Annales de la Fondation Louis de Broglie,
Vol. 9, n° 1, 1984

SUR UN MONOPÔLE DE MASSE NULLE DÉCRIT PAR L'ÉQUATION DE DIRAC ET SUR UNE ÉQUATION GÉNÉRALE NON LINÉAIRE QUI CONTIENT DES MONOPÔLES DE SPIN 1/2 (2ème partie)

(voir la 1ère partie dans le Vol. 8, n° 3, p. 345, 1983)

par Georges LOCHAK

Fondation Louis de Broglie

1, rue Montgolfier,
F-75003 PARIS

(manuscrit reçu le 20 Septembre 1983)

Ce travail a fait l'objet de deux exposés devant le Séminaire de la Fondation Louis de Broglie les 12 et 19 Décembre 1983.

Résumé : On a montré, dans la 1ère partie de ce travail, que l'équation de Dirac sans terme de masse admet un second couplage électromagnétique minimal qui permet de décrire un monopôle magnétique de masse nulle. L'équation ainsi obtenue obéit exactement aux lois de symétrie du magnétisme libre énoncéespar Pierre Curie. En particulier la charge magnétique y est représentée, conformément à ces lois, par un opérateur pseudoscalaire, mais l'interaction électromagnétique est telle que, malgré cela, un monopôle et son antimonopôle se comportent comme des particules d'hélicités opposées mais de même charge. Il s'ensuit que deux monopôles de charges magnétiques opposées ne sont pas des états d'une même particule : ils ne peuvent donc être ni créés ni annihilés par paires et la théorie n'implique pas de polarisation du vide.

Dans cette 2ème partie de l'article, on intègre l'équation du monopôle de masse nulle dans un champ électrique

coulombien. On retrouve l'intégrale première de Poincaré et on retrouve aussi la relation de Dirac $eg/\hbar c = n/2$, comme une simple conséquence de la condition de continuité des fonctions d'onde et de l'invariance par rapport au groupe des rotations. Les résultats obtenus sont en accord avec ceux connus sur le problème inverse (diffusion d'une charge électrique par un monopôle infiniment lourd). Mais on montre la différence radicale qui existe entre la description de la charge magnétique par un opérateur, c'est-à-dire par un q-nombre, comme on le fait ici, et sa description par un c-nombre comme l'ont fait d'autres auteurs. La description par un q-nombre apparaît comme étant la seule valable.

En conclusion de l'article, on propose l'hypothèse selon laquelle les monopôles de masse nulle seraient non pas des particules rares dans la nature, mais au contraire des particules très abondantes et constitueraient un "éther". On donne des arguments en faveur de cette hypothèse : il semble, en effet, que l'homogénéité d'un tel éther le rendrait difficilement observable et que le problème serait, précisément, de créer une inhomogénéité suffisamment forte et durable pour qu'on puisse observer ces monopôles.

Dans un Appendice, on revient sur l'équation non linéaire proposée dans la 1ère partie et on la compare à une équation anciennement proposée par Heisenberg. On montre également comment l'ensemble de ce travail vient compléter une interprétation de l'équation de Dirac précédemment développée par l'auteur et comment tout ceci trouve sa place dans l'interprétation non linéaire de la mécanique ondulatoire par Louis de Broglie.

7. Le monopôle de masse nulle dans un champ électrique coulombien. Les fonctions angulaires

Comme nous l'avons dit, le premier problème est de résoudre l'équation (1.19) et nous admettrons une solution singulière, à savoir W = 0 et :

$$(7.1)\quad B_x = \frac{e}{r}\,\frac{yz}{x^2+y^2}\ ,\quad B_y = \frac{e}{r}\,\frac{-xz}{x^2+y^2}\ ,\quad B_z = 0\quad (r = \sqrt{x^2+y^2+z^2})$$

A l'aide des angles polaires, nous aurons :

$$(7.2)\quad B_x = \frac{e\sin\phi}{r\,\mathrm{tg}\,\theta},\quad B_y = \frac{-e\cos\phi}{r\,\mathrm{tg}\,\theta},\quad B_z = 0\ ,$$

avec : $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$, (bien entendu, cet angle θ n'a aucun rapport avec celui de (2.10)).

Cette solution se rencontre parfois [28], mais la plupart des auteurs conservent plutôt celle qui avait été initialement donnée par Dirac [6] :

$$(7.3)\quad B'_x = \frac{e}{r}\,\frac{-y}{r+z}\ ,\quad B'_y = \frac{e}{r}\,\frac{x}{r+z}\ ,\quad B'_z = 0\ ,$$

soit, en coordonnées polaires :

$$(7.4)\quad B'_x = -\frac{e}{r}\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}\sin\phi,\quad B'_y = \frac{e}{r}\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}\cos\phi,\quad B'_z = 0.$$

Bien entendu, toutes les solutions ne diffèrent que d'une *jauge**. En particulier, on a ici :

$$(7.5)\qquad \vec{B} - \vec{B}' = \vec{\nabla}\,\mathrm{Arctg}\,\frac{y}{x}\ .$$

Cependant, le choix de la solution n'est pas tout à fait indifférent. En effet, $\vec{B}$ doit être un vecteur *axial*, c'est-à-dire que $\vec{B}$ reste *invariant par parité*, ce qui est le cas pour le vecteur (7.1), alors que la solution (7.3) de Dirac n'a pas de parité définie. Ceci se comprend d'après (7.5), puisque $\vec{\nabla}\,\mathrm{Arctg}\,\frac{y}{x}$ change de signe par réflexion de l'espace, si bien que $\vec{B}'$ est la somme d'un vecteur axial et d'un vecteur polaire.

Nos équation seront donc obtenues en introduisant W = 0 et (7.1) dans le système (4.4). En utilisant les angles

---

* Outre [33] sur lequel je me permets d'insister encore, on pourra lire à ce propos le très bel article [32], sur le problème des symétries en général et de la jauge en particulier.

polaires et (7.2), on trouve :

$$(7.6)\quad \begin{cases} \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \vec{\sigma}.\vec{\nabla} - i\,\frac{D}{r\ \mathrm{tg}\theta}\,\sigma_2\, e^{i\sigma_3\phi}\right)\xi = 0 \\ \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\sigma}.\vec{\nabla} - i\,\frac{D}{r\ \mathrm{tg}\theta}\,\sigma_2\, e^{i\sigma_3\phi}\right)\eta = 0 \end{cases} \qquad \left(D = \frac{eg}{\hbar c}\right)$$

Nous désignerons par D, *du nom de Dirac*, la constante sans dimension qui figure dans la relation (1.0) (que nous retrouverons plus loin).

Nous devons maintenant rechercher l'intégrale première du moment cinétique du monopôle. En fait, elle est connue depuis longtemps puisque c'est nécessairement la même que celle du mouvement d'une charge électrique autour d'un pôle magnétique fixe ; on la trouvera par exemple dans [26] ou [28], où il est tenu compte du spin, et dans de nombreux articles où l'on ne fait pas intervenir le spin : par exemple [16] ou [34]. Pour obtenir cette intégrale première, il suffit de savoir que Poincaré a trouvé, pour l'équation (5.7'), l'intégrale* :

$$(7.7)\qquad \vec{J} = \vec{r}\times\vec{v} + \lambda\,\frac{\vec{r}}{r}\ ;$$

alors, en tenant compte de la définition (5.4) de l'*impulsion cinétique*, en prenant garde aux signes et en ajoutant le spin du monopôle, on trouve les deux opérateurs suivants qui s'échangent simplement par $D \to -D$:

$$(7.8)\qquad \vec{J}_\xi = \hbar\left[\vec{r}\times(-i\vec{\nabla} - D\vec{B}) - D\,\frac{\vec{r}}{r} + \frac{1}{2}\vec{\sigma}\right],$$

$$(7.9)\qquad \vec{J}_\eta = \hbar\left[\vec{r}\times(-i\vec{\nabla} + D\vec{B}) + D\,\frac{\vec{r}}{r} + \frac{1}{2}\vec{\sigma}\right],$$

où $\vec{B}$ a les expressions (7.1), mais sans le facteur de charge e qui a été inclus dans D.

---

*Comme je l'ai dit allusivement dans l'introduction, le second terme de (7.7) a été interprété comme le moment cinétique du champ électromagnétique, qui vient donc s'ajouter au moment orbital. Voir : [11],[16] et [20] à [23].

D'autre part, pour une charge électrique e donnée, on définit à partir de (4.4) les quatre hamiltoniens suivants, correspondant aux deux signes de l'hélicité et de la charge magnétique g :

$$(7.10)\quad \mathcal{H}^- = \hbar c\ \vec{\sigma}.(i\vec{\nabla} + D\vec{B}) \qquad \text{(monopôle } m^-)$$

$$(7.11)\quad \mathcal{H}^- = \hbar c\ \vec{\sigma}.(-i\vec{\nabla} + D\vec{B}) \qquad \text{(monopôle } \overline{m}^-)$$

$$(7.12)\quad \mathcal{H}^+ = \hbar c\ \vec{\sigma}.(i\vec{\nabla} - D\vec{B}) \qquad \text{(monopôle } m^+)$$

$$(7.13)\quad \mathcal{H}^+ = \hbar c\ \vec{\sigma}.(-i\vec{\nabla} - D\vec{B}) \qquad \text{(monopôle } \overline{m}^+)$$

On trouve alors les relations suivantes :

$$(7.14)\qquad [\vec{J}_\xi, \mathcal{H}^-] = 0\ ,\qquad [\vec{J}_\xi, \mathcal{H}^+] = 0$$

$$(7.15)\qquad [\vec{J}_\eta, \mathcal{H}^-] = 0\ ,\qquad [\vec{J}_\eta, \mathcal{H}^+] = 0\ .$$

Autrement dit, $\vec{J}_\xi$ est intégrale première pour les monopôles m^- et $\overline{m}^+$, tandis que $\vec{J}_\eta$ est intégrale première pour les monopôles $\overline{m}^-$ et m^+. En outre, on vérifie que les composantes de $\vec{J}$ (aussi bien pour $\vec{J}_\xi$ que pour $\vec{J}_\eta$) vérifient les relations de commutation d'un moment cinétique :

$$(7.16)\quad [J_2,J_3] = i\hbar\, J_1,\quad [J_3,J_1] = i\hbar\, J_2,\quad [J_1,J_2] = i\hbar\, J_3.$$

<u>Remarque</u> : dans les travaux cités, où apparaît cette intégrale <u>première</u> $\vec{J}$, le problème est toujours plus simple parce que le rôle de *l'hélicité* du monopôle n'apparaît pas. Il n'y a donc qu'une seule intégrale première et un seul hamiltonien. En outre, ne l'oublions pas, c'est le mouvement d'une charge électrique autour d'un monopôle fixe que traitent ces travaux, problème qui n'aurait évidemment pas de sens pour un monopôle de masse nulle.

L'étape suivante sera de trouver les états propres de $\vec{J}^2$ et de l'une des composantes de $\vec{J}$ (nous choisirons J_3). Pour cela, nous prendrons seulement l'un des opérateurs $\vec{J}_\xi$ ou $\vec{J}_\eta$ (par exemple $\vec{J}_\xi$), puisque l'autre s'ensuit aussitôt, et nous écrirons :

(7.17) $\vec{J} = \hbar(\vec{\Lambda} + \frac{1}{2}\vec{\sigma})$, $\quad \vec{\Lambda} = -\left[\vec{r} \times (i\vec{\nabla} + D\vec{B}) + D\,\frac{\vec{r}}{r}\right]$

On a les relations de commutation :

(7.18) $[\Lambda_2,\Lambda_3] = i\,\Lambda_1$, $\quad [\Lambda_3,\Lambda_1] = i\Lambda_2$, $\quad [\Lambda_1,\Lambda_2] = i\Lambda_3$.

Nous devrons donc chercher d'abord les états propres de $\vec{\Lambda}^2$ et Λ_3, puis nous les composerons avec les états de spin. Mais pour trouver les états propres de $\vec{\Lambda}^2$, nous n'avons presque rien à faire ! En effet, il suffit de remarquer que, l'espace étant isotrope autour du centre coulombien, l'équation (7.6) en ξ (c'est elle que nous choisissons en choisissant $\vec{J}_\xi$) *doit être invariante par rapport au groupe des rotations* : c'est le point de départ qu'adoptent de nombreux auteurs qui utilisent, grâce à (7.18) des procédés de calcul classiques [16],[25],[32],[34],[47],[48]. Mais nous allons voir tout de suite qu'en réalité, on peut obtenir les états propres sans faire aucun calcul et je voudrais, en même temps, faire quelques remarques qui me paraissent utiles.

Observons d'abord que la seule invariance de l'équation nous permet d'affirmer que les fonctions d'onde se développeront suivant les fonctions sphériques généralisées, c'est-à-dire suivant les éléments de matrices des représentations du groupe des rotations [50]. C'est pour cette raison que Tamm et Fierz ont pu constater que les fonctions qu'ils trouvaient pour le monopôle sont les mêmes que celle de la toupie [16],[24] : il n'y a *pas d'autre point commun* entre les deux problèmes que l'invariance par rapport aux rotations. Pour préciser cela, écrivons Λ en fonction des angles polaires. On trouve :

$$(7.19)\quad \begin{cases} \Lambda^+ = e^{i\phi}\left(i\cot\theta\,\dfrac{\partial}{\partial\phi} + \dfrac{\partial}{\partial\theta} - \dfrac{D}{\sin\theta}\right) = \Lambda_1 + i\,\Lambda_2 \\ \Lambda^- = e^{-i\phi}\left(i\cot\theta\,\dfrac{\partial}{\partial\phi} - \dfrac{\partial}{\partial\theta} - \dfrac{D}{\sin\theta}\right) = \Lambda_1 - i\,\Lambda_2 \\ \Lambda_3 = -i\,\dfrac{\partial}{\partial\phi} \end{cases}$$

Les fonctions propres de Λ_3 et $\vec{\Lambda}^2$ seront certaines fonctions $Z(\theta,\phi)$. Multiplions les par $e^{-iD\chi}$, où χ est un nouvel

angle dont nous verrons tout de suite le sens. Alors, les fonctions $e^{-iD\chi}Z(\theta,\phi)$ seront les fonctions propres de nouveaux opérateurs R_3 et R^2 avec :

$$(7.20)\quad \begin{cases} R^+ = e^{i\phi}\left(i\cot\theta\,\dfrac{\partial}{\partial\phi} + \dfrac{\partial}{\partial\theta} - \dfrac{i}{\sin\theta}\,\dfrac{\partial}{\partial\chi}\right) = R_1 + i\,R_2 \\ R^- = e^{-i\phi}\left(i\cot\theta\,\dfrac{\partial}{\partial\phi} - \dfrac{\partial}{\partial\theta} - \dfrac{i}{\sin\theta}\,\dfrac{\partial}{\partial\chi}\right) = R_1 - i\,R_2 \\ R_3 = -i\,\dfrac{\partial}{\partial\phi} \quad . \end{cases}$$

Mais nous reconnaissons tout de suite R^+, R^- et R_3 : ce sont les *opérateurs infinitésimaux du groupe des rotations* exprimés en termes d'angles d'Euler [49],[50],[51] (θ : nutation, ϕ : précession, χ : rotation propre). Ces opérateurs ont une forme inhabituelle parce qu'ils sont exprimés dans le référentiel *fixe* x, y, z, alors qu'on les donne en général dans le référentiel *mobile* et ils correspondent alors à la rotation inverse de la précédente [51]. Les opérateurs habituels que nous appellerons Q s'obtiennent en posant :

(7.21) $Q^{\pm} = R^{\pm}(\theta,\ \pi-\chi,\ \pi-\phi)$, $\qquad Q_3 = i\,\dfrac{\partial}{\partial\chi}$.

Les correspondances sont les suivantes, avec les références citées :

$Q^{\pm} = \pm H\pm$ pour les références [49], [50] ;
$Q^{\pm} = i(M_1^- \pm i\,M_2^-)$ pour la référence [51] ;
$R^{\pm} = i(M_1^+ \pm i\,M_2^+)$ pour la référence [51] (les opérateurs R sont absents de [49] et [50]).

Revenons maintenant à (7.20) et cherchons les états propres de $\vec{R}^2$ (qui sont du reste les mêmes que ceux de $\vec{Q}^2$: c'est évident). Ce problème est classique. On montre dans [51] que *sous la seule condition de la continuité des états propres*, ceux-ci s'écrivent :

$$(7.22)\qquad \mathcal{D}_j^{m',m}(\theta,\phi,\chi) = e^{i(m\phi + m'\chi)}\,d_j^{m',m}(\theta).$$

Ce sont les fonctions sphériques généralisées avec :

$$(7.23)\quad d_j^{m',m}(\theta) = \frac{N}{(1-u)^{\frac{m-m'}{2}}(1+u)^{\frac{m+m'}{2}}}\left(\frac{d}{du}\right)^{j-m}\{(1-u)^{j-m'}(1+u)^{j+m'}\}$$

$$(7.24)\quad u = \cos\theta,\ N = \frac{(-1)^{j-m}i^{m-m'}}{2^j}\sqrt{\frac{(j+m)!}{(j-m)!(j-m')!(j+m')!}}$$

$$(7.25)\quad j = \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2\ldots\text{etc}\ldots,\ m,\ m' = -j,\ -j+1,\ldots,j-1,j$$

On a :

$$(7.26)\qquad \vec{R}^2\mathcal{D}_j^{m',m} = j(j+1)\mathcal{D}^{m',m}\ .$$

Rappelons-nous alors comment nous sommes passés de (7.19) à (7.20) et nous voyons que les états propres normés de $\vec{\Lambda}^2$ seront :

$$(7.27)\quad Z_j^{m',m}(\theta,\phi) = \sqrt{2j+1}\,\mathcal{D}_j^{m',m}(\theta,\phi,0)$$

avec les mêmes valeurs propres $j(j+1)$ qu'auparavant :

Le facteur $\sqrt{2j+1}$ provient de ce que les $\mathcal{D}_j^{m',m}$ sont les éléments de matrice de la représentation unitaire $\mathcal{D}_j$ du groupe. Or cette matrice est d'ordre $2j+1$ et ce sont les *lignes* qui sont normées et non pas les *éléments*, comme le veut la mécanique quantique.

Insistons encore sur le fait que, malgré les apparences, *la fonction* $d_j^{m'm}(\theta)$ *donnée en (7.23) est continue pour tout* θ en vertu d'une propriété des polynômes de Jacobi à indices entiers [51] et *c'est cette condition de continuité des fonctions d'onde qui impose les valeurs (7.25) de* j, m *et* m'. En particulier, on voit donc que cette continuité nous imposera que, dans (7.19), on ait la relation :

$$(7.28)\qquad D = -m'\ .$$

Or d'après (7.25), ceci veut dire que *le nombre de Dirac est entier ou demi-entier* : ceci n'est autre que la

que la relation (1.0) de Dirac qui apparaît donc comme une conséquence de l'*invariance* de l'équation du monopôle dans un champ coulombien, par rapport au groupe des rotations, et de la condition de *continuité des fonctions d'onde*.

La déduction de la relation de Dirac à partir de l'invariance par rapport aux rotations a été obtenue par différents auteurs que nous avons cités plus haut. Je crois pouvoir affirmer, pourtant, qu'aucun argument proposé* n'est aussi simple, ni ne découle aussi directement des principes de base de la mécanique quantique, que celui de la *continuité des fonctions d'onde* que j'avais déjà donné pour la toupie quantique [51].

Faisons encore deux remarques sur les nombres quantiques (7.25). Tout d'abord, ce n'est pas j que nous impose la nature, mais D.

Alors d'après (7.25) et (7.28) :

$$(7.29)\qquad j \geqslant |D|\quad .$$

On voit donc que le moment angulaire du monopôle autour d'un centre coulombien est *borné inférieurement* et cela d'autant plus que les charges en présence seront plus élevées.

Ensuite, on voit que le moment j et sa projection m seront entiers ou demi-entiers selon que le monopôle auquel

* Le principal argument utilisé appartient à Pauli [52] et consiste à exiger que l'algèbre de Lie des Λ_k soit intégrable. Cet argument avait été utilisé aussi par Bopp et Haag dans le problème de la toupie [53]. L'argument est évidemment bon, mais contrairement à celui utilisé ici (et dans [51]), il paraît se *surajouter* aux principes de base de la mécanique quantique au lieu d'en *découler* simplement. On voit ici (et dans [51]) que c'est, au contraire, la continuité des fonctions d'onde (exigée par l'interprétation probabiliste) qui *entraîne l'intégrabilité* de l'algèbre de Lie du groupe d'invariance de l'équation.

nous aurons affaire sera tel, que le nombre de Dirac sera lui-même entier ou demi-entier. Cela aussi, c'est la nature qui l'imposera. Cette possibilité de moments cinétiques demi-entiers, alors que le spin n'intervient pas dans ce calcul a été noté par certains auteurs : on le signale même, dans [32], comme paraissant un cas unique en mécanique quantique. Mais c'est inexact car la toupie quantique, étudiée notamment en liaison avec le problème des spectres moléculaires, peut avoir (tout au moins en principe) des états demi-entiers [51], [53]. En réalité, les moments demi-entiers peuvent apparaître (en principe) dans n'importe quel mouvement invariant par rapport au groupe des rotations, et le spin ne présente là *aucune spécificité a priori*. Il suffit, en effet, qu'un système en rotation possède deux moments d'inertie inégaux et non nuls pour que les fonctions angulaires (7.22), qui interviennent nécessairement dans le problème, aient une rotation propre $m' \neq 0$: et alors, il peut se faire que m, m' et j soient demi-entiers, ce qui est le cas pour une molécule en forme de toupie ou pour le système charge électrique-monopôle (dans ce dernier cas, c'est le moment cinétique du champ qui est responsable). Mais dans le cas du mouvement képlérien (atome d'hydrogène) ou d'une molécule diatomique, l'un des moments est nul : alors $m' = 0$ et comme m', m et j sont *simultanément* entiers ou demi-entiers, on se trouve, dans le cas des nombres entiers qui est le plus fréquent*. Cela étant, il faut reconnaître que, si la mécanique quantique n'interdit pas, en principe, les états moléculaires demi-entiers, on ne les a jamais vus. On peut montrer que les transitions entre états entiers et demi-entiers sont interdites [51] et il faut donc admettre que, pour quelque mystérieuse raison, les molécules "naissent" dans des états entiers. Pour le monopôle, la question reste ouverte.

Nous devons maintenant construire les fonctions sphériques avec spin, ce qui est un problème classique [54]. Les fonctions $Z_j^{m'm}$ sont, d'après (7.26) fonctions propres de Λ_3 et $\vec\Lambda^2$. La composition des moments de Clebsch-Jordan nous

---

*On vérifie que si $m' = 0$ (j et m sont, de ce fait, des entiers), on a bien $\mathcal{D}_j^{0,m} = Y_j^m(\theta,\phi)$, c'est-à-dire qu'on retrouve les fonctions sphériques de Laplace.

donne les deux spineurs :

$$(7.30)\qquad \Omega_j^{m',m}(+) = \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{j+m}{2j+1}}\; Z_j^{m',m-1} \\ \sqrt{\dfrac{j-m+1}{2j+1}}\; Z_j^{m',m} \end{pmatrix}$$

$$(7.31)\qquad \Omega_j^{m',m}(-) = \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{j-m+1}{2j+1}}\; Z_j^{m',m-1} \\ -\sqrt{\dfrac{j+m}{2j+1}}\; Z_j^{m',m} \end{pmatrix}$$

Nous les noterons en abrégé Ω_j^+ et Ω_j^-. Pour une même valeur propre j de $\vec\Lambda^2$, ils correspondent aux valeurs propres respectives $k = j + \frac{1}{2}$ et $k = j - \frac{1}{2}$ du moment total $\vec J^2$ donné par (7.17). On a en particulier, avec $k = j - \frac{1}{2}$:

$$(7.32)\qquad \vec J^2\, \Omega_{j-1}^+ = h^2 k(k+1)\,\Omega_{j-1}^+ \;;\; \vec J^2\, \Omega_j^- = h^2 k(k+1)\,\Omega_j^- .$$

Les spineurs $\Omega_j^{\pm}$ sont, bien sûr, *orthonormés*. Pour intégrer les équations (7.6), nous aurons à faire agir sur $\Omega_j^{\pm}$ l'opérateur :

$$(7.33)\qquad \vec\sigma.\vec n = \frac{1}{r}\,\vec\sigma.\vec r \quad ,$$

tout comme dans l'équation de Dirac [37], mais les formules sont plus compliquées à établir, puisque les fonctions $Z_j^{m',m}$ sont plus compliquées que les fonctions Y_ℓ^m de Laplace.

En se servant des formules de récurrence classiques entre fonctions sphériques généralisées [50], on peut montrer, par un calcul un peu fastidieux mais sans difficulté, les relations suivantes :

$$(7.34)\qquad \begin{cases} \vec\sigma.\vec n\;\Omega_{j-1}^+ = \cos\theta'\;\Omega_{j-1}^+ + \sin\theta'\;\Omega_j^- \\ \vec\sigma.\vec n\;\Omega_j^- = \sin\theta'\;\Omega_{j-1}^+ - \cos\theta'\;\Omega_j^- \end{cases}$$

avec :

(7.35) $$\cos\theta' = \frac{m'}{j}$$

Cet angle* que nous introduisons ici est très remarquable, puisqu'à l'approximation de l'optique géométrique, j est le moment cinétique total (sans le spin) tandis que m' (qui n'est autre que D, ne l'oublions pas) est le moment cinétique du champ électromagnétique. θ' est donc l'angle que forment ces deux moments. Or, Poincaré a montré que les trajectoires du mouvement classique sont les géodésiques d'un certain cône de révolution [15] : θ' n'est autre que le ½ *angle du sommet du cône de Poincaré*. On le voit facilement sur l'exposé de Goldhaber [19] de la théorie de Poincaré : il désigne cet angle par ψ et sa définition équivaut à la nôtre (malgré l'apparence). Mais θ' rappelle aussi un autre problème : celui de la toupie quantique que nous avons déjà signalé. En effet, ce même angle y apparaît, avec la même définition et on montre [51] qu'à l'approximation classique, c'est l'angle de la précession "à la Poinsot" : c'est bien naturel, puisque la toupie et le monopôle dans un champ coulombien obéissent aux mêmes lois de symétrie. En somme, le mouvement angulaire de Poincaré pour le monopôle est le même que celui de Poinsot pour la toupie. Ce sont les mouvements radiaux qui diffèrent, puisque la toupie est rigide tandis que le monopôle n'a même pas d'états liés.

8. Les fonctions radiales

Prenons la première équation (7.6), mais sous le forme (4.4) avec W = 0 et $\vec{B}$ donné par (7.1) ; en outre la charge électrique e sera incorporée à la constante D et on aura, d'après (7.28), D = -m' :

(8.1) $$\frac{i}{c}\frac{\partial\xi}{\partial t} = \vec{\sigma}.(i\vec{\nabla} - m'\vec{B})\xi \quad .$$

Nous chercherons les solutions stationnaires ayant

*Bien entendu, cet angle θ' ne saurait être confondu avec celui qui intervient dans la jauge (2.10) ou avec l'angle de nutation.

un moment total donné : disons $k = j - \frac{1}{2}$. Nous poserons pour cela :

(8.2) $$\xi = e^{-i\omega t}(F^+_{j-1}(r)\Omega^+_{j-1} + F^-_j(r)\Omega^-_j)$$

Il s'agit de trouver F^+ et F^-. Pour cela introduisons (8.2) dans (8.1) et multiplions par $\vec{\sigma}.\vec{n}$:

(8.3) $$\frac{\omega}{c}\vec{\sigma}.\vec{n}(F^+_{j-1}\Omega^+_{j-1} + F^-_j\Omega^-_j) = \vec{\sigma}.\vec{n}\ \vec{\sigma}.(i\vec{\nabla} - m'\vec{B})(F^+_{j-1}\Omega^+_{j-1} + F^-_j\Omega^-_j).$$

On appliquera au second membre la formule bien connue :

(8.4) $$\vec{\sigma}.\vec{A}_1\ \vec{\sigma}.\vec{A}_2 = \vec{A}_1.\vec{A}_2 + i(\vec{A}_1\times\vec{A}_2).\vec{\sigma} \quad ,$$

en tenant compte de ce que $\vec{n}.\vec{B} = 0$ d'après (7.1) et en utilisant (7.17). En se souvenant que $F^{\pm}$ est radial et $\Omega^{\pm}$ angulaire, on obtient :

(8.5) $$\frac{dF^+_{j-1}}{dr}\Omega^+_{j-1} + \frac{dF^-_j}{dr}\Omega^-_j = \frac{1}{r}\vec{\Lambda}.\vec{\sigma}(F^+_{j-1}\Omega^+_{j-1} + F^-_j\Omega^-_j) +$$
$$+ \left[\frac{m'}{r} - i\frac{\omega}{c}\right]\vec{\sigma}.\vec{n}(F^+_{j-1}\Omega^+_{j-1} + F^-_j\Omega^-_j) \ .$$

Les $\Omega^{\pm}$ étant fonctions propres de $\vec{J}^2$ et $\vec{\Lambda}^2$, on aura d'après (7.17) et avec $k = j - \frac{1}{2}$:

(8.6) $$\vec{\Lambda}.\vec{\sigma}\Omega^+_{j-1} = [k(k+1) - j(j-1) - \tfrac{3}{4}]\Omega^+_{j-1} = (j-1)\Omega^+_{j-1}$$

(8.7) $$\vec{\Lambda}.\vec{\sigma}\Omega^-_j = = [k(k+1) - j(j+1) - \tfrac{3}{4}]\Omega^-_j = -(j+1)\Omega^-_j$$

D'autre part, d'après (7.34), on a :

(8.8) $$\langle\Omega^+_{j-1}|\vec{\sigma}.\vec{n}|\Omega^+_{j-1}\rangle = \cos\theta' \ , \quad \langle\Omega^-_j|\vec{\sigma}.\vec{n}|\Omega^+_{j-1}\rangle = \sin\theta'$$

(8.9) $$\langle\Omega^+_{j-1}|\vec{\sigma}.\vec{n}|\Omega^-_j\rangle = \sin\theta' \ , \quad \langle\Omega^-_j|\vec{\sigma}.\vec{n}|\Omega^-_j\rangle = -\cos\theta'$$

En introduisant tout cela dans (8.5), on trouve :

$$(8.10)\quad \begin{cases} \dfrac{dF^{+}_{j-1}}{dr} + \dfrac{1-j}{r}\, F^{+}_{j-1} + \left(\dfrac{m'}{r} + i\dfrac{\omega}{c}\right)(F^{+}_{j-1}\cos\theta' + F^{-}_{j}\sin\theta') = 0 \\ \dfrac{dF^{-}_{j}}{dr} + \dfrac{1+j}{r}\, F^{-}_{j} + \left(\dfrac{m'}{r} + i\dfrac{\omega}{c}\right)(F^{+}_{j-1}\sin\theta' - F^{-}_{j}\cos\theta') = 0 \end{cases}$$

<u>Remarque</u> : Le calcul que nous venons de faire dans ce paragraphe est une adaptation d'un calcul classique en théorie de Dirac [37] : dans le cas habituel de l'électron dans un champ coulombien, on a $\theta' = \frac{\pi}{2}$, puisque $m' = 0$; en revanche, la masse n'est pas nulle.

Pour intégrer (8.10) écrivons d'abord le système sous la forme symbolique :

$$(8.11)\quad \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} - \frac{j}{r}\,\sigma_3 + \left(\frac{m'}{r} + i\,\frac{\omega}{c}\right)S(\theta')\right)F = 0,$$

avec :

$$(8.12)\quad F = \begin{pmatrix} F^{+}_{j-1} \\ F^{-}_{j} \end{pmatrix}, \quad S(\theta') = \begin{pmatrix} \cos\theta' & \sin\theta' \\ \sin\theta' & -\cos\theta' \end{pmatrix} = e^{-i\sigma_2\frac{\theta'}{2}}\,\sigma_3\, e^{i\sigma_2\frac{\theta'}{2}}.$$

Introduisons alors le changement de fonction inconnue :

$$(8.13)\qquad F = \frac{1}{r}\, e^{i\sigma_2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta'}{2}\right)} G$$

et nous aurons, en tenant compte de (7.35) :

$$(8.14)\quad \left(\frac{d}{dr} - \frac{\ell}{r}\,\sigma_3 + i\,\frac{\omega}{c}\,\sigma_1\right)G = 0$$

où le nombre ℓ est positif et a pour valeur :

$$(8.15)\qquad \ell = j\sin\theta' = \sqrt{j^2 - m'^2}\ .$$

L'équation (8.14) a une singularité régulière à l'origine [55] et s'intègre facilement par les méthodes classiques. On trouve la solution suivante qui est *régulière* en $r = 0$:

$$(8.16)\qquad G = r^{\ell}\begin{pmatrix} P(r,\ell) \\ -iI(r,\ell) \end{pmatrix}$$

$$(8.17)\quad \begin{cases} P(r,\ell) = \sum\limits_{0}^{\infty}\left(\dfrac{\omega r}{c}\right)^{2n}\dfrac{(-1)^n}{2^n n!}\,\dfrac{1}{(2\ell+1)(2\ell+3)\ldots(2\ell+2n-1)} \\ I(r,\ell) = \sum\limits_{0}\left(\dfrac{\omega r}{c}\right)^{2n+1}\dfrac{(-1)^n}{2^n n!}\,\dfrac{1}{(2\ell+1)(2\ell+3)\ldots(2\ell+2n+1)} \end{cases}$$

Mais on observera qu'en raison de (8.13) la *fonction d'onde ne sera régulière que si* :

$$(8.18)\quad \ell > 1 \Rightarrow j > |m'| \Rightarrow j > |D|\ .$$

On voit donc que la condition de *continuité des fonctions angulaires* nous imposait déjà (7.29), mais que la condition de *continuité des fonctions radiales* exige l'inégalité *stricte* (8.18).

Nous arrêterons ici les calculs et nous donnerons la suite de ce travail dans une autre publication. Signalons seulement que la solution (8.17) s'exprime en termes de fonctions hypergéométriques confluentes et qu'on peut même le montrer directement en itérant l'opérateur différentiel (8.14) : chaque composante de G obéit à une équation du second ordre qui se ramène facilement à une équation de Whittaker [56].

Mais il est surtout important de noter que l'équation (8.14) se ramène, par un changement de variable très simple à l'équation (22) de la référence [26], lorsqu'on fait, dans cette dernière, M = 0 (masse nulle).

Il fallait s'y attendre : en effet le problème traité par Kazama, Yang et Goldhaber [26] était celui d'une particule de Dirac chargée électriquement et de masse non nulle qui entre en collision avec un monopôle fixe, ou encore: qui diffuse sur un champ coulombien magnétique ; c'est donc la version quantique du vieux problème de Poincaré. Or on connaît la grande symétrie qui relie les deux problèmes de collision : celui de la charge fixe et du monopôle mobile, ou celui du monopôle fixe avec une charge mobile.

Mais nous allons voir maintenant qu'il existe, malgré cela, une différence drastique entre les deux théories.

9. Comparaison avec l'article de Kazama, Yang et Goldhaber (KYG)

Pour faire cette comparaison, nous devons *renverser* leur problème et nous demander : peut-on, en utilisant "normalement" l'équation de Dirac représenter un monopôle magnétique tournant autour d'un centre électrique coulombien ? Pour cela, nous devons écrire, au lieu de (4.1) :

$$(9.1)\quad \left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \vec{\alpha}.\vec{\nabla} + i\frac{g}{\hbar c}(W + \vec{\alpha}.\vec{B})\right]\psi = 0 \ .$$

En effet, contrairement à KYG, nous représentons un monopôle : donc il "voit" le champ coulombien "à travers" le pseudopotentiel $(W,\vec{B})$. Mais par contre, nous avons remis le couplage habituel sur le courant $(1\ \vec{\alpha})$. Or celui-ci est *polaire*, tandis que $(W,\vec{B})$ est *axial*. Pour que (9.1) soit P et T invariante nous serons donc obligés de supposer que g est *pseudoscalaire* : c'est l'hypothèse dont nous ne voulions pas au §3 et qui remplace donc ici l'opérateur (3.4) $G = g\,\gamma_5$ (dans lequel g était scalaire).

L'équation (9.1) est invariante de jauge de seconde espèce, mais contrairement à (4.1), il s'agit de la jauge habituelle qui est définie par (2.7). Nous pourrions donc remettre le terme de masse, puisque c'est la jauge (2.10) qui l'interdisait, mais nous ne le ferons pas pour mieux voir la comparaison.

Si nous refaisons les changements de variables (4.3) en tenant compte de (2.1), nous aurons, au lieu de (4.4) le système :

$$(9.2)\quad \begin{cases} \left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \vec{\sigma}.\vec{\nabla} + i\frac{g}{\hbar c}(W + \vec{\sigma}.\vec{B})\right]\xi = 0 \\ \left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\sigma}.\vec{\nabla} + i\frac{g}{\hbar c}(W - \vec{\sigma}.\vec{B})\right]\eta = 0 \end{cases}$$

Il ressemble, à s'y méprendre, à (4.4) et on remarque que les équations en ξ sont même identiques : il ne faut donc pas s'étonner si notre résultat du paragraphe précédent concordait avec celui de KYG, mutatis mutandis. C'est dans l'équation en η qu'apparaît une différence : le *signe* devant le i. En outre, n'oublions pas que g reste un *pseudoscalaire* (et même un pseudoscalaire d'univers).

Grâce à cela, le système reste P et T invariant : on vérifie que, tout comme dans le système (4.4), les équations en ξ et en η s'échangent par les transformations (4.5) et (4.6).

Par contre, la transformation C s'écrit cette fois-ci, non plus sous la forme (4.7), mais sous la forme :

$$(9.3)\quad g \to -g, \qquad \xi \to \sigma_2\,\eta^*, \qquad \eta \to \sigma_2\,\xi^* \ .$$

Donc, contrairement à ce qui se passait pour le système (4.4), l'antimonopôle a une *charge opposée* à celle du monopôle, avec la possibilité de création et d'annihilation de paires que cela entraîne, ainsi que la polarisation du vide qui s'ensuit. Certes, on peut conjurer cet effet en réintroduisant une masse suffisamment grande dans (9.1) (la théorie à deux composantes n'est évidemment plus possible), mais la seule théorie plausible d'un *monopôle léger* semble donc être celle que nous proposons sur la base de la transformation de jauge (3.2) ou (4.2) avec introduction de l'opérateur de charge (3.4).

Mais surtout, l'équation (9.1), même si l'on y introduit la masse, représente un *"faux" monopôle*. En effet, il suffirait de choisir un *pseudoscalaire* K, tel que $K^2 = 1$ et de poser :

$$(9.4)\quad e = gK, \qquad V = KW, \qquad \vec{A} = K\vec{B}$$

pour faire disparaître toute apparence de monopôle.

On voit que e serait une constante scalaire, $(V,\vec{A})$ redeviendrait un quadripotentiel *polaire* et, le courant $(1,\vec{\alpha})$ étant le courant habituel, on retrouverait l'équation de Dirac! Autrement dit, on tomberait sous le coup de l'objection que nous citions dans l'introduction, avec les formules (1.3) (on aurait simplement $K = \cot\gamma$).

Tandis que si l'on cherche à remener, par une transformation canonique, l'équation (4.1) à une équation de Dirac sans masse, il faut chercher pour cela une *matrice unitaire* U qui transformerait les opérateurs de spin $(\sigma'_4,\vec{\sigma}')$ en les opérateurs courants $(1,\vec{\alpha})$. Et cela reviendrait à chercher une matrice U et un nombre K tels que

$$(9.5) \qquad \sigma'_4\, U = KU\,, \qquad\qquad U^+U = 1\,.$$

Mais c'est ici qu'on voit que le couplage en $\vec{\sigma}'$ est irréductible à celui en $\vec{\alpha}$ car on peut vérifier que U n'existe pas et que le monopôle que nous proposons est donc le *seul* que l'équation de Dirac puisse représenter. Or on a vu que les deux seules jauges invariantes de la forme $e^{i\Gamma\theta(x^4)}$ que possède la théorie de Dirac sont $\Gamma = 1$ et $\Gamma = \gamma_5$: que l'une corresponde à l'électron et l'autre à un monopôle magnétique semble satisfaisant pour l'esprit. Est-ce aussi satisfaisant pour l'expérience ? C'est une autre affaire.

10. Conclusions

a) Il est difficile de conclure vraiment, alors qu'aucune expérience nouvelle n'est encore suggérée dans cet article. S'il est permis de rêver, j'avancerai seulement une hypothèse. Ne serait-il pas possible que ces monopôles que nous décrivons ici, bien loin d'être rares, soient au contraire très nombreux, que nous vivions dans un "vide", un "éther", peuplé d'une certaine densité de monopôles de masse nulle et de charges opposées (en nombre égal). La difficulté de leur observation ne proviendrait donc pas de leur rareté, mais de leur abondance et de leur homogénéité et donc, il faudrait chercher comment créer une inhomogénéité qui nous révèlerait leur présence. N'oublions pas que les propriétés que nous avons établies dans la première partie de cet article interdisent la création, comme l'annihilation, de paires de charges opposées et, par conséquent, empêchent une polarisation du vide analogue à celle du "vide" électronique. D'autre part, on pourrait penser que ce mélange de charges magnétiques de signes opposés conduirait ces charges à s'accoupler en des sortes d'atomes neutres de "monopolium", mais il n'en est rien car on peut montrer (je ne reproduis pas le calcul*) qu'un monopôle de masse nulle n'a *pas d'états liés dans un champ magnétique coulombien*: il est seulement diffusé, comme dans un champ coulombien électrique, mais avec des lois différentes. Rappelons enfin la décomposition remarquable (6.12) du courant magnétique de l'équation de Dirac :

$$(10.1) \qquad K_4 = \xi^+\xi - \eta^+\eta, \qquad \{K_j\} = \xi^+\vec{\sigma}\xi + \eta^+\vec{\sigma}\eta\,.$$

Ce courant est donc la somme des deux *courants isotropes* en ξ et η correspondant à deux monopôles de *même charge* mais d'*hélicités opposées*. On notera que les composantes de temps des courants en ξ et η ont des signes opposés. Or si le monopôle η est dans un *état conjugué de charge* du monopôle ξ, c'est-à-dire si :

$$(10.2) \qquad \eta = \xi_C = \sigma_2\, \xi^*\,,$$

on vérifie sur (10.1) que $K_\mu = 0$. Donc *le courant magnétique total de la paire est nul et ceci, bien que les charges des deux monopôles soient égales*. Et comme, grâce à (10.2) on a $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$, on aura aussi, d'après (6.3) $M_{\mu\nu} = 0$. Donc, globalement, une telle paire "disparait à nos regards", ce qui peut expliquer la difficulté d'observer un *vide de monopôles* : en effet, dans un vide homogène, chaque monopôle aurait une chance de se trouver à chaque instant au voisinage d'un monopôle de même charge mais d'hélicité contraire, avec une direction de mouvement voisine de la sienne.

---

*J'en profite pour signaler que je ne reproduis pas non plus d'autres calculs dans différents champs électromagnétiques : tous donnent des solutions de l'équation conformes à ce qu'on peut attendre d'un monopôle magnétique et qui confirment donc le bien fondé de l'équation.

b) Question générale : la théorie présentée ici est-elle une "théorie de jauge" ? En un sens oui, évidemment, puisqu'elle se fonde sur une invariance de jauge, mais la réponse est non si la question s'entend au sens de la théorie de Yang et Mills* : nous n'avons nullement ajouté aux champs en présence des degrés de symétrie interne, nous avons seulement utilisé une symétrie que possèdait déjà l'équation de Dirac et que possède également, ainsi qu'on l'a vu, une certaine classe d'équations linéaires.

*Signalons à ce sujet l'excellent exposé pédagogique de Jackiw [57].

APPENDICE A*

Cet appendice constitue un petit complément aux références bibliographiques. Tous d'abord, sur le monopôle de 't Hooft et Polyakov citons [58],[59],[60] (parmi les très nombreux développements qu'a reçus la théorie). Mais, pour le lecteur qui veut entrer dans le sujet, la mise au point récente de Burzlaff [61], aussi vaste que claire, sera particulièrement précieuse. Signalons enfin un nouvel exposé historique et expérimental [62] qui vient compléter la référence [10] (l'un des auteurs est commun aux deux exposés).

APPENDICE B

Remarques sur l'équation non linéaire et sur la jauge en $e^{i\gamma_5\theta/2}$

1°) Reprenons l'équation non linéaire sous la forme (6.4), par exemple :

$$\text{(B.1)} \quad \{\gamma_\mu(\partial_\mu + \frac{g}{\hbar c}\gamma_5 B_\mu) + \frac{1}{2}m(\rho^2)[\bar{\psi}\psi - i(\bar{\psi}\gamma_5\psi)\gamma_5]\}\psi = 0$$

où $m(\rho^2)$ est, rappelons le, une fonction scalaire de $\Omega_1^2 + \Omega_2^2$. Bien entendu, nous ne saurons l'intégrer que si nous choisissons la fonction $m(\rho^2)$. Tant qu'on n'a pas de meilleur critère que la simplicité, on pourra choisir par exemple :

$$\text{(B.2)} \qquad m(\rho^2) = k_0 \quad ,$$

où k_0 est une constante qui a la dimension de l'inverse d'une longueur.

Mais dans le cas coulombien, comme Ω_1 et Ω_2 sont invariants relativistes, ils ne pourront pas dépendre des angles polaires et ceci, *quelle que soit* la fonction $m(\rho^2)$. Donc l'équation non linéaire aura *la même intégrale première de Poincaré que l'équation linéaire*, c'est-à-dire $\vec{J}$ donnée par

*Les Appendices A et B ont été rajoutés au moment de mettre sous presse.

(7.17) : il suffira de remplacer dans $\vec{J}$ les matrices $\vec{\sigma}$ de Pauli par les matrices de spin de rang quatre. Donc nous connaissons les fonctions angulaires du cas coulombien dans le cas général (quel que soit $m(\rho^2)$) : ce sont les $Z_j^{m',m}$. Seules les fonctions radiales dépendront du choix de $m(\rho^2)$.

2°) Rappelons qu'il y a fort longtemps, dans une autre optique que la nôtre, Heisenberg avait proposé l'équation de champ libre [63] :

(B.3) $$\gamma_\mu \partial_\mu \psi + \ell^2(\bar{\psi}\psi)\psi = 0.$$

Elle ressemble à (B.1) en l'absence de champ électromagnétique, avec $m(\rho^2) = 2\ell^2$, mais l'absence du terme en Ω_2 est essentielle car (B.3), de ce fait, n'est pas invariante par rapport à la jauge en $e^{i\gamma_5\theta/2}$ et, contrairement à notre équation (B.1), elle ne contient donc pas de monopôle magnétique.

3°) Dans des travaux datant de la même époque [64], [65], [66] et qui se trouvent, en fait, à l'origine des réflexions qui ont conduit au présent travail, on avait décomposé comme suit le spineur de Dirac :

(B.4) $$\psi = \sqrt{\rho}\, e^{i\gamma_5\frac{A}{2}}\, LR \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} ,$$

où ρ est la densité $\sqrt{\Omega_1^2+\Omega_2^2}$, L une transformation spinorielle de Lorentz, R une rotation et A un certain angle pseudoscalaire (on remarque que ρ, L, R et A donnent bien 8 variables). On montrait alors qu'en vertu de l'équation de Dirac, on a les deux crochets de Poisson :

(B.5) $$[\tfrac{\phi}{2}, J_4] = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,'), \qquad [\tfrac{A}{2}, K_4] = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

où J_4 et K_4 sont les composantes de temps de J_μ et K_μ définis en (2.8) et (2.12) ; ϕ est l'angle d'Euler de rotation propre; A est l'angle figurant dans (B.4) et on a en outre :

(B.6) $$\Omega_1 = \rho \cos A \quad , \quad \Omega_2 = \rho \sin A \;.$$

Dans les mêmes références, on montrait que la transformation de jauge habituelle au sens de (2.7) est une *transformation additive portant sur l'angle ϕ de rotation propre*, ce qui est satisfaisant lorsqu'on voit, en (B.5), que ϕ est canoniquement conjugué à la densité de charge électrique (quatrième composante de J_μ). En effet, on reconnaît dans cette relation la conjugaison entre la *phase de l'onde* et la densité de charge électrique : relation qui devient, avec la quantification du champ, la conjugaison canonique entre la *phase* et le *nombre d'occupation* (d'où la 5ième relation d'incertitude d'Heisenberg). Notre interprétation dégage donc une phase commune aux quatre composantes du spineur de Dirac avec une signification géométrique simple.

Mais maintenant, la seconde relation (B.5), qui nous avait toujours paru mystérieuse, s'éclaire à son tour, puisqu'elle signifie maintenant que l'angle A est canoniquement conjugué à la *densité de charge magnétique* (quatrième composante de K_μ). Or, reprenons ici les formules (6.1) et (6.2) ; nous avions montré, en effet, que si on applique au spineur la transformation de jauge :

(B.7) $$\psi \to \psi' = e^{i\gamma_5\frac{\theta}{2}}\psi ,$$

les deux invariants relativistes Ω_1 et Ω_2 se transforment selon la loi :

(B.8) $$\begin{pmatrix}\Omega_1'\\ \Omega_2'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Omega_1\\ \Omega_2\end{pmatrix} .$$

Mais si nous introduisons ici les formules (B.6), nous voyons que :

(B.9) $$\Omega_1' = \rho\cos(A+\theta), \qquad \Omega_2' = \rho\sin(A+\theta) ,$$

ce qui se vérifie, d'ailleurs, à l'évidence sur (B.4).

Autrement dit, de même que la loi de jauge ordinaire en $e^{i\frac{\theta}{2}}$ est additive sur l'angle de rotation propre, qui est conjugué à J_4 (charge électrique), on voit que la loi de jauge en $e^{i\gamma_5\frac{\theta}{2}}$ est *additive sur l'angle* A qui est conjugué de K_4 (charge magnétique).

On observe également que la conjugaison canonique entre A et K_4 doit entraîner une *6ième relation d'incertitude d'Heisenberg*, dont le sens reste toutefois encore obscur car il faut clairement comprendre ce que signifie une mesure de A.

4°) On sait que, depuis trente ans, Louis de Broglie [67] et un groupe de ses élèves ont tenté un développement de la mécanique ondulatoire qui serait fondé sur une représentation du dualisme onde-corpuscule par des *ondes à bosse*, solutions *d'équations d'ondes non linéaires*. L'objet, sinon l'idée physique, s'est aujourd'hui popularisé dans la théorie des *solitons*. Mais l'obstacle qui a toujours bloqué l'avance de la théorie de de Broglie est que nous ne possédions pas de principe physique simple qui nous imposerait une équation non linéaire donnée ou, au moins, une classe suffisamment bien définie de telles équations. La loi de jauge proposée ici pourrait, comme on l'a vu ici et au §6, constituer un tel principe. On ne saura s'il est valable qu'en recherchant des solitons dans la classe d'équations non linéaires et en étudiant leurs propriétés.

BIBLIOGRAPHIE (suite)

La première partie de la bibliographie a été publiée avec la 1ière partie de l'article.

[47] C.A. Hurst, Ann. Phys. 50, 51, 1968

[48] P.A. Horvarty, I.J.T.P., 20, 697, 1981

[49] I.M. Gelfand, Z.Ja. Shapiro, Representations of the group of rotations, Ann. Math. Soc. Transl. (2), t.2, 1956

[50] I.M. Gelfand, P.A. Mimlas, Z.Ja. Shapiro, Les représentations du groupe des rotations et du groupe de Lorentz et leurs applications, Ed. Moscou, 1958

[51] G. Lochak, Cahiers de Phys. 13, 41, 1959

[52] W. Pauli, Helv. Phys. Acta, 12, 147, 1939

[53] F. Bopp, R. Haag, Zeits. Naturf., 5a, 644, 1950

[54] H.A. Kramers, Quantum Mechanics, Dover, N.Y., 1964

[55] E.A. Coddington, N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations, Mc Graw-Hill, N.Y., 1955

[56] E.L. Ince, Ordinary differential Equations, Dover, N.Y., 1956

[57] R. Jackiw, Rev. of Mod. Phys. 52, 661, 1980

[58] A. Chakrabarti, Ann. I.H.P., 23, 235, 1975

[59] L. Michel, L.O' Raifeartaigh, K.C. Wali, Phys. Letters, 67B, 198, 1977

[60] E. Carrigan, D.I. Olive, D.B. Fairlie, J. Nuyts, Nuclear Phys., B106, 475, 1976

[61] J. Burzlaff, Magnetic Poles in Gauge Field Theories, Com. of the Dublin Inst. for Adv. Studies Series A (Theor. Phys.) n°27, 1983

[62] R.A. Carrigan Jr, W.P. Trower, Nature, 305, 673, 1983

[63] W. Heisenberg, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen (Kl. Math. Phys.), p. 27, 1956

[64] G. Jakobi, G. Lochak, Comptes rendus, 243, 234, 1956

[65] G. Jakobi, G. Lochak, Comptes rendus, 243, 357, 1956

[66] G. Lochak, Comptes rendus, 245, 2023, 1957

[67] L. de Broglie, Une tentative d'interprétation causale et non linéaire de la mécanique ondulatoire, Gauthier-Villars, Paris, 1956.