Annales de la Fondation Louis de Broglie,
Vol. 9, n° 2, 1984

ESSAI DE DETERMINATION D'UN PAQUET D'ONDES SANS ETALEMENT REPRESENTANT UN PHOTON OU UNE PARTICULE MATERIELLE LIBRES

par Jean RICARD

Dans les ouvrages classiques de mécanique quantique, on démontre qu'un paquet d'ondes satisfaisant l'équation de Schrödinger, obtenu par superposition d'ondes planes présentant une dispersion en fréquence et en direction subit toujours un étalement au cours du temps(1). On ne peut donc représenter une particule libre par un tel paquet. De Broglie(2) admet qu'il faudrait adopter une équation des ondes non linéaire pour supprimer l'étalement.

Cependant toutes ces démonstrations supposent l'approximation non relativiste (énergie = $\frac{p^2}{2m}$) et ne sont faites que pour une particule matérielle. Dans l'annexe, j'examine le cas du photon en superposant des ondes élec-

(1) Voir de Broglie. Introduction à la Mécanique Ondulatoire 1930, p. 278 et L'électron Magnétique 1934, p. 169. Bricout.Microénergétique, 1933, t. 2, p. 124. De Broglie, 1956, Une tentative d'interprétation causale et non linéaire de la Mécanique Ondulatoire, p. 238. Messiah, Mécanique Quantique, t. 1, p. 184. Cohen-Tannoudji, Diu et Laloë, 1973, Mécanique Quantique, t. 1, p. 64.

(2) de Broglie, référence ci-dessus, 1956, p. 96.

Ce texte nous a été remis peu de temps avant son décès survenu en 1981.

tromagnétiques planes présentant une dispersion gaussienne à la fois en fréquence et en direction. Dans une première approximation qui assimile à l'unité le $\cos\theta$ par rapport à la direction moyenne de propagation on obtient un paquet d'onde sans étalement. Mais dès qu'on tient compte du 2ème terme dans $\cos\theta = 1 - \frac{1}{2}(\beta^2+\gamma^2)+\ldots$, on retrouve un étalement.

Signalons toutefois que de Broglie, dans la référence(2) et également dans (3) donne une équation d'onde sans étalement dérivée de l'onde sphérique :

$$(1)\quad u = \frac{C}{\sqrt{x^2+y^2+\frac{(z-vt)^2}{1-\beta^2}}}\, e^{\frac{2\pi i}{h}(wt-pz)} \qquad \text{avec } w = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

mais cette équation ne convient pas car l'intégrale de UU^* dans tout l'espace ne converge pas et n'est pas normalisable.

Il semble en conséquence que la mécanique quantique ait définitivement renoncé à pouvoir représenter une particule libre par une fonction d'onde, ce qui cependant pouvait apparaître comme le premier problème à résoudre, et que toutes les tentatives dans ce sens soient vouées à l'échec.

Cependant cette situation n'est pas satisfaisante. Dans le cas d'un faisceau lumineux étroit, on peut bien dire que l'énergie des photons étant exactement connue, leur position est totalement indéterminée, mais la considération d'une onde plane avec des nombres d'occupation n'est

(3)De Broglie, 1957, La théorie de la mesure en mécanique ondulatoire, p. 58.

pas adéquate, car rien ne montre pour quelle raison les photons sont concentrés près de l'axe.

La présente note a pour but de montrer qu'on peut arriver à une équation d'onde sans dispersion normalisable, et je considèrerai d'abord le cas du photon. Si le photon existe (certains auteurs le nient en revenant à l'idée originelle de Planck suivant laquelle la matière et l'émission de rayonnement est quantifiée mais pas la lumière en propagation) on ne peut éviter de l'associer à une onde électromagnétique. C'est celle-ci que je considèrerai et non pas les fonctions d'onde de probabilité (qui sont au nombre de 16 dans la théorie de fusion de de Broglie et qui sont liées aux grandeurs électromagnétiques).

Pour que l'onde soit recevable, il faut
1°) qu'elle ne présente pas d'étalement
2°) que l'intégration de l'énergie dans tout l'espace converge afin qu'on puisse exprimer qu'elle est égale à $h\nu$.

La première condition implique que x étant la coordonnée suivant laquelle le photon se déplace, x et temps t n'interviennent dans l'équation d'onde que par le groupement $x-ct$. Nous chercherons donc, la fréquence étant supposée fixée, une équation de la forme :

$$E_y = f(y,z,x-ct)e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(x-ct)}$$

d'où en appelant P l'exponentielle et $u = x-ct$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} = P\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = P\frac{\partial^2 f}{\partial z^2},\quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2ik\frac{\partial f}{\partial u} - k^2 f\right)P,$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2ik\frac{\partial f}{\partial u} - k^2 f\right)c^2 P$$

E_y satisfait l'équation générale des ondes :

si $$\Delta E_y - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$$

(2) $$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \quad \text{équation de Laplace.}$$

f est donc une fonction analytique de la variable complexe $z = y - iz$ soit

$$f = P(y,z) + iQ(y,z) \qquad (P \text{ et } Q \text{ réels})$$

(3) avec $\partial_y P = -\partial_z Q, \quad \partial_z P = \partial_y Q$

ou être identique séparément à $P(y,z)$ ou $Q(y,z)$. (Nous avons choisi ici $Z = y - iz$ plutôt que $Z = y + iz$ pour correspondre à l'onde (7) donnée plus loin).
Mais il ne suffit pas que l'équation des ondes soit satisfaite pour que les équations de Maxwell le soient. Il faut en outre que $\operatorname{div} \vec{E} = 0$. Comme nous cherchons une solution qui présente une certaine symétrie par rapport à l'axe Ox et que $\partial_y E_y$ n'a aucune raison d'être nul, il faut adjoindre à E_y une composante E_z à laquelle correspond

$$f' = P'(y,z) + i\, Q'(y,z)$$

telle que

$$\partial_y P + i\, \partial_y Q + \partial_z P' + i\, \partial_z Q' = 0$$

d'où

$$\partial_z P' = -\partial_y P = \partial_z Q \qquad \partial_z Q' = -\partial_y Q = \partial_z P$$

ou en éliminant les constantes qui donneraient lieu à des ondes non normalisables

$$P' = Q, \qquad Q' = -P, \qquad f' = -i\, f.$$

Si on était parti de $Z = y + iz$, on trouverait de même

$$P' = -Q, \qquad Q' = P, \qquad f' = if.$$

Ainsi, nous avons démontré <u>avec la seule hypothèse du non étalement de l'onde que celle-ci est polarisée circulairement</u>, ce qui est normal puisque le photon doit présenter un spin ; et ceci sans expliciter la fonction f.
Un deuxième résultat intéressant de ce qui précède, qui suppose que $E_x = 0$ est que <u>le champ magnétique suivant Ox</u>

<u>est également nul</u>.
En effet (pour $\varepsilon = \mu = 1$, puisque le photon ne se conçoit que dans le vide)

$$H_x = \frac{i}{k}(\partial_y E_z - \partial_z E_y) = \frac{i}{k}(\partial_y P' + i\partial_y Q' - \partial_z P - i\partial_z Q)$$

Or, dans la solution $Z = y - iz$

$$\partial_y P' = \partial_y Q = \partial_z P \quad \text{et} \quad \partial_y Q' = -\partial_y P = \partial_z Q$$

et on trouverait de même $Hx = 0$ avec $Z = y + iz$.

Pour expliciter f, partons d'ondes élémentaires

$$E_{y\ell} = f_1(y,z)\, e^{-i2\pi\nu(\frac{x}{c} - t)}$$

dont la fréquence a une dispersion gaussienne autour d'une fréquence moyenne et suivant le procédé habituel, intégrons

$$f_1(y,z) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi\sigma^2\varepsilon}\, e^{-i2\pi\nu(1+\varepsilon)(\frac{x}{c} - t)}\, d\varepsilon$$

Nous pouvons intégrer pour des valeurs négatives puisque si $\nu(1+\varepsilon)$ est négatif, la deuxième exponentielle peut s'écrire $e^{i2\pi\nu|1+\varepsilon|(\frac{x}{c} - t)}$ ce qui donne une onde élémentaire qui satisfait le problème. Le résultat (voir l'annexe où le même calcul est fait) est

(4) $$E_y = f_1(y,z)\frac{1}{\sigma}\exp\left(-\pi\frac{(x-ct)^2}{\lambda^2\sigma^2}\right) e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(x-ct)}, \quad E_z = -iE_y$$

Dans ces conditions les composantes du champ magnétique des ondes élémentaires sont :

$$H_{y\ell} = -\frac{i}{k}\,\partial_x E_{z\ell} = -\frac{i}{k}\,\partial_x(-iE_{y\ell}) = iE_{y\ell}, \quad H_{z\ell} = \frac{i}{k}\,\frac{E_{y\ell}}{\partial x} = E_{y\ell}$$

et la même intégration donne pour les champs totaux $H_y = -iE_y$, $H_z = E_y$. En ce qui concerne f_1, considérons les solutions particulières de l'équation de Laplace dans les coordonnées cylindriques ρ, θ, x avec $y = \rho\cos\theta$,

$z = \rho \sin\theta$: $\ldots \rho^n(C_n \cos n\theta + C'_n \sin n\theta)$, $\rho(C_1\cos\theta + C'_1\sin\theta)$,
A, $B \log\rho$, $\frac{1}{\rho}(D_1\cos\theta + D'_1\sin\theta)\ldots \frac{1}{\rho^n}(D_n\cos n\theta + D'_n \sin n\theta)$

A, B et les C, D étant des constantes et n étant entier. L'intégration de $\theta=0$ à 2π de $f_1 f_1^*$ correspondant à un quelconque des termes donne $2\pi\rho^n C_n$ etc. D'autre part, comme

$$\int_a^\infty 2\pi\frac{1}{\rho^2}\rho\, d\rho = \int_{a^2}^\infty \pi\,\frac{dR}{R} = \infty \text{ et } \int_a^\infty 2\pi\,\frac{1}{\rho^4}\,\rho\, d\rho = \int_{a^2}^\infty \pi\,\frac{dR}{R^2} = \frac{\pi}{a^2}\,,$$

la solution en $\frac{1}{\rho^2}$ est la première qui soit possible, et les suivantes, pour $n > 2$ le sont aussi, mais il subsiste la difficulté que l'intégration depuis $\rho=0$ donne un résultat infini. Elle ne peut être évitée par aucune modification de ces solutions. Considérons par exemple la solution

$$(5) \qquad f_1 = \frac{e^{i2\theta}}{\rho^2} = \frac{y^2 - z^2 + 2iyz}{(y^2 + z^2)^2} = \frac{1}{(y - iz)^2}$$

à quoi correspond $f_1 f_1^* = \frac{1}{(y^2 + z^2)^2}$.

On pourrait essayer de remplacer y par $y + a + ib$ et z par $z + c + id$, a,b,c,d étant des constantes ce qui satisferait encore l'équation de Laplace. Le dénominateur de $f_1 f_1^*$ deviendrait $(y + a - d)^2 + (z + c - b)^2$ et pourrait encore s'annuler pour $y = d - a$, $z = b - c$. On ne ferait que déplacer la difficulté.

En fait, il n'y a que deux moyens de se tirer d'affaire

Le premier qui avait été envisagé par De Broglie lui-même à propos de (1) (voir référence (2)) consiste à admettre que l'onde règne seulement au-delà d'un certain rayon ρ_0 où le module des champs atteint sa valeur maximale, mais la brusque discontinuité pour $\rho=\rho_0$, les champs étant nuls pour $\rho<\rho_0$ ne paraît pas recevable.

Le deuxième consiste à admettre que

$$(6) \qquad f_1 = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 e^{i2\theta} \text{ pour } \rho>\rho_0 \text{ et } \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 e^{i2\theta} \text{ pour } \rho<\rho_0.$$

Il n'y a alors aucune discontinuité des champs E_y, E_z, H_y, H_z pour $\rho=\rho_0$, mais seulement de leurs dérivées. De plus, et ceci est important, il n'y a aucune discontinuité des champs E_x et H_x qui dépendent de ces dérivées puisque les champs E_x et H_x sont nuls en vertu des relations (3) qu'on peut vérifier facilement à partir de (5) et ceci est vrai quand ρ tend vers ρ_0 par valeurs supérieures ou inférieures.

Le point faible de l'hypothèse précédente réside dans la discontinuité des dérivées mais les équations de Maxwell restent applicables sans aucune approximation. Je pense donc que cette solution (6) est admissible. Voyons à quoi elle conduit. Les champs seraient donc, A étant un coefficient constant :

$$(7) \quad \text{pour } \rho<\rho_0,\ E_y = A\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 e^{i2\theta} e^{-\pi\left(\frac{u}{\lambda\sigma}\right)^2} e^{-i2\pi\frac{u}{\lambda}}\ ;$$

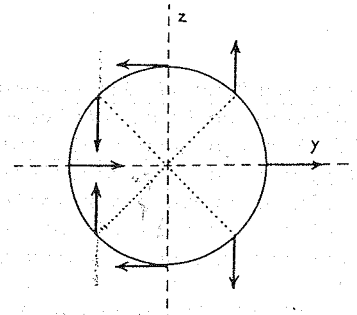
$$\text{pour } \rho>\rho_0,\ E = A\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 e^{i2\theta} e^{-\pi\left(\frac{u}{\lambda\sigma}\right)^2} e^{-i2\pi\frac{u}{\lambda}}$$

$E_z = -iE_y$, $E_x = 0$, $H_y = iE_y$, $H_z = E_y$, $H_x = 0$.

La part réelle du champ $\vec{E}$ est $\mathbb{R}E_y = A\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2\cos 2\left(\theta - \pi\frac{u}{\lambda}\right)\frac{e^{-\pi\left(\frac{u}{\lambda\sigma}\right)^2}}{\sigma}$ pour $\rho<\rho_0$, ou même expression avec $\frac{\rho_0}{\rho}$ pour $\rho>\rho_0$. $\mathbb{R}E_z$ a même expression avec sin au lieu de cos et le module de E est

$$A\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2; \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2\right]\frac{e^{-\pi\left(\frac{u}{\lambda\sigma}\right)^2}}{\sigma}$$

A un instant donné, si on se déplace sur un cercle, le champ a une grandeur constante, mais tourne deux fois suivant le croquis. Si on adoptait $e^{i3\theta}/\rho^3$ au lieu de $e^{i2\theta}/\rho^2$, il tournerait 3 fois, etc. Pour t donné un champ de même direction s'enroule en hélice avec le pas $\Delta x = \lambda$ en même temps que sa grandeur varie suivant le facteur $e^{-\pi\left(\frac{x-ct}{\lambda\sigma}\right)^2}$.
Il s'ajoute donc à la polarisation circulaire en un point donné une symétrie hélicoïdale. On peut remarquer que quand



ρ tend vers zéro, le champ pour x et t donné doit avoir une direction déterminée, ce qui serait incompatible avec les directions variables du croquis. Donc le champ ne peut qu'être nul, et ceci confirme le bien fondé de la loi en $(\frac{\rho}{\rho_0})^2$ pour $\rho<\rho_0$.

Intégration de l'énergie

Nous faisons le calcul pour $\varepsilon = \mu = 1$.

La densité d'énergie est $\frac{1}{4}|\vec{E}\vec{E}^* + \vec{H}\vec{H}^*| = \vec{E}_y\vec{E}_y^*$ d'après ce qui précède.

L'énergie totale est donc

$$A^2\Big[\int_0^{\rho_0} 2\pi(\frac{\rho}{\rho_0})^4 \rho\, d\rho + \int_{\rho_0}^{\infty} 2\pi(\frac{\rho_0}{\rho})^4 \rho\, d\rho\Big]\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2\pi(\frac{u}{\lambda^2\sigma^2})^2}}{\sigma^2}\, du$$

$$= A^2[1 + \frac{1}{3}]\pi\rho_0^2\, \frac{\sigma\lambda}{\sigma^2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} A^2\, \frac{\pi\rho_0^2\lambda}{\sigma}$$

qui doit être égal à $h\nu = 2\pi\hbar\, \frac{c}{\lambda}$.

On doit donc avoir $A^2 = \frac{3}{\sqrt{2}}\, \hbar\, c\, \frac{\sigma}{\rho_0^2\lambda^2}$

et $|\vec{E}|$ ou $|\vec{H}|$ devient

$$(8)\quad |\vec{E}| = \sqrt{\frac{3\hbar c}{\sqrt{2}}}\, \frac{1}{\sqrt{\sigma}\rho_0\lambda}\Big[(\frac{\rho}{\rho_0})^2, (\frac{\rho_0}{\rho})^2\Big]e^{-\pi(\frac{(x-ct)}{\lambda\sigma})^2}$$

Supposons que le champ maximal qui a lieu pour $\rho=\rho_0$, $x=t=0$

ait une valeur donnée. Ce champ est

$$(9)\qquad |E_0| = \sqrt{\frac{3\hbar c}{\sqrt{2}}}\, \frac{1}{\sqrt{\sigma}\rho_0\lambda}$$

dans lequel les paramètres inconnus σ et ρ_0 n'interviennent que par le produit $\sqrt{\sigma}\rho_0$. Dans cette hypothèse assez naturelle, plus ρ_0 est grand (grande dispersion suivant le rayon, plus σ est petit (petite dispersion suivant Ox). On arriverait ainsi à la conception d'un photon qui pourrait indifféremment se concentrer sur l'axe en aiguille avec une grande largeur en x (ce qui pourrait correspondre à un phénomène d'émission de dimensions atomiques) ou se concentrer en x avec une grande largeur en diamètre (ce qui pourrait expliquer les phénomènes genre trous d'Young), tout en conservant son énergie $h\nu$ et sa quantité de mouvement h/λ.

Remarquons d'ailleurs que ce mouvement d'accordéon serait compatible avec les équations de Maxwell. En effet supposons que pendant un certain intervalle de temps ρ_0 varie suivant $\rho_0' = \rho_0(1+\mu t)$ et qu'en même temps on change la coordonnée ρ en $\rho' = \rho(1+\mu t)$, t disparaitraît dans le rapport ρ_0'/ρ'. De même si $\sigma' = \frac{\sigma}{(1+\mu t)^2}$ et $u' = u(1+\mu t)^4$, t disparaitraît dans l'exponentielle $e^{-\pi(\frac{u}{2\sigma})^2}$. Mais pour que la phase $2(\theta - \pi\frac{u}{\lambda})$ ne change pas, il faudrait supposer que l'on change aussi la coordonnée θ c'est-à-dire qu'on rapporte le phénomène à des axes tournants. Il suffirait d'ailleurs qu'en fin de variation u/λ ait varié d'un nombre entier pour que la phase et les champs gardent la même valeur en ρ', u' qu'un point initial ρ, u.

Voyons quel peut être l'ordre de grandeur des champs en $\rho=\rho_0$, $u=0$. Si on se place dans le système MKSA, il faut écrire la densité d'énergie $\frac{1}{4\pi}\mu_0 H^2$ mais $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$. Il faut donc écrire

$$|H| = \sqrt{\frac{3\hbar c}{\sqrt{2}10^{-7}}}\, \frac{1}{\sqrt{\sigma}\rho_0\lambda}$$

soit pour $\lambda = 0,5\ 10^{-6}$,

$$|H| = \sqrt{\frac{3.1,0546.10^{-34}.3\ 10^{8}}{\sqrt{2}\ \ 10^{-7}}}\ \frac{1}{5\ 10^{-7}}\ \frac{1}{\sqrt{\sigma}\rho_0} = \frac{1,66\ 10^{-3}}{\sqrt{\sigma}\ \ \rho_0}\ \text{MKSA}$$

$$= \frac{16,6}{\sqrt{\sigma}\,\rho_0}\ \text{gauss.}$$

Pour le champ électrique, il faut représenter la densité d'énergie par $\frac{\varepsilon}{4\pi}E^2$ et dans le système MKSA $\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2\mu_0} = \frac{10^7}{(3.10^8)^2 4\pi}$. Il faut donc remplacer 10^{-7} dans le dénominateur du radical par

$$\frac{10^7}{(3.10^8.4\pi)^2} = 0,773\ 10^{-12}$$

et

$$|E| = \frac{0,59}{\sqrt{\sigma}\,\rho_0}\ \text{volt/m}$$

Supposons que ρ_0 soit de l'ordre des dimensions atomiques, soit 10^{-10} m et que l'écart quadratique de u, soit $\frac{\lambda\sigma}{\sqrt{2}} = 10^{-10}$ également d'où $\sigma = 2,82\ 10^{-4}$, $\sqrt{\sigma}\ \rho_0 = 1,68.10^{-12}$ on trouverait les valeurs énormes de

$$9,9\ 10^{12}\ \text{gauss et}\ 3,5\ 10^{11}\ \text{volt/m}$$

qui sont absolument exclues (la rigidité électrique de l'air est environ 3.10^6 volt/m).

Si maintenant ρ_0 est de l'ordre de la longueur d'onde, soit $0,5\ 10^{-6}$ m et $\lambda\sigma/\sqrt{2}$ également, $\sqrt{\sigma}\ \rho_0 = 0,59\ 10^{-6}$ et on obtient les valeurs

$$2,8.10^7\ \text{gauss et}\ 10^6\ \text{volt/m}$$

qui sont encore grandes mais peut être admissibles. On en

conclut que les écarts moyens doivent au moins être de l'ordre de la longueur d'onde.

Remarque

On pourrait étudier de même les solutions pour lesquelles $n > 2$. Le coefficient 4/3 dans l'intégration en ρ serait remplacé par un coefficient différent. Remarquons que la série

$$\frac{e^{2i\theta}}{\rho^2}\left(1 + \frac{ae^{i\theta}}{\rho} + \frac{ae^{2i\theta}}{\rho^2} + \dots\right) = \frac{ae^{i2\theta}}{\rho^2\left(1 - \frac{ae^{i\theta}}{\rho}\right)}$$

ne conviendrait pas car dans $f_1 f_1^*$ le dénominateur $\rho^2(\rho^2 + a^2 - 2a\rho\cos\theta)$ s'annulerait non seulement pour $\rho = 0$ mais encore pour $\cos\theta = \pm 1$ et $\rho = \pm a$.

2°) Particule matérielle à une seule fonction d'onde (sans spin) sans potentiel

Dans le cas relativiste, la fonction d'onde doit satisfaire l'équation de Klein-Gordon

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\ \psi = k_0^2\ \psi \qquad \text{avec } k_0 = \frac{2\pi}{h}\ m_0 c$$

qui est satisfaite en particulier pour l'onde

$$\psi_0 = e^{-i\frac{k_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{vx}{c} - ct\right)}$$

dont la vitesse de phase est c^2/v et v la vitesse de groupe. On ne peut pour obtenir une dispersion en x (ou en x-vt) appliquer la méthode précédente car si on fait varier la fréquence ν, $\frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}}$ et $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ ne varient pas dans la même proportion. Ainsi, supposons que $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ soit multiplié par $1+\varepsilon$ soit

$$\frac{1}{1 - \frac{v'^2}{c^2}} = (1 + \varepsilon)^2\ \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

d'où

$$\frac{\frac{v'}{c}}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}} = \sqrt{\frac{(1+\varepsilon)^2-(1-\frac{v^2}{c^2})}{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\sqrt{1+\frac{c^2}{v^2}(2\varepsilon+\varepsilon^2)}$$

Si on ne conserve dans le développement du radical que le terme en ε, $v/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ serait multiplié par $1+\frac{c^2}{v^2}\varepsilon$ et on aurait

$$\int e^{-\pi\sigma^2\varepsilon^2}\, e^{-i\frac{k_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\left[\frac{vx}{c}(1+\frac{c^2}{v^2}\varepsilon)-c\,(1+\varepsilon)t\right]}d\varepsilon$$

$$= \int e^{-\pi\,\varepsilon^2\sigma^2+\frac{2im_0c}{h\sqrt{1-\beta^2}}(\frac{c}{v}x-ct)}\,d\varepsilon\; e^{-\frac{ik_0}{\sqrt{1-\beta^2}}(\frac{vx}{c}-ct)}$$

l'intégrale donnant $\frac{1}{\sigma}\,e^{-\pi\frac{m_0^2c^4}{\sigma^2h^2(1-\beta^2)}(\frac{x}{v}-t)^2}$

On obtient bien une dispersion gaussienne sans étalement. Mais si on tient compte du 2ème terme en ε^2 du développement du radical, il s'ajoute un terme en $i\varepsilon^2$ à σ^2 et par conséquent aussi au dénominateur de l'exposant de l'exponentielle précédente. Il y a étalement et le procédé ne convient pas.

Pour qu'il n'y ait pas étalement, il faut que x et t, en dehors de $P = e^{-\frac{ik_0}{\sqrt{1-\beta^2}}(\frac{vx}{c}-ct)}$ n'interviennent que dans le groupement x-vt, et nous chercherons une fonction de forme

$$\psi = f(y,z,\frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}})P$$

qui donne en posant $u = \frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$$\Delta\psi = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}+\frac{1}{1-\beta^2}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-\frac{2ik_0}{1-\beta^2}\frac{v}{c}\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{k_0^2}{1-\beta^2}\frac{v^2}{c^2}f\right]P$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \left[\frac{v^2}{1-\beta^2}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-\frac{2\,i\,k_0}{1-\beta^2}vc\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{k_0^2}{1-\beta^2}f\,c^2\right]P$$

d'où $\Delta\psi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+k_0^2\,\psi$

Il faut donc que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = 0 \qquad (10)$$

C'est encore une équation de Laplace comme pour le photon, mais à trois dimensions ce qui va conférer à la solution un caractère très différent.
La solution la plus simple de (10) est

$$f = \frac{1}{R} \quad \text{avec} \quad R = \sqrt{y^2+z^2+u^2}$$

C'est justement la solution (1) de de Broglie déjà citée.

On peut obtenir une solution qui donne une énergie de carré sommable en dérivant par rapport à u, soit en coordonnées cylindriques avec $y^2+z^2=r^2$ (1)

$$f = \frac{u}{(y^2+z^2+u^2)^{3/2}} = \frac{R\cos\theta}{R^3} = \frac{\cos\theta}{R^2} = \frac{u}{(r^2+u^2)^{3/2}} \qquad (11)$$

Mais l'intégration de ff* ne peut être faite jusqu'à R=0, et nous sommes amenés comme pour le photon à n'employer cette solution que jusqu'à $R=R_0$ en l'écrivant

$(\frac{R_0}{R})^2\cos\theta$ quand $R > R_0$.

Pour trouver une solution valable pour $R < R_0$, on peut utiliser la propriété connue que si f(y,z,u) satisfait (10), $\frac{1}{R}f(y/R^2,z/R^2,u/R^2)$ le satisfait également, ce qui donne à partir de (11)

(1) Cette solution est mentionnée dans la référence (2) de de Broglie, p. 97 ; et qualifiée de dipolaire (voir plus loin).

(12) $\quad f = u = R\cos\theta$

Une solution est donc

(13) $\quad \psi = (\frac{R_0}{R})^2\cos\theta\ P$ pour $R > R_0$ et $\frac{R}{R_0}\cos\theta\ P$ pour $R < R_0$

qui assure la continuité de ψ mais non pas de sa dérivée par rapport à y, z ou u pour $R = R_0$.
L'intégration de $\psi\psi^*$ dans tout l'espace donne

pour $R>R_0$, $\int_{R_0}^{\infty} dR \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta (\frac{R_0}{R})^4\cos^2\theta\sin\theta R^2 = \frac{4}{3}\pi R_0^4\int_{R_0}^{\infty}\frac{dR}{R^2} = \frac{4}{3}\pi R_0^3$

pour $R<R_0$ $\frac{4}{3}\ \pi\frac{1}{R_0^2}\int_0^{R_0} R^4 dR = \frac{4}{15}\ \pi R_0^3$, au total $\frac{8}{5}\ \pi\ R_0^3$.

Pour normer $\psi\psi^*$, il faut donc multiplier (13) par $(\frac{8}{5}\pi R_0^3)^{-1/2}$, soit :

(14) pour $R>R_0$, $\psi_n = (\frac{8}{5}\pi)^{-1/2} R_0^{1/2} R^{-2}\cos\theta\ P$,

pour $R<R_0$, $\psi = (\frac{8}{5}\pi)^{-1/2} R_0^{-5/2}\ R\cos\theta\ P$.

Les courbes d'égale densité de probabilité W s'obtiennent, pour $R > R_0$ en exprimant (non compris le facteur de normalisation) que

$$u^2 = W(r^2 + u^2)^3 \quad \text{ou} \quad r^2 = (u^2/W)^{1/3} - u^2 .$$

Pour $R < R_0$, on a simplement $u = W^{1/2} = $ Cte. La fig. 3 représente ces courbes dans un quadrant en coordonnées u, R. La densité est maximale, égale à 1 au point d'accumulation A (et au point symétrique) par rapport à l'axe des r. On peut donc qualifier cette solution de dipolaire.

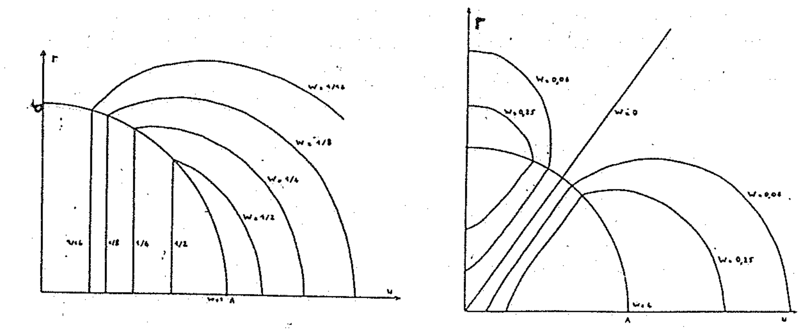
Une deuxième solution est obtenue en dérivant une deuxième fois, 1/R par rapport à u :

(15) $\quad f_2 = \frac{R^2-3u^2}{R^5} = \frac{1}{R^3}(1 - 3\cos^2\theta) \quad$ ou $\quad (\frac{R_0}{R})^3(1 - 3\cos^2\theta)$

valable pour $R > R_0$
et en faisant la transformation indiquée plus haut ce qui donne :

(16) $\quad f_2 = \frac{1}{R}\,\frac{\frac{1}{R^2} - 3\frac{u^2}{R^4}}{\frac{1}{R^3}} = R^2 - 3u^2 = R^2(1 - 3\cos^2\theta)$

ou $(\frac{R}{R_0})^2(1 - 3\cos^2\theta)$ valable pour $R < R_0$



L'intégration de l'énergie donne comme

$$\int_0^{\pi} (1-3\cos^2\theta)^2\sin\theta d\theta = \int_0^{\pi}(1-6\cos^2\theta+9\cos^4\theta)\sin\theta$$

$$= \left|-\cos\theta+2\cos^3\theta - \frac{9}{5}\cos^5\theta\right|_0^{\pi} = 7$$

(17)
pour $R>R_0$ $\quad 14\pi\int_{R_0}^{\infty}\frac{R_0^6}{R^4}\ dR = \frac{14}{3}\ \pi\ R_0^3$
$R<R_0$ $\quad 14\pi\int_0^{R_0}\frac{R^4}{R_0^2}\ dR = \frac{14}{5}\ \pi\ R_0^3$
total $\frac{140}{21}\ \pi\ R_0^3$

et

(18) pour $R>R_0$ $\psi_n = (\frac{140}{21}\pi)^{-1/2} R_0^{3/2} R^{-3}(1-3\cos^2\theta)P$,

pour $R<R_0$, $\psi_n = (\frac{140}{21}\pi)^{-\frac{1}{2}} R_0^{-7/2} R^2(1 - 3\cos^2\theta)P$.

La fig. 3 montre de même la forme des courbes W = Cte. La solution comporte un point d'accumulation A ainsi que le point symétrique par rapport à Or, et un cercle d'accumulation B.
Des solutions plus compliquées pourraient être trouvées en continuant à dériver (11). Il y aurait plus de deux directions correspondant à W = 0.

Remarque. Si on dérive par rapport à y ou z au lieu de u, on aurait également des solutions qui satisferaient (10). Mais pour conserver une symétrie axiale, il faudrait écrire

$$f = \frac{y + iz}{R^3} \quad \text{ou} \quad ff^* = \frac{y^2 + z^2}{R^6} = \frac{r^2}{R^6} = \frac{1}{R^4}\sin^2\theta$$

ce qui conduirait à adopter

$$\text{pour } R>R_0 \ (\frac{R_0}{R})^2 e^{i\phi}\sin\theta \ P \qquad \text{pour } R<R_0 \ \frac{R}{R_0}\ e^{i\phi}\sin\theta \ P.$$

Les courbes W = Cte seraient obtenues comme pour la fig.2 mais en intervertissant u et r. On aurait un cercle d'accumulation pour u = 0.
De même, pour la solution suivante (fig. 3), les axes seraient également intervertis.

Annexe. ESSAI DE DETERMINATION D'UN PAQUET D'ONDE PAR SUPERPOSITION D'ONDES PLANES REPRESENTANT LE PHOTON

Afin d'obtenir un champ électrique $\vec{E}$ qui ne présente de valeurs notables qu'au voisinage de l'axe Ox, admettons d'abord qu'il soit représenté par

$$A(1) \quad \vec{E} = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} (E_x,E_y,E_z)e^{-\sigma^2\pi(\beta^2+\gamma^2)}e^{-ik(y\beta+z\gamma+x\sqrt{1-\gamma^2-\beta^2})}\, e^{i\omega t}\, d\beta\, d\gamma$$

qui satisfait l'équation de Helmoltz. Comme div$\vec{E}$ = 0, il faut que

$$E_x\sqrt{1-\gamma^2-\beta^2} + E_y\beta + E_z\gamma = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha'\alpha + \beta'\beta + \gamma'\gamma = 0$$

si α, β, γ, sont les cos directeurs de la direction de propagation d'une onde plane élémentaire et α', β', γ' ceux de $\vec{E}$, ce qui revient à dire que le champ électrique est perpendiculaire à la direction de propagation. Choisissons $\beta' = 0$; on a alors

$$\alpha'\alpha + \gamma'\gamma = 0 \quad , \quad \alpha'^2 + \gamma'^2 = 1 .$$

D'où, en convenant que γ' est positif

$$\gamma' = \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{1-\beta^2}} \quad , \quad \alpha' = -\frac{\gamma}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$E_x = \alpha' E \quad , \quad E_y = 0 \quad , \quad E_z = \gamma' E$$

E étant un scalaire qui peut être complexe.

Si σ est assez grand, l'intégrale n'a de valeur significative que dans la zone où β et γ sont petits, par exemple si $\sigma = 1000$, $\exp(-\sigma^2\pi(\beta^2+\gamma^2)) < 10^{-6}$ si $\beta = \gamma > 10^{-3}$. Il en résulte

1°) qu'on peut sans erreur sensible intégrer de

$-\infty$ à $+\infty$ au lieu de -1 à $+1$ ou même au lieu de $-\beta_1$ à $+\beta_1$. Ainsi pour $\sigma = 1000$, l'erreur relative sur $\exp(-\sigma^2\pi\beta^2)$ serait environ $5\ 10^{-6}$ pour $\beta_1 = 0{,}001$ et ne serait plus que $1{,}5\ 10^{-9}$ pour $\beta_1 = 0{,}004/\pi$.

2°) que dans le calcul de l'intégrale, on peut négliger β^2 et γ^2 devant l'unité c'est ce que nous appelerons la première approximation.

1ère approximation

Dans cette première approximation, $\gamma' = 1$ et $\alpha' = -\gamma$, $\alpha = 1$. Calculons d'abord E_z. Les intégrales en β et γ se séparent et en remplaçant k par $2\pi/\lambda = \frac{\omega}{c}$

A(2) $$E_z = E\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma^2\pi\beta^2} e^{-i2\pi\beta\frac{y}{\lambda}}\, d\beta \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma^2\pi\gamma^2} e^{-i2\pi\gamma\frac{z}{\lambda}}\, d\gamma \times e^{i\omega(t-\frac{x}{c})}$$

Pour la première intégrale, on écrit

$$\sigma^2\beta^2 + 2\beta\frac{y}{\lambda} i = \left(\sigma\beta + \frac{iy}{\lambda\sigma}\right)^2 + \left(\frac{y}{\lambda\sigma}\right)^2$$

et on prend comme nouvelle variable $u = \sigma\beta + \frac{iy}{\lambda\sigma}$.

L'intégrale devient

$$\int_\Gamma e^{-\pi u^2}\frac{du}{\sigma} \times e^{-\pi(\frac{y}{\lambda\sigma})^2}$$

u décrit dans son plan complexe une courbe qui pour $\beta = \pm\infty$ est telle qu'en posant $u = p\, e^{i\phi}$, ϕ tend vers zéro, $\cos 2\phi$ est positif et

$$p\, e^{-\pi p^2(\cos 2\phi + i \sin 2\phi)}$$ tend vers zéro.

La valeur de l'intégrale est donc la même que si on intègre en valeurs réelles de u entre $-\infty$ et $+\infty$, ce qui donne

$$\frac{1}{\sigma} e^{-(\frac{y}{\lambda\sigma})^2}.$$

D'ailleurs, on aurait pu écrire directement ce résultat en remarquant que l'intégrale n'est autre que la transformée de Fourier de $\exp(-\sigma^2\pi\beta^2)$.

Le calcul de l'intégrale en γ est le même et au total

A(3) $$E_z = E\frac{1}{\sigma^2} e^{-\pi\frac{y^2+z^2}{\lambda^2\sigma^2}} e^{i\omega(t-\frac{x}{c})}$$

Le calcul de E_x ne diffère du précédent qu'en affectant du facteur $-\gamma$ l'intégrand de l'intégrale en γ qui devient, avec $\gamma = (u - \frac{iz}{\lambda\sigma})/\sigma$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi u^2}\left(u - \frac{iz}{\lambda\sigma}\right)\frac{1}{\sigma^2}\, du \times e^{-\pi(\frac{z}{\lambda\sigma})^2} = \frac{iz}{\lambda\sigma^3} e^{-\pi(\frac{z}{\lambda\sigma})^2}$$

D'où

$$E_x = E\frac{iz}{\lambda\sigma^3} e^{-\pi\frac{y^2+z^2}{\lambda^2\sigma^2}} e^{i\omega(t-\frac{x}{c})}$$

quant aux champs magnétiques, ils sont pour chaque onde individuelle donnés par

$$H_y = \frac{i}{k}(\partial_z E_x - \partial_x E_z) = \gamma E_x - \alpha E_z = (\gamma\alpha' - \alpha\gamma')E;$$

$$H_x = \beta E_z = \beta\gamma' E, \qquad H_z = -\beta E_x = -\alpha'\beta E.$$

Nous ne faisons pas intervenir ici le facteur $\sqrt{\varepsilon/\mu}$, le photon n'existant que dans le vide (système d'unité mixte $\varepsilon = \mu = 1$).

On a donc dans la première approximation

$$H_y = E(-\gamma^2-1) \simeq -E, \quad H_x = \beta E, \quad H_z = \gamma\beta E \simeq 0$$

d'où suivant le même calcul que précédemment

$$H_y = -E\frac{1}{\sigma^2} e^{-\pi\frac{y^2+z^2}{\lambda^2\sigma^2}} e^{i\omega(t-\frac{x}{c})}, \quad H_x = -E\frac{iy}{\lambda\sigma^2} e^{-\pi\frac{y^2+z^2}{\lambda^2\sigma^2}} e^{i\omega(t-\frac{x}{c})}, \quad H_z = 0.$$

La densité d'énergie moyenne en un point donné (c'est-à-dire ne comprenant pas les termes qui dépendent du temps) est

A(4) $\frac{1}{4}(\vec{E}\vec{E}^*+\vec{H}\vec{H}^*) = \frac{EE^*}{4\sigma^4}(2 + \frac{y^2+z^2}{\lambda^2\sigma^4})e^{-2\pi\frac{y^2+z^2}{\lambda^2\sigma^2}}$.

Dans une tranche x, l'intégration de l'énergie de $r = \sqrt{y^2+z^2} = 0$ à $r = \infty$ donne bien une valeur finie, mais pour pouvoir exprimer que l'énergie totale du paquet d'onde est $\hbar\omega$, il faut obtenir un amortissement en x.
On peut y parvenir en considérant que dans (1) les ondes élémentaires ne sont pas exactement monochromatiques, mais que la pulsation est égale à $\omega(1+\varepsilon)$, avec un facteur $e^{-\pi\varepsilon^2\sigma'^2}$, seules les valeurs de ε voisines de zéro étant significatives. k est égale à $\omega(1+\varepsilon)/c$ et (1) devient

A(5) $$\vec{E} = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+\infty}(E_x,E_y,E_z)e^{-\sigma^2\pi(\beta^2+\gamma^2)}$$
$$e^{-i\omega\frac{(1+\varepsilon)}{c}(y\beta+z\gamma+x\sqrt{1-\beta^2-\gamma^2})}e^{-\varepsilon^2\sigma'^2}e^{i\omega(1+\varepsilon)t}d\beta d\gamma d\varepsilon.$$

Pour simplifier l'expression, adoptons les coordonnées réduites $x/\lambda = \bar{x}$, $y/\lambda = \bar{y}$, $z/\lambda = \bar{z}$, λ étant la longueur d'onde de base $2\pi c/\omega$, et de même remplaçons t par $\bar{t}T = 2\pi\bar{t}/\omega$. De plus, négligeons les produits $E\beta$ et $E\gamma$, de même que $\beta^2+\gamma^2$ sous le radical

A(6) $$\vec{E} = \int_{-1}^{+1}d\beta\int_{-1}^{+1}d\gamma\int_{-1}^{\infty}d\varepsilon(E_x,E_y,E_z)e^{-\pi(\sigma^2(\beta^2+\gamma^2)+\sigma'^2\varepsilon^2)}$$
$$e^{-2\pi i(\bar{y}\beta+\bar{z}\gamma+x)}e^{-2\pi i(1+\varepsilon)(\bar{x}-\bar{t})}$$

L'intégration en β et γ se fait comme précédemment, et il reste l'intégrale en ε soit pour Ez :

$$E_z = E\,\frac{1}{\sigma^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\pi\frac{\bar{y}^2+\bar{z}^2}{\sigma^2}}e^{-\pi\sigma'^2\varepsilon^2}e^{-2\pi i(1+\varepsilon)(\bar{x}-\bar{t})}$$

qui se calcule comme les intégrales en β et γ, en

A(7) $E_z = \frac{E}{\sigma^2\sigma'}e^{-\pi(\frac{\bar{y}^2+\bar{z}^2}{\sigma^2}+\frac{(\bar{x}-\bar{t})^2}{\sigma'})}e^{-2\pi i(\bar{x}-\bar{t})}$

et de même

$$E_x = \frac{i\bar{z}}{\sigma^2}E_z\ ,\ E_y = 0\ ,\ H_x = -\frac{i\bar{y}}{\sigma^2}E_z\ ,\ H_y = -E_z,\ H_z = 0.$$

La densité d'énergie est donc

A(8) $\frac{1}{4}(\vec{E}\vec{E}+\vec{H}\vec{H}) = \frac{EE^*}{4\sigma^4\sigma'^2}(2 + \frac{\bar{y}^2+\bar{z}^2}{\sigma^4})\,e^{-2\pi(\frac{\bar{y}^2+\bar{z}^2}{\sigma^2}+\frac{(\bar{x}-\bar{t})^2}{\sigma'^2})}$.

Si maintenant on ajoute une onde déphasée de $\frac{\pi}{2}$ en faisant pour chaque onde individuelle $E'_y = -iE\beta'$, $E'_z = -iE\gamma'$, $E'_x = -iE\alpha'$
avec $\gamma' = 0$, $\beta' = \sqrt{1-\frac{\beta^2}{1-\gamma^2}} \simeq 1$, $\alpha' = -\frac{\beta}{\sqrt{1-\gamma^2}} \simeq -\gamma$.

On obtient ainsi par superposition une onde polarisée circulaire droite (dans les coordonnées yOz), ce qui est plus représentatif du photon.
On obtient alors

$$E'_x = i\beta E,\quad E'_y = -iE,\quad E'_z = 0$$
$$H'_x = i\gamma E,\quad H'_y = 0\ ,\quad H'_z = -iE$$

d'où par le même calcul que précédemment

$$E'_x = -\frac{i\bar{y}}{\sigma^2}E_z\ ,\ E'_y = -iE_z\ ,\ E'_z = 0$$
$$H'_x = -\frac{i\bar{z}}{\sigma^2}E_z\ ,\ H'_y = 0\ ,\ H'_z = -iE_z$$

et pour les champs totaux $\mathcal{E} = \vec{E}+\vec{E}'$, $\mathcal{H} = \vec{H}+\vec{H}'$

$$\mathcal{E}_x = \frac{\bar{y}+i\bar{z}}{\sigma^2}E_z,\quad \mathcal{E}_y = -iE_z\ ,\quad \mathcal{E}_z = E_z$$
$$\mathcal{H}_x = \frac{\bar{z}-i\bar{y}}{\sigma^2}E_z,\quad \mathcal{H}_y = E_z\ ,\quad \mathcal{H}_z = -iE_z\ .$$

La densité d'énergie devient

A(9) $\frac{1}{4}(\mathcal{E}\mathcal{E}^*+\mathcal{H}\mathcal{H}^*) = \frac{EE^*}{2\sigma^4\sigma'^2}(2 + \frac{\bar{y}^2+\bar{z}^2}{\sigma^4})e^{-2\pi(\frac{\bar{y}^2+\bar{z}^2}{\sigma^2}+\frac{(\bar{x}-\bar{t})^2}{\sigma'^2})}$

elle est simplement doublée par rapport à (5).
Intégrons maintenant dans tout l'espace.
On a, pour t donné,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi\frac{(\bar{x}-\bar{t})^2}{\sigma'^2}}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi\frac{(\frac{x}{\lambda}-\bar{t})^2}{\sigma'^2}}\,dx = \frac{\lambda\sigma'}{\sqrt{2}}$$

et en prenant comme variable $R = y^2+z^2 = \lambda^2(\bar{y}^2+\bar{z}^2) = \lambda^2 r^2$

$$\int_0^\infty \left(2+\frac{r^2}{\lambda^2\sigma^4}\right) e^{-2\pi\frac{r^2}{\lambda^2\sigma^2}}\,2\pi r\,dr = \int_0^\infty \left(2+\frac{1}{\lambda^2\sigma^4}R\right) e^{-2\pi\frac{R}{\lambda^2\sigma^2}}\,\pi\,dR$$

$$= \frac{\sigma^2\lambda^2}{\pi} + \frac{\lambda^2}{4\pi^2} = \lambda^2\left(\frac{\sigma^2}{\pi}+\frac{1}{4\pi^2}\right) \simeq \lambda^2\frac{\sigma^2}{\pi},$$

σ^2 étant en principe très grand par rapport à $1/4\pi$.
Au total

$$\int_0^\infty 2\pi r\,dr \int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\frac{1}{4}(EE^*+HH) = \frac{EE^*}{2\sigma^4\sigma'^2}\,\frac{\lambda^3\sigma^2\sigma'}{\sqrt{2}\,\pi}$$ qui doit être égal

à $\frac{h}{2\pi}\,\omega$ d'où

$$EE^* = \frac{\sqrt{2}\sigma^2\sigma'}{\lambda^3}\,h\omega = \frac{2\pi\sqrt{2}\sigma^2\sigma' c}{\lambda^4}\,h$$

$$|E| = \sqrt{2\pi\sqrt{2}\sigma' ch}\,\frac{\sigma}{\lambda^2}\,, \quad |E_z| = \sqrt{\frac{2\pi\sqrt{2}ch}{\sigma'}}\,\frac{1}{\sigma\lambda^2}$$

Dans cette approximation, on a obtenu une onde sans étalement.

2ème approximation

Dans cette deuxième approximation, nous conserverons les termes en β^2, γ^2, $\varepsilon\beta$, $\varepsilon\gamma$, mais négligerons les termes de degré supérieur. (5) devient alors

$$\vec{E} = \int_{-1}^{+1} d\beta \int_{-1}^{+1} d\gamma \int_{-1}^{\infty} d\varepsilon\,(E_x,E_y,E_z)\,e^{-\pi(\sigma^2(\beta^2+\gamma^2)+\sigma'^2\varepsilon^2)}$$

$$e^{-2\pi i(\bar{y}\beta+\gamma\bar{z}+\bar{x}-\bar{x}\frac{\beta^2+\gamma^2}{2})}\,e^{-2\pi i\varepsilon(\bar{y}\beta+\gamma\bar{z}+\bar{x})}\,e^{2\pi i(1+\varepsilon)\bar{t}}$$

L'intégrale en β est

$$\int e^{-\pi[\beta^2(\sigma^2-i\bar{x})+2i\bar{y}\beta(1+\varepsilon)]}\,d\beta = \int e^{-\pi\left[\beta\sqrt{\sigma^2-i\bar{x}}+\frac{iy(1+\varepsilon)}{\sqrt{\sigma^2-i\bar{x}}}\right]^2 - \pi\frac{\bar{y}^2(1+\varepsilon)^2}{\sigma^2-ix}}$$

soit en posant

$$u = \beta\sqrt{\sigma^2-i\bar{x}} + \frac{i\bar{y}(1+\varepsilon)}{\sqrt{\sigma^2-i\bar{x}}}\,,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi u^2}\,\frac{du}{\sqrt{\sigma^2-i\bar{x}}}\,e^{-\pi\frac{\bar{y}^2(1+\varepsilon)^2}{\sigma^2-i\bar{x}}} = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2-i\bar{x}}}\,e^{-\pi\frac{(1+\varepsilon)^2\bar{y}^2}{\sigma^2-i\bar{x}}}$$

L'intégrale en γ se calcule de la même manière. Il reste

$$\int_{-1}^{\infty} d\varepsilon\;e^{-\pi\left(\varepsilon^2\left(\sigma'^2+\frac{\bar{y}^2+\bar{z}^2}{\sigma^2-i\bar{x}}\right)+\varepsilon\left(2i(\bar{x}-\bar{t})+2\frac{\bar{y}^2+\bar{z}^2}{\sigma^2-i\bar{x}}\right)\right)}\,e^{-\pi\frac{\bar{y}^2+\bar{z}^2}{\sigma^2-i\bar{x}}} \times e^{-2\pi i(\bar{x}-\bar{t})} \times \frac{1}{\sigma^2-i\bar{x}}\,.$$

La parenthèse s'écrit

$$\left[\varepsilon\sqrt{\sigma'^2+\frac{\bar{y}^2+\bar{z}^2}{\sigma^2-i\bar{x}}} + \frac{i(\bar{x}-\bar{t})+\frac{\bar{y}^2+\bar{z}^2}{\sigma^2-i\bar{x}}}{\sqrt{\sigma'^2+\frac{\bar{y}^2+\bar{z}^2}{\sigma^2-i\bar{x}}}}\right]^2 + \frac{(\bar{x}-\bar{t})^2-2i(\bar{x}-\bar{t})\frac{\bar{y}^2+\bar{z}^2}{\sigma^2-i\bar{x}}-\left(\frac{\bar{y}^2+\bar{z}^2}{\sigma^2-i\bar{x}}\right)^2}{\sigma'^2+\frac{\bar{y}^2+\bar{z}^2}{\sigma^2-i\bar{x}}}$$

et l'intégrale devient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi u^2}\,du\,\frac{1}{(\sigma^2-i\bar{x})\sqrt{\sigma'^2+\frac{\bar{y}^2+\bar{z}^2}{\sigma^2-i\bar{x}}}}\,e^{-\pi\left(\frac{(\bar{x}-\bar{t})^2(\sigma^2-ix)+(-2i(\bar{x}-\bar{t})+\sigma'^2)(\bar{y}^2+\bar{z}^2)}{\sigma'^2(\sigma^2-ix)+\bar{y}^2+\bar{z}^2}\right)}$$

$$\times\,e^{-2\pi i(\bar{x}-\bar{t})}$$

D'où

$$E_z = E \frac{1}{\sqrt{(\sigma^2-i\bar{x})(\sigma'^2(\sigma^2-i\bar{x})+\bar{y}^2+\bar{z}^2}} \times$$

$$\times\, e^{-\pi\frac{(\sigma^2-i\bar{x})(\bar{x}-\bar{t})^2+(-2i(\bar{x}-\bar{t})+\sigma'^2)(\bar{y}^2+\bar{z}^2)}{\sigma'^2(\sigma^2-i\bar{x})\,+\,\bar{y}^2\,+\,\bar{z}^2}} \qquad e^{-2\pi i(\bar{x}-\bar{t})}$$

Calculons $E_zE_z{}^*$. On a

$$\frac{(\sigma^2-i\bar{x})(\bar{x}-\bar{t})^2+(-2i(\bar{x}-\bar{t})+\sigma'^2)(\bar{y}^2+\bar{z}^2)}{\sigma'^2(\sigma^2-i\bar{x})\,+\,\bar{y}^2\,+\,\bar{z}^2} + \text{conj} =$$

$$2\frac{(\sigma'^2(\bar{y}^2+\bar{z}^2)+\sigma^2(\bar{x}-\bar{t})^2)(\bar{y}^2+\bar{z}^2+\sigma^2\sigma'^2)+\sigma'^2(2\bar{x}(\bar{x}-\bar{t})(\bar{y}^2+\bar{z}^2)+\bar{x}^2(\bar{x}-\bar{t})^2)}{\sigma'^4\bar{x}^2\,+\,(\bar{y}^2+\bar{z}^2+\sigma^2\sigma'^2)^2}$$

et en posant $\bar{y}^2 + \bar{z}^2 + (\sigma\sigma')^2 = A$

$$\text{A(10)}\quad E_zE_z{}^* = E\frac{1}{\sqrt{(\sigma^4+\bar{x}^2)(\sigma'^4\bar{x}^2+A^2)}} \times$$

$$e^{-2\pi\frac{A(\sigma'^2(\bar{y}^2+\bar{z}^2)+\sigma^2(\bar{x}-\bar{t})^2)+\sigma'^2(2\bar{x}(\bar{x}-\bar{t})(\bar{y}^2+\bar{z}^2)+\bar{x}^2(\bar{x}-\bar{t})^2)}{\sigma'^4\bar{x}^2\,+\,A^2}}$$

Dans A, on peut considérer que $\bar{y}^2+\bar{z}^2$ est très petit par rapport à $(\sigma\sigma')^2$. Si on le néglige, $E_zE_z{}^*$ se réduit à

$$\text{A(11)}\quad E\frac{1}{\sigma^2(\sigma^4+\bar{x}^2)} \times$$

$$e^{-2\pi\frac{\sigma^2(\sigma'^2(\bar{y}^2+\bar{z}^2)+\sigma^2(\bar{x}-\bar{t})^2)+2\bar{x}(\bar{x}-\bar{t})(\bar{y}^2+\bar{z}^2)+\bar{x}^2(\bar{x}-\bar{t})^2}{\sigma'^2(\sigma^4\,+\,\bar{x}^2)}}$$

Enfin, σ et σ' étant grands, si on ne retient que les termes contenant σ ou σ' et qu'on néglige $\bar{x}^2$ par rapport à σ^4, on retrouve $E_zE_z{}^*$ d'après (7).
A(10) montre cette fois qu'il y a étalement, à cause du dénominateur $\sigma'^4\bar{x}^2 + A^2$.