) dans le cadre de la mécanique classique : [15], [16], [17], [18], [19]. Ce problème fait intervenir une intégrale première remarquable : l'*intégrale de Poincaré*, que nous rencontrerons plus loin dans le cas quantique, et qui nécessite, pour en comprendre le sens physique, de calculer le moment angulaire d'un champ électromagnétique, ce qu'on trouvera dans : [11], [16], [20], [21], [22], [23]. Une abondante littérature est consacrée à la description quantique du mouvement d'une charge électrique dans le champ d'un monopôle immobile. En principe ce problème ne devrait avoir aucun intérêt ici puisque nous étudierons les propriétés d'un monopôle de masse nulle et que seul son mouvement autour d'une charge électrique (éventuellement immobile) peut avoir un sens pour nous. Mais en réalité, les lois de symétrie étant les mêmes,

les travaux effectués sur l'autre problème conservent tout leur intérêt. En voici quelques uns : [6], [16], [19], [24], [25], [26], [27], [28].

Quelques remarques sur l'électromagnétisme nous seront indispensables pour ce qui va suivre. On sait qu'un argument en faveur de l'hypothèse du monopôle magnétique réside dans une dissymétrie choquante entre le premier et le second groupe des équations de Maxwell, donc entre :

$$(1.1) \quad \begin{cases} \text{rot } \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \text{div } \vec{E} = 4\pi\rho \end{cases}$$

(où ρ et $\vec{j}$ désignent la densité et le courant de charges électriques) et :

$$(1.2) \quad \begin{cases} \text{rot } \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0 \\ \text{div } \vec{H} = 0 \end{cases}$$

On a évidemment très envie d'introduire une densité et un courant (μ et $\vec{k}$) de charges magnétiques et d'écrire le second groupe sous la forme suivante (où les signes sont, eux aussi, dictés par des raisons de symétrie) :

$$(1.2') \quad \begin{cases} -\text{rot } \vec{E} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{k} \\ \text{div } \vec{H} = 4\pi\mu \end{cases}$$

Une objection classique [10], [11], [12] consiste à remarquer qu'il suffit alors de redéfinir les champs, les densités et les courants par la transformation suivante qui laisse le système (1.1), (1.2') invariant :

$$(1.3) \quad \begin{cases} \vec{E} = \vec{E}' \cos\gamma + \vec{H}' \sin\gamma, \quad \vec{H} = -\vec{E}' \sin\gamma + \vec{H}' \cos\gamma, \\ \rho = \rho' \cos\gamma + \mu' \sin\gamma, \quad \mu = -\rho' \sin\gamma + \mu' \cos\gamma, \\ \vec{j} = \vec{j}' \cos\gamma + \vec{k}' \sin\gamma, \quad \vec{k} = -\vec{j}' \sin\gamma + \vec{k}' \cos\gamma. \end{cases}$$

En choisissant convenablement l'angle γ tel que $\mu = 0$ et $\vec{k} = 0$, on ramènera tout système de la forme (1.1), (1.2') à la forme (1.1), (1.2). L'introduction de charges magnétiques serait donc purement formelle. Mais on peut montrer qu'il n'existe pas de transformation unitaire de l'équation de Dirac qui donne la transformation (1.3) pour les courants électrique et magnétique tels qu'ils seront définis dans ce travail. En outre le raisonnement cité suppose que les fonctions ρ' et μ' d'une part et $\vec{j}'$ et $\vec{k}'$ d'autre part, ne diffèrent que d'un facteur *constant*, ce qui n'a pas de raison d'être a priori.

Si nous adoptons le système (1.1), (1.2'), nous ne pourrions plus nous contenter des seuls potentiels habituels de Lorentz V et $\vec{A}$. Nous devons introduire en outre des nouveaux potentiels* W et $\vec{B}$ qui décriront les champs engendrés par μ et $\vec{k}$ et nous aurons, au lieu des formules habituelles :

$$(1.4) \quad \begin{cases} \vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \text{rot } \vec{B} \\ \vec{H} = \text{rot } \vec{A} + \vec{\nabla}W + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \end{cases}$$

où l'on distingue sans peine la partie du champ qui est engendrée par les charges électriques, de celle qui est engendrée par les charges magnétiques.

Il faut faire ici une remarque capitale qui est curieusement oubliée par la très grande majorité des auteurs. Pour des raisons évidentes d'invariance de (1.2'), $\vec{k}$ est un *vecteur axial* (tandis que $\vec{j}$ est un vecteur polaire) et, de même, μ est un *pseudo-scalaire* (tandis que ρ est un scalaire vrai) : la raison en est que $\vec{H}$ est axial, tandis que $\vec{E}$ est polaire. Ceci a été analysé pour la première fois dans [9] ; on le trouve aussi dans [11]. Mais alors (et ceci n'est jamais dit) l'invariance de (1.4) exige également que $\vec{B}$ soit un *vecteur axial* (tandis que $\vec{A}$ est polaire) ; et de même, W est *pseudo-scalaire* (tandis que V est scalaire).

* Attention : Ne pas confondre $\vec{B}$ avec l'induction magnétique, laquelle ne figure d'ailleurs pas dans nos calculs (car nous opérons toujours dans le vide).

Dans le formalisme relativiste avec $x^\alpha = (\vec{r}, ict)$, nous définirons donc deux quadripotentiels :

$$(1.5) \quad A_\alpha = (\vec{A}, iV) ; \quad i B_\alpha = (\vec{B}, iW)$$

dont seul le second interviendra par la suite ; il est en fait le *dual* d'un tenseur complètement antisymétrique de rang trois :

$$(1.6) \quad B_\alpha = \frac{1}{3!} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} C^{\beta\gamma\delta}.$$

Nous introduirons le tenseur électromagnétique :

$$(1.7) \quad -i\vec{E} = \{F_{k\alpha}\} ; \quad \vec{H} = \{F_{kl}\}$$

et les formules (1.4) s'écriront [29] :

$$(1.8) \quad F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha + \overline{\partial_\alpha B_\beta - \partial_\beta B_\alpha},$$

avec

$$(1.9) \quad \overline{\partial_\alpha B_\beta - \partial_\beta B_\alpha} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \partial^\gamma B^\delta = \partial^\gamma C_{\alpha\beta\gamma}$$

($\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ est complètement antisymétrique avec $\epsilon_{1234} = 1$).

Les équations de Maxwell (1.1), (1.2') s'écriront sous la forme simple :

$$(1.10) \quad \partial^\beta F_{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J_\alpha, \quad J_\alpha = (\vec{j}, i\rho c),$$

$$(1.11) \quad \partial^\beta \overline{F_{\alpha\beta}} = \frac{4\pi}{c} K_\alpha, \quad iK_\alpha = (\vec{k}, i\mu c).$$

D'après (1.8), on voit qu'en réalité seuls les termes en A_α figurent dans (1.10) : A_α est engendré par les charges électriques seules ; de même, seuls les termes en B_α figurent dans (1.11) : B_α est engendré par les charges magnétiques seules. *Mais ceci n'est vrai qu'à la condition expresse que A_α et B_α soient deux fois dérivables et que la formule de Stokes soit applicable.* Toujours sous cette même condition et en imposant la jauge de Lorentz :

$$(1.12) \quad \partial^\alpha A_\alpha = 0, \quad \partial^\alpha B_\alpha = 0,$$

on déduira de (1.8), (1.10), (1.11) :

$$(1.13) \quad \square A_\alpha = -\frac{4\pi}{c} J_\alpha, \quad \square B_\alpha = -\frac{4\pi}{c} K_\alpha.$$

On voit bien que A_α et B_α auront respectivement la parité d'un courant électrique J_α et d'un courant magnétique K_α . Le caractère *énantiomorphe* de la charge magnétique : c'est-à-dire son changement de signe dans un miroir [9], qui apparaît ici, se voit encore mieux sur l'expression de la force de Lorentz exercée sur un pôle magnétique [12], [30] :

$$(1.14) \quad \vec{f} = \mu \vec{H} - \frac{\mu}{c} \vec{v} \times \vec{E}$$

(on remarquera le signe *moins* du second terme). On voit que $\vec{H}$ et $\vec{v} \times \vec{E}$ sont des vecteurs *axiaux* ; or $\vec{f}$ est nécessairement polaire, puisque c'est une force : donc μ doit changer de signe par réflexion. En posant :

$$(1.15) \quad \mu \vec{v} = \vec{k}, \quad iK_\alpha = (k, i\mu c),$$

on aura sous forme relativiste, la formule :

$$(1.16) \quad f_\alpha = -\frac{1}{c} K^\beta \overline{F}_{\alpha\beta}.$$

Les composantes spatiales f_k donnent la force de Lorentz (1.14). La composante de temps f_0 s'écrira :

$$(1.17) \quad icf_0 = \mu \vec{v} \cdot \vec{H},$$

soit encore, d'après (1.14) :

$$(1.18) \quad icf_0 = \vec{v} \cdot \vec{f},$$

ce qui est la *puissance* développée par la force magnétique de Lorentz. On trouvera dans [31] les analogues électriques habituels de (1.16) et de (1.18).

Nous ne dirons ici que quelques mots des fameux

"strings" de Dirac qui ont suscité d'innombrables travaux. Le problème est le suivant. Nous verrons que, dans l'équation du monopôle, celui-ci ne "voit" le monde électromagnétique qu'à travers le seul pseudo-potentiel B_α , de même que les charges électriques ne voient le monde qu'à travers le potentiel A_α . Or si l'on en croit (1.13), un monopôle ne pourrait jamais voir autre chose que d'autres monopôles, puisque B_α ne serait engendré, semble-t-il, que par des charges et des courants magnétiques. Donc (1.13) ne peut pas décrire l'interaction entre un monopôle et un centre électrique coulombien. Revenons à (1.4) et nous verrons pourquoi. Nous aurons en effet, avec $\vec{A} = 0$ et $V = 0$, à résoudre l'équation :

$$(1.19) \quad \text{rot } \vec{B} = e \frac{\vec{r}}{r^3}$$

et nous voyons qu'il ne peut exister aucune solution $\vec{B}$ continue et uniforme : $\vec{B}$ aura nécessairement, quelque part, une ligne singulière (le "string") qui passera par le centre coulombien et qui ira à l'infini, ou alors, il ne pourra pas être représenté dans tout l'espace par *une seule* fonction. C'est Dirac, le premier, qui a vu le problème [6], [7], en traitant, du reste, le cas inverse du nôtre : pour lui c'est une charge électrique qui se déplace autour d'un pôle fixe et c'est aussi le cas que traitent les autres auteurs mais ceci ne change rien à la question.

La ligne singulière ne devrait pas avoir de sens, puisque le champ ne possède pas cette ligne et que, du reste, on peut à son gré la faire tourner ou la déformer par des transformations de jauge [32]. Il faut donc, soit faire en sorte que l'interaction entre une charge électrique et un monopôle magnétique reste insensible à cette singularité soit la faire disparaître par une meilleure représentation des potentiels.

Cette dernière solution a été brillamment développée par T.T. Wu et C.N. Yang [33], [34], en traitant le problème comme une recherche de connexion sur un fibré. On trouvera des applications de ces travaux dans [26] et [27] et on pourra lire dans [35] un exposé vulgarisé particulièrement clair et simple sur le problème des fibrés en physique théorique.

Néanmoins, nous ne suivrons pas la voie tracée par Wu et Yang : nous choisirons le premier terme de l'alternative que nous avons posée, c'est-à-dire que nous admettrons la ligne singulière (comme de nombreux auteurs l'ont fait après Dirac) et nous montrerons qu'en vertu des principes généraux de la mécanique quantique, cette singularité des potentiels n'a pas de répercussion sur les fonctions d'onde, ni donc sur les prévisions physiques de la théorie.

2. Les deux jauges invariantes de l'équation de Dirac

Précisons nos notations. Nous utiliserons d'une part, les coordonnées galiléennes ordinaires x, y, z, t et les matrices α de Dirac :

$$(2.1) \quad \alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, 3, \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix},$$

avec les matrices de Pauli :

$$(2.2) \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les matrices de spin de Dirac, que nous noterons σ'_k , s'écriront :

$$(2.3) \quad \sigma'_k = \sigma'_k \alpha_k = \alpha_k \sigma'_k = \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, 3; \quad \sigma'_4 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

Mais d'autre part, en notations covariantes, avec les coordonnées $x^1, x^2, x^3, x^4 = ict$, nous utiliserons les matrices γ de von Neumann :

$$(2.4) \quad \gamma_k = i\alpha_k, \quad k = 1, 2, 3; \quad \gamma_4 = \alpha_4.$$

Le spineur conjugué sera, comme d'habitude, noté $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_4$ et les matrices de spin seront :

$$(2.5) \quad \Sigma_\mu = i \gamma_\mu \gamma_5, \quad \text{avec } \gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 = \sigma'_4.$$

Dans ces notations, l'équation de la particule libre sera* :

$$(2.6) \quad \gamma^\mu \partial_\mu \psi + \frac{m_0 c}{\hbar} \psi = 0.$$

On sait (et c'est évident) qu'elle est invariante par la transformation de jauge de 1ère espèce :

$$(2.7) \quad \psi \rightarrow e^{i\theta} \psi, \quad \theta = c^{n\text{te}}.$$

D'après le théorème de Noether, cette invariance entraîne la conservation du courant électrique, qu'on peut aussi démontrer directement :

$$(2.8) \quad \partial_\mu J^\mu = 0, \quad J^\mu = i \bar{\psi} \gamma^\mu \psi.$$

Mais si la masse est nulle, l'équation :

$$(2.9) \quad \gamma^\mu \partial_\mu \psi = 0$$

admet une seconde invariance de jauge, par la transformation

$$(2.10) \quad \psi \rightarrow e^{i\gamma_5 \theta} \psi, \quad \theta = c^{n\text{te}}$$

parce qu'on a :

$$(2.11) \quad \gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}, \quad \text{d'où } \gamma_\mu \gamma_5 + \gamma_5 \gamma_\mu = 0.$$

On remarque que si l'on veut que (2.9) reste invariant par une transformation du type $\psi \rightarrow e^{i\Gamma\theta} \psi$, les deux seules solutions sont : $\Gamma = I$, c'est le cas (2.7), et $\Gamma = \gamma_5$, c'est le cas (2.10). Cette seconde invariance est, elle aussi, bien connue [40], [41], [42], [43] et, d'après le théorème de

* Sur l'équation de Dirac, citons parmi d'autres, deux excellents ouvrages : [36] et [37]. Mais je ne résiste pas au plaisir de citer aussi deux monuments anciens : [38] et [39]. On apprend autant chez les uns que chez les autres parce qu'ils n'insistent pas sur les mêmes problèmes.

Noether, elle entraîne une autre loi de conservation, qui se voit d'ailleurs directement, elle aussi :

$$(2.12) \quad \partial_{\mu} K^{\mu} = 0, \quad K^{\mu} = i\bar{\psi} \gamma_{\mu} \gamma_5 \psi.$$

Or, tandis que J^{μ} était un vecteur *polaire*, K^{μ} est *axial* : il est donc un candidat possible en tant que *courant magnétique*, ainsi que Salam l'avait déjà remarqué [1]. Observons d'ailleurs qu'à l'aide de l'équation avec masse (2.6), on pouvait déjà obtenir la relation d'Uhlenbeck et Laporte [38] :

$$(2.13) \quad \partial_{\mu} K^{\mu} + 2 \frac{m_0 c}{\hbar} \Omega_2 = 0, \quad \Omega_2 = -i\bar{\psi} \gamma_5 \psi$$

où Ω_2 est le second invariant de Dirac (qui est un pseudo-scalaire) : (2.12) n'est donc qu'un cas particulier de (2.13).

Mais, dans l'interprétation habituelle de l'équation de Dirac, $\frac{\hbar}{2} K^{\mu}$ est la *densité de spin* : il ne s'agit absolument pas de courant ! De plus, on a les relations [38], [40] :

$$(2.14) \quad J_{\mu} J^{\mu} = \rho^2, \quad K_{\mu} K^{\mu} = -\rho^2, \quad J_{\mu} K^{\mu} = 0$$

avec

$$(2.15) \quad \rho^2 = \Omega_1^2 + \Omega_2^2; \quad \Omega_1 = \bar{\psi} \psi, \quad \Omega_2 = -i\bar{\psi} \gamma_5 \psi.$$

Ω_1 est le premier invariant de Dirac (c'est un scalaire vrai). Or (2.14) veut dire que si J_{μ} est un vecteur du *genre temps*, comme il convient à un courant, par contre K_{μ} est du *genre espace*, ce qui est inacceptable pour un courant : il serait supraluminal. Pourtant, cette objection qui paraît rédhitoire peut être écartée, puisque (2.12) n'a lieu que si $m_0 = 0$. La particule correspondante va donc à la vitesse de la lumière et J^{μ} et K^{μ} se couchent alors tous deux sur le cône de lumière; leurs parties spatiales seront même parallèles l'une à l'autre*

* Ceci ne contredit évidemment pas la 3ième relation (2.14) : deux quadrivecteurs peuvent être orthogonaux tout en ayant leurs parties spatiales parallèles.

les deux courants acquièrent donc même droit de cité et ceci nous suggère le parallèle suivant :

A) Nous savons que l'invariance de l'équation (2.6) par la loi de jauge habituelle (2.7) entraîne la conservation de J^{μ} et le couplage électromagnétique habituel : c'est la théorie de l'électron.

B) Or nous voyons que l'équation (2.9) est aussi invariante par une autre loi de jauge (2.10) qui entraîne la conservation de K^{μ} , qui est un courant *axial* : on est fondé à se demander si ceci n'entraîne pas également un *second couplage électromagnétique* et si, étant donné la variance tensorielle de K^{μ} , la particule ainsi décrite ne serait pas un *monopôle magnétique*.

3. L'équation d'un monopôle de masse nulle

Il est facile de trouver la forme du couplage minimal en introduisant (2.10) dans (2.9) mais avec $\theta = \theta(x^{\mu})$ et on trouve que la seule équation possible est :

$$(3.1) \quad \gamma^{\mu} (\partial_{\mu} + \frac{g}{\hbar c} \gamma_5 B_{\mu}) \psi = 0$$

où $g > 0$ est la valeur absolue de la *charge magnétique* et B_{μ} le potentiel axial défini en (1.5). On vérifie d'abord que $^{\mu}$ l'équation est bien *invariante de jauge de seconde espèce*, c'est-à-dire qu'elle reste invariante dans la transformation :

$$(3.2) \quad \psi + e \frac{i g}{\hbar c} \gamma_5 \phi, \quad B_{\mu} + B_{\mu} + i \partial_{\mu} \phi, \quad \phi = \phi(x_{\mu}).$$

Comme B_{μ} est axial et défini, d'après (1.6), comme dual d'un tenseur complètement antisymétrique de rang 3, la jauge $\phi(x_{\mu})$ est nécessairement *pseudo-scalaire* ; c'est donc le dual d'un tenseur antisymétrique de rang 4 (dont il est l'unique composante non nulle) :

$$(3.3) \quad \phi = \frac{1}{4!} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} T^{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

Soulignons tout de suite un point important concernant la charge. Pour rendre compte du caractère énantiomorphe de la charge magnétique, la mécanique classique n'aurait d'au-

tre ressource que de supposer que la constante de couplage g est pseudoscalaire. Certains auteurs [28] le font même en mécanique quantique. Mais c'est très artificiel : une constante physique est une *nombre*, une fois les unités choisies ; on peut, à la rigueur, y inclure formellement un signe, mais certainement pas une variance tensorielle. Dans l'équation (3.1) ainsi que dans le facteur de phase (3.2), on voit qu'il s'introduit en réalité un *opérateur de charge* :

$$(3.4) \quad G = g \gamma_5$$

et c'est cet opérateur qui est pseudoscalaire. On remarquera que γ_5 est le dual du produit antisymétrique de rang 4 : $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$. Cette représentation de la charge pseudoscalaire par un opérateur est évidemment beaucoup plus conforme à l'esprit de la mécanique quantique. Nous reviendrons sur ce point au § 9.

En tenant compte du fait que B_μ est pseudovectoriel et grâce aux relations d'anticommutation des matrices γ , on voit facilement que l'équation (3.1) est *P* et *T* invariante. En effet, pour la réflexion d'espace, elle ne change pas dans la transformation :

$$(3.5) \quad x_4 \rightarrow x_4, \quad x_k \rightarrow -x_k, \quad B_4 \rightarrow -B_4, \quad B_k \rightarrow B_k, \quad \psi \rightarrow \gamma_4 \psi,$$

et pour l'inversion du temps, on voit que l'équation ne change pas si :

$$(3.6) \quad x_4 \rightarrow -x_4, \quad x_k \rightarrow x_k, \quad B_4 \rightarrow B_4, \quad B_k \rightarrow -B_k, \quad \psi \rightarrow \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \psi.$$

Mais la distinction entre les deux transformations est, en réalité, formelle car on voit facilement que $P = T$, ce qui est une conséquence de ce que $m_0 = 0$.

La propriété la plus importante se trouve dans la *conjugaison de charge*. On s'aperçoit en effet que l'équation (3.1) reste invariante dans la transformation :

$$(3.7) \quad g \rightarrow g, \quad \psi \rightarrow \gamma_2 \psi^* = \gamma_2 \gamma_4 \bar{\psi}^T$$

Autrement dit, on obtient le résultat suivant : *Le signe de la charge magnétique ne change pas dans la conjugaison de charge. Les états à énergie négative se ramènent donc à des états à énergie positive de la même particule. Par contre si $g \rightarrow -g$ dans l'équation (3.1) on obtient l'équation d'une autre particule, qui n'est pas une transformée canonique de l'équation initiale et la particule de charge $-g$ n'est pas l'antiparticule de la particule de charge g .*

Donc, malgré l'invariance de l'équation (3.1) par la transformation (3.7), on ne pourra pas créer ou annihiler des paires de monopôles de charges opposées (à supposer que (3.1) représente un monopôle, mais nous verrons que c'est bien le cas). On peut alors se demander si, malgré l'invariance (3.7), on peut encore dire que la théorie est *C*-invariante. Elle ne l'est peut-être pas au sens naïf du renversement du signe de la charge, mais ce n'est pas cela, on le sait, qui caractérise la conjugaison particule-antiparticule. Nous y reviendrons au § 5.

4. La théorie à deux composantes

Comme $m_0 = 0$, l'équation (3.1) se séparera en deux comme dans le cas du neutrino. Pour cela, écrivons d'abord l'équation en coordonnées x, y, z, t , avec les matrices de Dirac. En tenant compte de $x_4 = ict$, de la seconde relation (1.5) et des relations (2.4) et (2.5), on trouve :

$$(4.1) \quad \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + i \frac{g}{\hbar c} (\sigma_4 W + \vec{\sigma} \cdot \vec{B}) \right] \psi = 0$$

Remarquons au passage que la transformation de jauge (3.2) s'écrit maintenant :

$$(4.2) \quad \psi \rightarrow e^{i \frac{g}{\hbar c} \sigma_4 \phi} \psi, \quad W \rightarrow W + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad \vec{B} \rightarrow \vec{B} - \vec{\nabla} \phi.$$

Si nous introduisons alors des spineurs à deux composantes ϕ, χ, ξ, η , tels que :

$$(4.3) \quad \psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad \phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi + \eta), \quad \chi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi - \eta),$$

l'équation (4.1) se scinde en deux :

$$(4.4) \quad \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} + i \frac{g}{\hbar c} (W + \vec{\sigma} \cdot \vec{B}) \right) \xi = 0$$

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} - i \frac{g}{\hbar c} (W - \vec{\sigma} \cdot \vec{B}) \right) \eta = 0$$

où les σ sont les matrices de Pauli (2.2). On voit tout de suite (en n'oubliant pas que dans $\mathbb{R}^3$, W est un pseudoscalaire et $\vec{B}$ un vecteur axial) que les deux équations (4.4) s'échangent dans les transformations P ou T, tout comme les équations du neutrino. Les transformations P et T s'écrivent ici :

$$(4.5) \quad t \rightarrow t, \quad \vec{x} \rightarrow -\vec{x}, \quad W \rightarrow -W, \quad \vec{B} \rightarrow \vec{B}, \quad \xi \leftrightarrow \eta$$

$$(4.6) \quad t \rightarrow -t, \quad \vec{x} \rightarrow \vec{x}, \quad W \rightarrow W, \quad \vec{B} \rightarrow -\vec{B}, \quad \xi \leftrightarrow \eta,$$

mais on vérifie qu'il s'agit en réalité d'une seule et même transformation : chacune des deux équations est donc trivialement PT-invariante. On vérifie également que les deux équations s'échangent par conjugaison de charge. Plus précisément, elles s'échangent par la transformation :

$$(4.7) \quad g \rightarrow g, \quad \xi \rightarrow \sigma_2 \eta^*, \quad \eta \rightarrow \sigma_2 \xi^*.$$

Les deux monopôles ξ et η sont donc bien l'antiparticule l'un de l'autre, mais avec la même charge car le signe devant g n'a pas changé : ils ont seulement des hélicités opposées, comme le neutrino et l'antineutrino. En rapprochant (4.5), (4.6) et (4.7), on voit en outre que chacune des deux équations (4.4) est CP et CT invariante

Pour une valeur absolue donnée g de la charge magnétique, nous avons donc défini quatre particules :

a) Un couple formé d'un monopôle gauche et d'un monopôle droit, ayant tous deux le même signe de la charge et décrits par les équations (4.4). En reprenant la convention d'hélicité du neutrino [37],[38], nous dirons que c'est l'équation en ξ qui décrit le monopôle et l'équation en η qui

décrit l'antimonopôle. Nous les désignerons respectivement par m^- et $\bar{m}^-$, car nous verrons tout de suite que dans (4.4) la charge magnétique est négative.

b) En changeant dans (4.4) le signe devant g , nous obtiendrons un nouveau couple de monopôles : un gauche et un droit, antiparticule l'une de l'autre, mais encore une fois avec une charge de même signe. Toutefois cette charge est opposée à celle du couple précédent. Nous désignerons ces deux monopôles par m^+ et $\bar{m}^+$ (en conservant bien sûr la même convention d'hélicité) et insistons encore une fois sur le fait qu'ils ne sont pas les antiparticules du couple $m^-, \bar{m}^-$. Tandis que le positron peut être regardé comme un électron dans un état à énergie négative, il n'en est plus de même ici et, par exemple, m^+ et m^- ne sont pas deux états d'une même particule (et de même, bien sûr, pour $\bar{m}^+$ et $\bar{m}^-$).

On arrive donc à cette situation paradoxale que, bien que la loi de jauge (3.2) ou (4.2) introduise, conformément aux idées de Pierre Curie, un opérateur de charge énantiomorphe (3.4) (qui change donc de signe avec les transformations P ou T), cette même loi de jauge nous impose en même temps un couplage électromagnétique qui possède cette propriété remarquable que, lorsqu'on observera le comportement du monopôle dans un champ, les transformations P ou T nous apparaîtront seulement à travers un changement de signe de l'hélicité et non pas de la charge. Et cette dernière ne changera même pas dans la transformation C.

5. L'approximation de l'optique géométrique et la loi de force de Lorentz

Avant de résoudre des problèmes quantiques, il est intéressant de montrer que les équations (4.4) redonnent bien, à la limite de l'optique géométrique, le comportement d'un pôle magnétique. Il suffit d'appliquer la méthode WKB adaptée par Pauli à l'équation de Dirac [44][45]. Nous prendrons, par exemple, l'équation (4.4) en ξ avec :

$$(5.1) \quad \xi = a e^{\frac{i}{\hbar} S},$$

où a est un spineur à deux composantes, et nous conserverons

les termes d'ordre zéro en $\hbar$:

$$(5.2) \quad \left[\frac{1}{c} \left(\frac{\partial S}{\partial t} + gW \right) - \left(\vec{\nabla} S - \frac{g}{c} \vec{B} \right) \cdot \vec{\sigma} \right] a = 0.$$

C'est un système du premier ordre homogène en a . Pour avoir une solution non triviale, il faut annuler le déterminant :

$$(5.3) \quad \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} + gW \right)^2 - \left(\vec{\nabla} S - \frac{g}{c} \vec{B} \right)^2 = 0.$$

On reconnaît une équation de Jacobi à masse nulle. Nous définirons l'énergie cinétique, l'impulsion et le moment de Lagrange par :

$$(5.4) \quad \mathcal{E} = - \frac{\partial S}{\partial t} - gW, \quad \vec{p} = \vec{\nabla} S - \frac{g}{c} \vec{B}, \quad \vec{P} = \vec{\nabla} S.$$

et le hamiltonien s'écrira :

$$(5.5) \quad \mathcal{H} = c \sqrt{\left(\vec{P} - \frac{g}{c} \vec{B} \right)^2} + gW.$$

Un calcul classique [46] donne alors :

$$(5.6) \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = -g \left(\vec{\nabla} W + \frac{g}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) + \frac{g}{c} \vec{v} \times \text{rot } \vec{B}.$$

Si, maintenant, on introduit les formules (1.4) avec $\vec{A} = 0$ et $V = 0$, on trouve* :

$$(5.7) \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = -g \vec{H} + \frac{g}{c} \vec{v} \times \vec{E}$$

et cette fois-ci on reconnaît la force de Lorentz appliquée à une charge magnétique $-g$, comme nous l'annoncions. La différence avec (1.14) réside en ce que g est une valeur absolue. Introduisons maintenant, dans la seconde équation (4.4) :

$$(5.8) \quad \eta = b e^{\frac{i}{\hbar} S}$$

où b est un nouveau spineur. Nous aurons, à l'ordre zéro en $\hbar$:

$$(5.9) \quad \left[\frac{1}{c} \left(\frac{\partial S}{\partial t} - gW \right) + \left(\vec{\nabla} S + \frac{g}{c} \vec{B} \right) \cdot \vec{\sigma} \right] b = 0.$$

* Voir page suivante.

C'est la transformée de (5.2) par la transformation P ou T, donnée par (4.5) ou (4.6), ainsi qu'on devait s'y attendre. Par contre, on peut être surpris de ce que l'équation (5.9) ne s'obtienne pas à partir de l'équation (5.2) par la transformation C définie par (4.7) et appliquée au spineur a : en effet si on fait $a \rightarrow \sigma_2 b^*$ dans (5.2), il faut aussi que $g \rightarrow -g$ pour retrouver l'équation (5.9) en b . Autrement dit, on semble retrouver la conjugaison de charge habituelle. Mais c'est erroné parce que la transformation C doit s'appliquer à ξ et η et non pas à a et b , si bien que la transformation (4.7), exprimée en termes de a et de b , nous donnera, d'après (5.1) et (5.8) :

$$(5.10) \quad g \rightarrow -g, \quad a \rightarrow \sigma_2 b^*, \quad b \rightarrow \sigma_2 a^*, \quad S \rightarrow -S.$$

On voit donc que ce n'est pas la charge, mais la phase qui change de signe dans la transformation C. Ce changement de signe de la phase caractérise du reste la conjugaison de charge en général et n'est pas du tout spécifique de la présente théorie. En particulier, on aurait trouvé le même problème dans la théorie de l'électron de Dirac (dans laquelle la charge électrique change de signe). Ceci veut dire que le changement de signe de la phase, quand on passe de la particule à l'antiparticule, est beaucoup plus général que le changement de signe de la charge (on en a ici un exem-

* Bien entendu, comme la masse est nulle, la vitesse $\vec{v}$ est sur le cône de lumière. Nous ne pourrions plus écrire $\vec{p} = m \vec{v}$, mais la formule $\vec{p} = \frac{\mathcal{E}}{c^2} \vec{v}$ restera valable. Or, si $\vec{H} = 0$, on a $\mathcal{E} = c n_{te}$ de même que, pour une charge électrique, on a $\mathcal{E} = c n_{te}$ quand $\vec{E} = 0$ [46]. Donc si $\vec{H} = 0$, l'équation du mouvement se simplifie beaucoup ; par exemple si $\vec{E}$ est un champ électrique coulombien, on aura :

$$(5.7') \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\lambda}{r^2} \vec{v} \times \vec{r} \quad (\lambda = \frac{egc}{\mathcal{E}}).$$

Ceci n'est autre que l'équation de Poincaré (voir [15] à [19]) qu'il a trouvée en cherchant à décrire les trajectoires des rayons cathodiques autour d'un pôle d'aimant (effet Birkeland).

ple évident) et c'est même lui qui caractérise la transformation C. En somme, quand on dit avec Feynman : "Une antiparticule, c'est une particule qui remonte le cours du temps", on n'exprime rien d'autre que cette idée, sous une forme un peu paradoxale mais très frappante.

Par contre, pour créer ou annihiler une paire particule-antiparticule, il faut évidemment que les charges soient opposées, sinon on violerait la conservation de la charge.

Mais revenons à (5.9). L'annulation du déterminant s'écrira ici :

$$(5.11) \quad \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} - gW \right)^2 - \left(\vec{\nabla} S + \frac{g}{c} \vec{B} \right)^2 = 0$$

cette nouvelle équation de Jacobi paraît s'obtenir à partir de (5.3) en faisant $g \rightarrow -g$, mais nous venons de voir que la vraie transformation est $S \rightarrow -S$ et on posera donc au lieu de (5.4) :

$$(5.12) \quad \mathcal{E} = \frac{\partial S}{\partial t} - gW, \quad \vec{p} = -\vec{\nabla} S - \frac{g}{c} \vec{B}, \quad \vec{P} = -\vec{\nabla} S,$$

après quoi nous retrouverons exactement les *mêmes* équations du mouvement et nous ne saurons pas distinguer entre le monopôle et l'antimonopôle. Ceci est bien normal, puisqu'ils ne se distinguaient que par l'hélicité et que celle-ci s'est perdue en chemin, dans l'approximation de l'optique géométrique ; sans doute est-il possible de la récupérer, même à cette approximation, comme de Broglie l'a montré pour l'électron en étudiant la mesure du spin [45], mais nous en restons là.

6. L'équation non-linéaire la plus générale restant invariante par rapport à la jauge en γ_s

Une fois admise la jauge (2.10), on peut remarquer que l'équation de Dirac sans masse (2.9) n'est pas la seule que cette jauge laisse invariante. Pour le voir, écrivons (2.10) un peu autrement (pour l'élégance des formules) :

$$(6.1) \quad \psi + \psi' = e^{i\gamma_s \frac{\theta}{2}} \psi$$

et voyons comment se transformeront les principaux tenseurs définis en théorie de Dirac.

Tout d'abord, on vérifie que le vecteur J_μ (2.8) et le pseudo-vecteur K_μ (2.12) sont *invariants par la transformation* (6.1). Mais par contre, l'invariant et le pseudo-invariant relativistes Ω_1 et Ω_2 définis en (2.15) se transformeront par (6.1) en deux nouveaux invariants relativistes Ω'_1, Ω'_2 selon la loi facile à vérifier :

$$(6.2) \quad \begin{pmatrix} \Omega'_1 \\ \Omega'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{pmatrix}.$$

Donc la jauge fait "tourner" le "vecteur" (Ω_1, Ω_2) d'un angle θ et ceci rejaillira sur le tenseur antisymétrique $M_{\mu\nu} = \psi \gamma_\mu \gamma_\nu \psi$ en raison de la formule de Pauli-Kofinck [40] :

$$(6.3) \quad \rho^2 M_{\mu\nu} = \Omega_1 (J_\mu K_\nu - J_\nu K_\mu) - \Omega_2 (J_\mu K_\nu - J_\nu K_\mu),$$

où ρ^2 est défini par (2.15). On voit donc que le moment électromagnétique (6.3) "tournera" lui aussi, dans une transformation de jauge (6.1), d'un angle θ .

Mais nous n'utiliserons, pour le moment, que (6.2). Cette relation remarquable montre que la norme du "vecteur" (Ω_1, Ω_2) , c'est-à-dire $\Omega_1^2 + \Omega_2^2$, est *le seul invariant relativiste qui reste également invariant par la transformation de jauge* (2.10) ou (6.1). Et c'est bien le seul, car en vertu de (2.14) on ne pourra pas en construire d'autres, du moins tant qu'on ne considère pas de tenseurs faisant intervenir des *dérivées*.

On voit donc qu'en nous limitant, pour l'instant, à ce type de tenseurs, l'équation relativiste de spin 1/2 la plus générale qui reste invariante dans la jauge (2.10) est :

$$(6.4) \quad \left[\gamma_\mu \left(\partial_\mu + \frac{g}{\hbar c} \gamma_s B_\mu \right) + \frac{1}{2} m (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) (\Omega_1 - i\Omega_2 \gamma_s) \right] \psi = 0$$

où $m(\rho^2)$ est une *fonction scalaire quelconque*. On trouve facilement cette équation en ajoutant une fonction scalaire de ρ^2

au lagrangien de (3.1).

Il est à la fois évident, grâce au théorème de Noether, et facile de vérifier que (6.4) entraîne, tout comme (3.1), la conservation (2.12) du courant pseudo-scalaire K_μ , c'est-à-dire du courant magnétique, alors qu'un terme de masse linéaire aurait entraîné la relation d'Uhlenbeck et Laporte (2.13). Par contre, la seconde relation (2.14) ne dégénérera pas (sauf exception) en $K_\mu K^\mu = 0$ et le vecteur K_μ sera donc, en général, non pas isotrope, mais du genre espace, ce qui pose un problème. Mais nous verrons un peu plus loin que le problème se pose déjà, en réalité, pour le monopôle linéaire (3.1) et nous verrons comment on peut y répondre.

Voyons maintenant les invariances C,P,T. En appliquant à (6.4) la transformation (3.5), on voit tout de suite que (6.4) est P-invariante. Par contre, la transformation (3.6) change le signe du terme non linéaire dans (6.4) : donc l'équation (6.4) n'est pas T-invariante. En outre, la transformation (3.7) produit sur (6.4) le même changement de signe que la transformation T et on voit donc que (6.4) n'est pas C-invariante. Mais en revanche, il s'ensuit que (6.4) est CT-invariante et sans changement de signe de la charge g (voir la définition (3.7) où : $g \rightarrow g$). Il semble donc qu'ici non plus on ne doit pas attendre de polarisation du vide, exactement comme dans le cas linéaire : la particule de charge $-g$ n'est pas l'antiparticule d'une particule de charge $+g$. Bien entendu, on voit que l'invariance CPT est préservée.

Ecrivons maintenant (6.4) en notations de Dirac (2.1), (2.2), (2.3). On trouve :

$$(6.5) \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + i \frac{g}{\hbar c} (\sigma_1 W + \vec{\sigma} \cdot \vec{B}) + \frac{1}{2} m(\rho^2) [\Omega_1 \alpha_4 + \Omega_2 \alpha_5] \right] \psi = 0$$

avec, rappelons-le :

$$(6.6) \rho^2 = \Omega_1^2 + \Omega_2^2 ; \Omega_1 = \psi^+ \alpha_4 \psi ; \Omega_2 = \psi^+ \alpha_5 \psi = \psi^+ \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \psi$$

En introduisant, comme dans (4.3) les spineurs à deux composantes ξ et η , on trouve :

$$(6.7) \Omega_1 = \xi^+ \eta + \eta^+ \xi, \Omega_2 = i(\xi^+ \eta - \eta^+ \xi), \rho^2 = 4(\xi^+ \eta)(\eta^+ \xi) ;$$

quant à (6.5), elle s'écrit facilement :

$$(6.8) \frac{1}{c} \frac{\partial \xi}{\partial t} - \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \xi + i \frac{g}{\hbar c} (W + \vec{\sigma} \cdot \vec{B}) \xi + i m [4|\xi^+ \eta|^2] (\eta^+ \xi) \eta = 0$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \eta - i \frac{g}{\hbar c} (W - \vec{\sigma} \cdot \vec{B}) \eta + i m [4|\xi^+ \eta|^2] (\xi^+ \eta) \xi = 0$$

En comparant avec (4.4) on aperçoit, comme on pouvait s'y attendre, le couplage non linéaire entre les composantes ξ et η . Et on aperçoit aussi, immédiatement, une importante propriété de ce couplage : il disparaît si $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$, ce qu'on voyait évidemment sur (6.4) ou (6.5), mais ici cette double condition prend la forme simple :

$$(6.9) \xi^+ \eta = 0$$

Or ceci n'arrive que dans trois cas :

$$(6.10) \xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \text{ou} \quad \xi = \sigma_2 \eta^*$$

la dernière égalité n'ayant lieu qu'à un facteur de phase près qui est sans importance.

Autrement dit, les solutions du système non linéaire (6.8) se réduisent alors à des solutions du système linéaire (4.4) et les trois cas se ramènent en fait à deux :

1) Le cas d'un monopôle d'hélicité définie qui obéit donc à l'une des équations (4.4).

2) Le cas d'une paire monopôle-antimonopôle, c'est-à-dire d'un couple de solutions ξ et η conjuguées de charge, du système (4.4), donc de deux monopôles d'hélicités contraires mais de même charge.

Ces deux cas sont les seuls où, d'après (2.14), les deux quadrivecteurs J_μ et K_μ sont isotropes et se couchent donc, comme nous le disions, sur le cône de lumière. Dans tous les autres cas, le vecteur courant magnétique K_μ sera du genre espace et c'était déjà, en fait, le cas pour les équations linéaires (3.1) et (4.1), mais le problème disparaissait parce que la linéarité et la masse nulle permettaient le découplage

(4.4). Or, sur chacune des équations (4.4), il n'apparaît qu'un seul courant, soit respectivement pour chacune des deux équations :

$$(6.11) \quad (\xi^+ \xi, \xi^+ \sigma \xi) \text{ et } (-\eta^+ \eta, \eta^+ \sigma \eta);$$

et chacun de ces courants est isotrope, ainsi qu'on le vérifie aisément à l'aide de (2.2).

On vérifie par ailleurs que, d'après (2.12) et (4.3), on peut mettre K_μ sous la forme* :

$$(6.12) \quad K_\mu = \xi^+ \xi - \eta^+ \eta, \quad \{K_j\} = \xi^+ \sigma_j \xi + \eta^+ \sigma_j \eta,$$

c'est-à-dire que K_μ est la somme des deux courants isotropes (6.11). Donc K_μ sera lui-même isotrope dans les deux cas suivants :

1) Soit si l'un de deux courants est nul : c'est le cas de l'hélicité définie.

2) Soit si les deux courants sont orthogonaux et on montre facilement que c'est le cas de la conjugaison de charge ; mais on montre alors que $K_\mu = 0$: le courant magnétique total est nul.

Nous allons, maintenant, revenir au cas linéaire, c'est-à-dire au système (4.4), que nous intégrerons dans le cas d'un champ électrique coulombien.

La suite de ce travail paraîtra aux Annales de la Fondation Louis de Broglie Vol. 9, n° 1, 1984.

* Cette décomposition n'est pas liée au problème du monopôle et constitue une identité en théorie de Dirac.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Salam, *Physics Letters*, 22, 683, 1966
- [2] Ph.H. Eberhard, R.R. Ross, L.W. Alvarez, *Phys. Rev. D*, 4, 3260, 1971
- [3] G.'t Hooft, *Nucl. Phys. B*, 79, 276, 1974
- [4] A.M. Polyakov, *J.E.T.P. Lett.* 20, 194, 1974
- [5] G. Wentzel, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* 37-38, 163, 1966
- [6] P.A.M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.*, A133, 60, 1931
- [7] P.A.M. Dirac, *Phys. Rev.*, 74, 817, 1948
- [8] B. Cabrera, *Phys. Rev. Lett.*, 48, 1378, 1982
- [9] P. Curie, *J. Phys. 3e série*, t.III, 415, 1894
- [10] B. Cabrera, W.P. Trower, *Found. of Phys.* 13, 195, 1983
- [11] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Wiley, N.Y., 1975
- [12] H. Harrison, N.A. Krall, O.C. Eldridge, F. Fehsenfeld, W.L. Fite, W.B. Teutsch, *Amer. J. of Phys.* 31, 249, 1963
- [13] R.H. Carrigan, *Nuovo. Cim.* 38, 638, 1965
- [14] E. Amaldi, in "Old and New Problems in Elementary Particles", Ed. G. Puppi, Acad. Press. N.Y. 1968
- [15] H. Poincaré, *Comptes rendus* 123, 530, 1896
- [16] M. Fierz, *Helv. Phys. Acta*, 17, 27, 1944
- [17] I.R. Lapidus, J.L. Pietenpol : *Ann. J. Phys.*, 28, 17, 1960
- [18] G. Nadeau, *Ann. J. Phys.*, 28, 556, 1960
- [19] A.S. Goldhaber, *Phys. Rev. B* 140, 1407, 1965
- [20] J.J. Thomson, *Elements of the Mathematical Theory of Electricity and Magnetism*, Camb. Univ. Press, 1904
- [21] M.N. Saha, *Ind. J. Phys.* 10, 145, 1936
- [22] M.N. Saha, *Phys. Rev.*, 75, 1968, 1949
- [23] H.A. Wilson, *Phys. Rev.*, 75, 309, 1949
- [24] I. Tamm, *Z. Physik*, 71, 141, 1931

- [25] P.P. Banderet, Helvet. Phys. Acta, 19, 503, 1946
- [26] Y. Kazama, C.N. Yang, A.S. Goldhaber, Phys. Rev. D, 15, 2287, 1977
- [27] K.S. Cheng, J. Math. Phys. 18, 746, 1977
- [28] W.A. Barker, F. Graziani, Phys. Rev. D, 18, 3849, 1978
- [29] N. Cabibbo, G. Ferrari, Nuovo. Cim., 23, 1147, 1962
- [30] A. Sommerfeld, Elektrodynamik, Akad. Verlag., Leipzig, 1949
- [31] A. Lichnerowicz, Eléments de calcul tensoriel, Armand-Colin, Paris, 1958
- [32] A. Frenkel, P. Hrasho, Ann. of Phys. (USA), 105, 288, 1977
- [33] T.T. Wu, C.N. Yang, Phys. rev. D 12, 3845, 1975
- [34] T.T. Wu, C.N. Yang, Nuclear Phys. B, 107, 365, 1976
- [35] I.M. Singer, Physics Today, march 1982
- [36] J.J. Sakurai, Advanced Quantum Mechanics, Addison-Wesley, Reading, USA, 1980
- [37] A.I. Akhiezer, V.B. Berestetsky, Quantum Electrodynamics, Interscience, N.Y., 1965
- [38] L. de Broglie, L'électron magnétique, Hermann, Paris 1934
- [39] A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien, II Band, Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1951
- [40] T. Takabayasi, Prog. Theor. Phys. Suppl. 4, 1957
- [41] B. Touschek, Nuovo Cim. 5, 1281, 1957
- [42] P. Matthews, The relativistic quantum theory of elementary particle interactions, Lectures at Rochester, N.Y. 1957
- [43] W. Pauli, Nuovo Cim. 6, 204, 1957
- [44] W. Pauli, Helvetica Phys. Acta, 5, 179, 1932
- [45] L. de Broglie, La théorie des particules de spin 1/2, Gauthier-Villars, Paris, 1952
- [46] L.D. Landau, E.M. Lifschitz, La théorie du champ, Ed. Moscou, 1960.

(La suite de la bibliographie sera publiée avec la seconde partie de l'article).