

Annales de la Fondation Louis de Broglie,
Vol. 9, n° 3, 1984

THÉORIE DES PLANCKTONS

par Jean RICARD

(manuscrit reçu le 16 Mars 1981)

Note de la Rédaction

L'article qu'on va lire ci-dessous est un article posthume de M. Jean Ricard, disparu le 14 Mai 1981. Cette publication est pour nous l'occasion de saluer la mémoire d'un homme qui fut un participant assidu au séminaire de la Fondation Louis de Broglie depuis ses débuts et dont la carrière fut assez peu ordinaire.

Ancien élève de l'Ecole Polytechnique, où il était entré en 1918, puis diplômé de l'Ecole Supérieure d'Electricité, M. Jean Ricard fut dans la première partie de sa vie un ingénieur. Son activité fut dirigée essentiellement vers les centrales thermiques, dont il devint un spécialiste de renom international. Il professa à ce titre à l'Ecole Supérieure d'Electricité, de 1937 à 1968, un cours qui devait connaître trois éditions successives.

Se retirant relativement tôt de la vie industrielle, il put se consacrer à ce qui avait été son aspiration de toujours, la science fondamentale. Entré en 1965 dans le groupe de recherches de M. O. Costa de Beauregard, il soutint en 1974 (à 74 ans) une thèse remarquée sur "Le déplacement de Goos et Hänchen dans un faisceau limité". Dans toute cette période et jusqu'à sa mort, ses recherches portèrent principalement sur l'Electromagnétisme et l'Optique ; elles se traduisirent par une quinzaine de publications, la plupart dans les Comptes-rendus de l'Académie des Sciences. D'autre part, dans ces Annales elles-mêmes, nous avons eu le privilège de publier un travail de lui sur la Thermodynamique relativiste

(Vol. 4, p. 243, 1979) et, dans notre dernier numéro (Vol. 9, p. 101, 1984), un autre travail sur le non-étalement du paquet d'ondes. Outre leur originalité, toutes ces recherches ont une caractéristique commune, et remarquable : parvenir, en dépit de toutes les difficultés et grâce à une ingéniosité certaine, à une solution rigoureuse du problème abordé.

Le manuscrit que nous publions aujourd'hui, et dans le titre duquel on perçoit le petit clin d'oeil de l'homme à la fois enthousiaste et modeste qu'était Jean Ricard, représente une tentative intéressante dans la recherche d'une solution aux problèmes actuels de la Physique quantique.

Un dernier mot encore. A son apport intellectuel à la Science, Jean Ricard avait voulu ajouter celui de sa générosité. Fondateur en 1973 du prix qui porte son nom à la Société française de Physique, il a légué à la Fondation Louis de Broglie une somme importante destinée à favoriser l'éclosion d'idées nouvelles en Microphysique. C'est donc un double hommage à sa mémoire que les Annales lui rendent ici.

La Rédaction

TABLE DES MATIERES

§ 1 - Introduction et principe de la théorie	p. 181
§ 2 - Association entre onde et plancktons	p. 185
§ 3 - Cas d'une onde électromagnétique	p. 189
§ 4 - Introduction de la largeur de l'onde détectable	p. 199
§ 5 - Nature de la fonction de répartition des densités de plancktons	p. 209
§ 6 - Calcul d'interférences (ondes électromagnétiques)	p. 211
§ 7 - Application numérique (ondes électromagnétiques)	p. 216

THÉORIE DES PLANCKTONS

PREMIERE PARTIE

§ 1 - Introduction et principe de la théorie

La théorie qui est exposée ici a l'ambition d'expliquer les difficultés d'interprétation des phénomènes d'interférences dans lesquels les franges se forment même pour des intensités très faibles, en l'espèce même si à un moment donné l'appareil d'interférence contient en moyenne moins d'une particule. On sait que la théorie quantique admet que l'onde, ou plutôt le paquet d'onde représentatif d'une particule est une onde de probabilité, c'est-à-dire que le carré de l'amplitude de l'onde en un point est proportionnelle à la probabilité de présence (ou plutôt la densité de probabilité de présence) en ce point. Elle admet que cette onde passant dans un appareil d'interférence (fentes d'Young par exemple) se comporte comme une onde physique et peut donner lieu à la formation de franges, c'est-à-dire qu'il existe des zones de maximum et minimum de probabilité de présence. Si une succession de particules de même fonction d'onde, qui donnent lieu aux mêmes franges traversent l'appareil, on aura donc plus de chances de détecter une particule dans les zones de maximum de probabilité que dans les zones de minimum.

La fonction d'onde ψ est en principe complexe et c'est $\psi\psi^*$ qui représente la probabilité de présence. De plus, comme pour une seule particule, la probabilité de présence dans tout l'espace est égale à l'unité, elle doit être normée. Cette fonction ψ est donc très abstraite et ne présente aucun caractère physique. C'est là l'objec-

jection principale qu'on peut faire à cette théorie, car on ne voit pas comment une telle onde pourrait donner lieu à des phénomènes de diffraction et d'interférence. De plus, on sait que tout paquet d'ondes obtenu par superposition d'ondes planes s'étale en progressant. Autrement dit, la particule vieillit. Or ceci est contraire au fait que des photons par exemple provenant de sources très éloignées donnent lieu aux mêmes phénomènes d'interférence que s'ils proviennent d'une source rapprochée.

De Broglie, sous le nom de théorie de double solution, a supposé qu'à côté d'une onde v à caractéristiques physiques et non normée existe une fonction ψ de probabilité normée et proportionnelle à v . De plus, à l'onde v qui est étendue et satisfait une équation de propagation linéaire s'ajoute une onde à caractère non linéaire u , de haute intensité concentrée près d'un point, qui constitue à proprement parler la particule et qui est en phase avec l'onde v . Cette onde u est guidée par l'onde v de sorte que la particule suit une ligne de courant de cette dernière. En outre, la particule subit l'action d'un "milieu subquantique" et peut sauter d'une manière aléatoire d'une ligne de courant à une autre, ce qui explique la répartition aléatoire des impacts de particules. L'existence de l'onde non linéaire u , permettrait d'expliquer que l'onde totale $v + u$, ne subit pas d'étalement. Cependant, on ne peut actuellement considérer que cette théorie est véritablement achevée, tant en ce qui concerne l'expression de l'onde u , non linéaire, que la nature du milieu subquantique.

La théorie que nous présentons est différente et repose sur les deux idées suivantes :

1°) Ce qui est quantifié c'est une action, c'est-à-dire le produit d'une énergie par une durée. La quantification en énergie $h\nu$, h étant la constante de Planck, n'intervient que si on est en présence d'un phénomène oscillatoire de fréquence ν . Il est donc naturel de supposer qu'il existe des quantum d'action $h = w_p t_p$ que nous

appellerons "plancktons", w_p étant une énergie qui peut prendre des valeurs différentes suivant une loi de répartition

$$(1) \quad \phi(w_p) = \frac{dn_p/N}{dw_p} \quad \text{avec} \quad \int_0^{\infty} \phi(w_p) dw_p = 1,$$

N étant la densité totale de plancktons et dn_p la densité de plancktons correspondant à l'écart d'énergie dw_p . La durée $t_p = h/w_p$ a une signification physique qui sera examinée plus loin. L'énergie moyenne des plancktons est

$$(2) \quad w_{pm} = \int_0^{\infty} \phi(w_p) w_p dw_p$$

De plus, h ayant mêmes dimensions qu'un moment cinétique, il est naturel d'associer à tout planckton un moment cinétique.

2° A une onde électromagnétique ou "matérielle" (nous entendons par onde matérielle une onde associée à des particules matérielles) est associée une assemblée de plancktons qui se déplacent à la vitesse de propagation de l'énergie. La densité de ces plancktons peut être fluctuante, mais la densité moyenne de l'énergie est proportionnelle au carré de l'amplitude de l'onde. Il en est de même de la densité moyenne des plancktons, si on admet, même pour un paquet d'onde, que la fonction $\phi(w_p)$ ne dépend pas de la fréquence, auquel cas w_{pm} est constant suivant (2) (voir à ce sujet le § 4, après (31)).

Les plancktons ne sont pas des particules et ne sont pas détectables, sauf ceux pour lesquels $t_p = 1/\nu$, ν étant la fréquence de l'onde. Les plancktons détectables se manifestent à l'état de particules. Nous verrons au § 3 comment on peut justifier cette propriété fondamentale. On peut donc considérer que tous les autres plancktons

pour lesquels $t_p \neq 1/v$ sont "virtuels". En employant ce terme, nous ne voulons pas dire qu'ils n'existent pas, mais seulement qu'ils ne sont pas détectables. Il faut donc distinguer une onde "totale" qui correspond à la totalité des plancktons, et une onde "détectable" qui ne correspond qu'aux plancktons détectables. Les densités des plancktons des deux ondes sont proportionnelles (voir § 3 et 4). Mais du fait qu'elles peuvent être fluctuantes et que le nombre de plancktons dans un volume donné est entier alors que l'intensité de l'onde est quelconque, il faut plutôt parler de densités probables que de densités.

Une onde, même matérielle, a une signification concrète en tant que représentant une densité de plancktons, mais ceci n'est vrai que si cette densité est suffisante. Pour des plancktons très espacés par rapport à la longueur d'onde, cette signification disparaît. Mais la densité des plancktons de l'onde totale étant beaucoup plus grande que celle de l'onde détectable, l'onde totale peut garder une signification même pour une onde détectable de très faible intensité et donner lieu à des phénomènes d'interférence. Les densités probables de particules détectables étant proportionnelles à celles des plancktons totaux, on doit observer dans la zone d'interférence des nombres d'impact en un point qui suivent l'intensité de l'onde totale. Telle est la propriété de base suivant laquelle notre théorie explique la formation de franges d'interférence, même si l'appareil ne contient en moyenne à un instant donné que moins d'un planckton détectable.

Précisons que quand nous employons le terme d'onde détectable, nous ne voulons pas dire par là que les champs sont directement mesurables, mais seulement que les particules qu'elle transporte le sont. Dans le cas électromagnétique, les champs ont une signification physique indépendante de celle de densité de particules.

Pour une onde hertzienne dont on mesure les champs dans un appareil de réception, le nombre de photons peut être très grand, de l'ordre de 10^9 par période et par cm^2 . La mesure est équivalente à celle de ce nombre. Pour une onde lumineuse de faible intensité ce nombre peut s'abaisser à 10^{-9} par période et par cm^2 . L'onde perd alors toute signification en tant que représentant une densité de photons. Ce que l'oeil apprécie, c'est cette densité et non pas les champs.

§ 2 - Association entre onde et plancktons

La nature de cette association est au coeur même du problème de la dualité onde-particule. Dans la théorie quantique orthodoxe, on admet que l'onde ψ associée à une particule est une onde de probabilité telle que $|\psi|^2$, une fois normalisé représente la densité de probabilité de présence. Ceci n'est qu'un postulat qui est à la base de tous les calculs de mécanique quantique, et qui ne se trouve justifié que par l'accord avec l'expérience des résultats de ces calculs.

Notre théorie est à cet égard quelque peu différente. Nous associons à une onde totale une assemblée de plancktons dont les positions, à un instant donné, sont bien déterminées, tout en étant fluctuantes, et il est naturel d'admettre que la densité virtuelle d'énergie $\sum_p w_p$, n_p étant la densité des plancktons d'énergie w_p , est proportionnelle au carré de l'amplitude de l'onde. On sait en effet que dans tout phénomène oscillatoire, l'énergie est proportionnelle au carré de l'amplitude, ce qui est bien connu par exemple pour un oscillateur harmonique ou pour une onde électromagnétique.

Faisons ici un rapprochement avec la théorie cinétique des gaz dans le cas d'une onde de pression qui satisfait

$$(3) \quad \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u = A \sin \frac{2\pi}{T} \left[t - \frac{x}{\sqrt{E/\rho}} \right],$$

u étant le déplacement au point x , ρ la masse spécifique et E le module d'élasticité. Ce dernier dans le cas adiabatique est égal à $-\frac{dp}{\frac{dv}{v}} = \gamma p$ (p , pression, v , volume spécifique, γ rapport C_p/C_v des chaleurs spécifiques à pression ou volume constant). La vitesse de propagation $\sqrt{E/\rho}$ ne peut être considérée comme constante que si les variations de p et de v sont très petites. Comme $\frac{\partial u}{\partial v} = \frac{v-v_0}{v_0}$, on peut développer $\frac{p}{p_0}$ suivant

$$(4) \quad \frac{p}{p_0} = \left[1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 1 - \gamma \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\gamma}{2} (1+\gamma) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \dots$$

Le supplément de pression par rapport à la pression statique p_0 est en moyenne dans le temps proportionnel à $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$, donc au carré de l'amplitude A^2 , le terme $-\gamma \frac{\partial u}{\partial x}$ donnant en moyenne une contribution nulle. La densité d'énergie cinétique $E_C = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2$ et d'énergie potentielle $E_p = \frac{1}{2} \frac{p^2 - p_0^2}{E}$ avec $p = p_0 - E \frac{\partial u}{\partial x}$, sont toutes deux également proportionnelles à A^2 , en moyenne dans le temps et égales toutes deux à

$$(5) \quad E_C = E_p = \rho \frac{\pi^2 A^2}{T^2}.$$

Bien entendu, une telle onde de pression est de nature très différente des ondes électromagnétiques ou matérielles que nous considérons. Ce rapprochement n'a d'autre but que de montrer qu'on peut associer à une assemblée de molécules dont les positions ne sont pas mesurables, une onde telle que le carré de son amplitude soit proportionnelle à la densité d'énergie ou à la pression (qui a même dimension qu'une densité d'énergie) qui

sont des grandeurs macroscopiques mesurables. Il n'est donc pas absurde d'associer également à une assemblée de plancktons une onde électromagnétique ou matérielle dont le carré de l'amplitude est proportionnel à la densité moyenne d'énergie dans le temps.

Si pour l'onde de pression, la densité des molécules devient très faible au point qu'il n'y a plus que quelques molécules dans le volume considéré, et que le libre parcours moyen devient grand par rapport aux dimensions de ce volume, les propriétés du gaz changent complètement et on ne peut plus parler d'une onde de pression qui perd toute signification. Il doit en être de même pour l'onde électromagnétique ou l'onde matérielle si la densité des plancktons devient très faible. Mais si on diminue la densité des plancktons, cette circonstance se produit pour l'onde détectable bien avant que pour l'onde totale.

Alors que dans l'onde électromagnétique, le champ électrique est mesurable, tout au moins pour une onde hertzienne de faible fréquence, alors que les photons ne sont détectés que par les phénomènes qu'ils provoquent (effet photoélectrique), dans le cas des ondes matérielles, ce sont les particules qui se manifestent (par exemple traces des électrons dans une chambre à bulles), la nature de l'onde étant inconnue. Mais même dans ce deuxième cas, l'onde a une signification concrète, en ce sens que le carré de son amplitude représente une densité moyenne d'énergie.

Si on superpose deux ondes, ce sont les élongations qui s'additionnent et non pas les densités d'énergie. Ainsi, si on superpose deux ondes identiques, la densité des plancktons de l'onde totale est 4 fois plus grande de celle des plancktons de chacune des ondes. Ce fait peut sembler quelque peu paradoxal. Mais si on superpose deux flux d'électrons de chacun N électrons par se-

conde, on obtient bien un flux $2N$; par contre si l'amplitude de l'onde totale est $K\sqrt{2N}$, celle des ondes partielles est non pas $K\sqrt{N}$ mais $K\sqrt{N/2}$ de sorte que $2\sqrt{N/2} = \sqrt{2N}$.

Nous avons dit plus haut qu'il était nécessaire de substituer la notion de densité probable de plancktons à celle de densité. Dans la théorie cinétique des gaz que nous avons évoquée, le nombre de molécules dans un volume donné est entier alors que la densité d'énergie, dans une onde de pression, est quelconque. D'autre part la densité des molécules subit des fluctuations. Pour concilier ces points de vue, on est amené à considérer que la densité d'énergie est proportionnelle à un nombre probable de molécules par unité de volume, qui peut être fractionnaire. Mais pour que ceci ait un sens, il faut évidemment que la densité des molécules soit suffisamment grande pour que suivant la direction de propagation la distance moyenne entre molécules soit petite par rapport à la longueur d'onde et pour que les fluctuations soient petites.

De même, pour l'onde associée à des plancktons, on admettra que le carré de l'amplitude est proportionnelle à la densité probable d'énergie des plancktons, et que cette densité est suffisamment grande, dans l'onde totale pour que suivant la direction de propagation la distance moyenne entre plancktons soit petite par rapport à la longueur d'onde et que les fluctuations de densité soient petites eu égard au dispositif en cause, par exemple sur la largeur d'une fente d'Young. Par contre, la densité probable des plancktons détectables étant beaucoup plus petite que celle des plancktons de l'onde totale, il se peut que les conditions précédentes ne soient plus remplies pour l'onde détectable, et il n'y a plus de limitation inférieure à la densité des plancktons détectables. Mais comme celle-ci est fonction de la densité des plancktons de l'onde totale et que c'est cette dernière qui commande les interférences, on explique ainsi comme dit dans l'Introduction les formations de franges pour des faisceaux de très faible in-

tensité.

Nous avons dit qu'une onde associée à des plancktons a une signification concrète même pour une onde matérielle, ce qui constitue une différence avec la théorie quantique orthodoxe pour laquelle il ne s'agit que d'ondes de probabilité. En fait, on peut bien entendu considérer un paquet d'ondes dont l'intensité s'annule à l'infini et qui est tel que le nombre total probable de plancktons détectables est justement égal à l'unité. Dans ce cas particulier, la notion de densité probable de plancktons détectables se rapproche de la notion quantique de probabilité de présence. Ce cas sera examiné au § 12, mais dès maintenant, indiquons qu'il subsiste une différence essentielle. Dans la théorie quantique orthodoxe, une particule est associée à une onde de probabilité qui doit rester identique à elle-même lorsque la particule se déplace, quelle que soit la distance parcourue, puisque la particule (un électron par exemple) doit rester identique à elle-même. Or on sait que tel n'est pas le cas d'un paquet d'ondes obtenu par superposition d'ondes planes, puisqu'un tel paquet s'étale en progressant (voir Annexe 3). Or si le paquet s'étale, la particule ne garde pas la même structure et "vieillit". Au contraire dans notre théorie, il n'y a pas contradiction. Si l'onde s'étale, ce n'est pas la particule qui vieillit ; on peut toujours définir en chaque point une densité probable de plancktons dans l'onde totale, donc aussi une densité de particules détectables. D'ailleurs, même si le nombre total probable de particules dans le paquet est un, ceci ne veut pas dire qu'il reste rigoureusement égal à l'unité.

§ 3 - Cas d'une onde électromagnétique

Examinons d'abord le cas simple d'une onde plane homogène monochromatique polarisée circulairement. Bien qu'une telle onde indéfinie ne puisse exister, cette étude sera une introduction au cas d'une onde quelconque qui peut être considérée comme une superposition d'ondes

planes.

Soit l'onde

$$(6)1 \quad E_x = C_d \cos 2\pi\nu \left[t - \frac{z}{c} \right] = H_y$$

$$(6)2 \quad E_y = C_d \sin 2\pi\nu \left[t - \frac{z}{c} \right] = -H_x$$

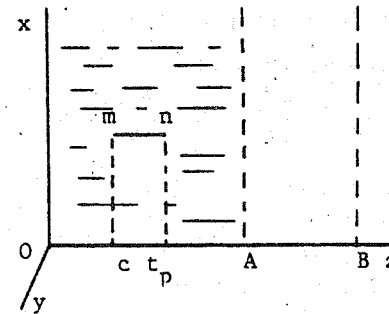
C_d étant constant, dont la densité d'énergie est $\frac{1}{2}[E_x^2 + E_y^2 + H_x^2 + H_y^2] = C_d^2$ et le flux d'énergie $c[E_x H_y - E_y H_x] = c C_d^2$, tous deux constants. Si n_d est la densité de photons détectables qui ont tous pour énergie $w_d = h\nu$, on a donc $C_d^2 = n w_d$. Nous avons affecté C_d de l'indice d pour marquer qu'il s'agit d'une onde détectable. C_d^2 représente la densité d'énergie des photons, soit $n_d w_d$, n_d étant la densité des photons, et w_d leur énergie qui est ici constante. Si nous appelons K le rapport n_t/n_d de la densité probable des plancktons de l'onde totale à n_d , le rapport des densités d'énergie est $K w_{pm}/w_d$, w_{pm} étant l'énergie moyenne des plancktons de l'onde totale. Celle-ci est représentée par

$$(7)1 \quad E_{tx} = C \cos 2\pi\nu \left[t - \frac{z}{c} \right] = H_{ty} \quad \text{avec } C = C_d \sqrt{\frac{w_{pm}}{w_d}}$$

$$(7)2 \quad E_{ty} = C \sin 2\pi\nu \left[t - \frac{z}{c} \right] = -H_{tx}$$

Bien entendu, les E_t et H_t ne sont pas à proprement parler des champs puisqu'ils ne sont pas détectables en tant que tels. Leur signification est que leurs carrés représentent des densités d'énergie. Comme par définition, nous avons posé $h = w_p t_p$, on peut dire que t_p est la période d'une onde fictive dont la fréquence serait w_p/h . Mais ceci est purement formel car nous verrons que t_p n'est égal

à la période de l'onde réelle que pour les plancktons détectables. Physiquement, nous donnerons de t_p une autre définition en postulant que t_p est la durée de vie d'un planckton qui est supposé se déplacer à la vitesse c de la lumière, w_p étant bien entendu une énergie relativiste puisqu'un planckton n'a pas d'énergie au repos. En suivant avec la vitesse c l'unité de volume contenant un nuage de plancktons s'il apparaît un planckton au temps t , il disparaît au temps $t + t_p$, et on peut représenter son trajet en prenant z comme abscisse par un segment $mn = ct_p$. Pour



l'ensemble des plancktons (w_p, t_p) on aura un ensemble de tels segments qui sont représentés sur la fig. 1 en projection sur zOx , sur une longueur $OA = Ct$, T étant la période de l'onde détectable.

Soit n_{ap} la densité d'apparition des plancktons de temps t_p , à partir d'un

fig. 1

instant arbitraire. Tout planckton ayant apparu au temps $t_1 < t - t_p$ a disparu au temps t et tout planckton apparaissant au temps $t_2 > t$ n'est pas en action au temps $t_1 \leq t$. On peut donc appeler densité des plancktons en action n_p au temps t

$$(8) \quad n_p(t) = \int_{t-t_p}^t \frac{dn_{ap}}{dt}(t_1) dt_1$$

Mais l'onde étant homogène, $\frac{dn_{ap}}{dt}$ doit être constant ainsi que n_p , quel que soit le temps considéré. On doit donc

avoir :

$$(9) \quad \frac{dn_{ap}}{dt} = \frac{n_p}{t_p}$$

et pour l'ensemble des plancktons des différentes énergies

$$(10) \quad C^2 = \sum n_p w_p = \sum w_p t_p \frac{dn_{ap}}{dt} = h \sum \frac{dn_{ap}}{dt} = h \frac{dn_a}{dt},$$

$\frac{dn_a}{dt}$ étant la densité d'apparitions par unité de temps de l'ensemble des plancktons. On peut encore dire que la densité d'énergie est égale à la densité d'apparition des plancktons par unité de temps multipliée par h . Si on désigne par $(\Delta n_{ap})_T$ la densité d'apparitions des plancktons pendant la période T de l'onde détectable, on aura

$$(11) \quad (\Delta n_{ap})_T = n_p \frac{T}{t_p} \quad \text{et} \quad C^2 = \sum [\Delta n_{ap}]_T \frac{t_p w_p}{T} = h \sum \frac{(\Delta n_{ap})}{T} T.$$

On peut retrouver la relation (11) en remarquant que si t_p est petit, la contribution d'un planckton à la densité moyenne d'énergie dans la période est $w_p t_p / T$. La densité

moyenne correspondant à $(\Delta n_{ap})_T$ apparitions est donc

$$(\Delta n_{ap})_T \frac{w_p t_p}{T} \quad \text{et comme elle doit être égale à } w_p n_p, \quad (11)$$

en résulte. Si t_p est grand, et de toute façon pour qu'on puisse négliger les plancktons dont une partie seulement de leur durée est dans l'intervalle T , il suffit de considérer un grand nombre N de périodes, tel que $t_p \ll NT$.

$N \cdot (\Delta n_{ap})_T$ étant la densité d'apparitions dans les N périodes, l'énergie moyenne est $(\Delta n_{ap})_T N \frac{w_p t_p}{NT}$ qui doit être égal à $w_p n_p$, ce qui redonne (11).

Faisons maintenant intervenir le moment cinétique des plancktons. $w_p t_p = h$ ayant les dimensions d'un

moment cinétique, il est naturel d'admettre que le moment cinétique d'un planckton est $\sigma_p = \mu w_p t_p$. Pour une onde électromagnétique polarisée circulairement, on sait que la densité de moment cinétique est égale à la densité d'énergie divisée par $\omega = 2\pi/T$, propriété qui se démontre classiquement, par exemple en calculant le couple appliqué à une lame cristalline isotrope, et qui est vérifiée par l'expérience. Pour un photon d'énergie w , on a donc $\sigma = \frac{w}{\omega} = h/2\pi$ comme il est bien connu. Pour l'onde totale et un planckton d'énergie w_p , on peut admettre que

$$(12) \quad \sigma_p = \frac{w_p}{\omega} = \frac{h}{2\pi} \frac{T}{t_p}.$$

Autrement dit, ceci revient à admettre qu'un planckton de l'onde totale associée à une onde détectable de fréquence ν est constitué par des pseudo-champs qui tournent à la même vitesse angulaire que les champs de l'onde détectable, mais l'énergie étant w_p au lieu de w , le moment cinétique est w_p/ω . C'est ceci qui nous a permis de représenter les pseudo-champs de l'onde totale par (7).

C'est le moment cinétique qui fait dépendre le planckton de la fréquence de l'onde détectable. Nous avons admis dans l'introduction que seuls les plancktons de $t_p = T$, période de l'onde, sont détectables, donc qu'une onde de fréquence ν ne peut perdre d'énergie que par quanta $h\nu$. Cette propriété fondamentale peut s'expliquer comme suit à partir de ce qui précède.

Tout d'abord, comme on est en présence d'une assemblée de plancktons, une perte d'énergie de l'onde au passage d'une cible ne peut se faire que par planckton. Il reste à montrer que seuls les plancktons dont la durée est égale à T peuvent être absorbés. En effet considérons un faisceau de section S et de volume $S\lambda$, λ étant la lon-

gueur d'onde. Au temps zéro, ce volume est en $OA = \lambda$ (fig. 1). Entre O et T , il y a constamment des apparitions et disparitions de plancktons dans le volume considéré, mais si une cible est disposée en A , le nombre de plancktons (w_p, t_p) qui ont été en contact avec la cible est $(n_{ap})_T S \lambda = n_p \frac{T}{t_p} S \lambda$ et si une part μ de ces plancktons est absorbée, la diminution d'énergie est égale à l'expression précédente multipliée par μw_p . Au temps T , le volume est en $AB = \lambda$. Si n_p est la densité des plancktons en action en OA avant la cible, et si une proportion μ est absorbée, elle ne sera plus que μn_p après la cible en OB , et la diminution d'énergie est $\mu n_p w_p S \lambda$. On doit donc avoir

$$\mu n_p \frac{T}{t_p} S \lambda w_p = \mu n_p S \lambda w_p$$

ce qui implique que $t_p = T$ ou $w_p = h/t_p = hv$. Si $\mu = 1$, il y a absorption complète et il n'y a plus d'onde détectable après la cible. Nous examinerons plus loin ce que deviennent les plancktons non absorbés de l'onde totale.

On peut d'ailleurs observer que si $t_p = T$, $(\Delta n_{ap})_T = n_p$, tout se passe comme si un planckton de l'onde détectable, lorsqu'il disparaît, était en moyenne remplacé par un autre planckton, c'est-à-dire comme s'il durait indéfiniment à l'état de particule.

On peut reproduire le raisonnement précédent en faisant intervenir la conservation du moment cinétique au lieu de la conservation de l'énergie. Il suffit de remplacer w_p par σ_p .

Remarque concernant l'existence des particules. On a pu discuter de savoir si une particule, un photon par exemple, existe dans l'onde indépendamment de toute absorption. Mais

dire qu'elle existe réellement ou dire qu'elle apparaît seulement lorsqu'elle est absorbée sont deux points de vue équivalents qu'aucune expérience ne permet de départager. En fait, notre théorie montre que la question précédente est mal posée. L'onde totale porte un grand nombre de plancktons qui sont virtuels. Parmi ceux-ci, un petit nombre seulement, ceux pour lesquels $t_p = T$ peuvent être détectés. C'est ceci, et ceci seulement qui définit leur "existence" en tant que particules.

Dans ce qui précède, nous avons considéré les densités n_p des plancktons de chaque énergie w_p comme des quantités discrètes. En fait, il faut tenir compte de la fonction de répartition $\phi(w_p)$ suivant (1) et remplacer n_p par $\frac{dn}{dw_p} dw_p = n \phi(w_p) dw_p$, n étant la densité totale de plancktons. On a alors

$$C^2 = n \int_0^\infty \phi(w_p) w_p dw_p = n w_{pm}$$

w_{pm} étant l'énergie moyenne des plancktons. De même, remplaçons $\frac{dn_{ap}}{dt}$ par $\frac{d}{dw_p} \left(\frac{dn_a}{dt} \right) dw_p = \frac{dn_a}{dt} \phi_a dw_p$ en définissant une fonction ϕ_a de répartition des apparitions de plancktons suivant l'énergie. (9) est alors remplacé par

$$\frac{d}{dw_p} \left(\frac{dn_{ap}}{dt} \right) dw_p = \frac{1}{t_p} \frac{dn}{dw_p} dw_p$$

d'où

$$(13) \quad \frac{dn_a}{dt} = \int_0^\infty \frac{1}{t_p} n \phi dw_p = \frac{n}{h} \int_0^\infty \phi w_p dw_p = n \frac{w_{pm}}{h}$$

et la fonction de répartition ϕ_a est

$$(14) \quad \phi_a = \frac{\frac{d}{dw_p} \left(\frac{dn_a}{dt} \right)}{\frac{dn_a}{dt}} = \phi \frac{w_p}{w_{pm}}$$

On peut donner une autre signification aux relations (9) et (12) en remarquant que si le système est stable, la densité d'apparition $\frac{dn_{ap}}{dt}$ par unité de temps doit être égale au nombre de disparitions $\frac{dn_{lp}}{dt}$, en l'absence de toute absorption. Comme $\frac{dn_{ap}}{dt}$ est proportionnel à la densité n_p de plancktons en action (9) est l'analogue d'une loi de décroissance radioactive :

$$(15) \quad \frac{dn_{ap}}{dt} = \frac{dn_{lp}}{dt} = R_p n_p = \frac{n_p w_p}{h}$$

la "constante radioactive" étant $R_p = n_p/h$ et la durée de vie moyenne $t_p = h/w_p$. De même, pour l'ensemble des plancktons, on a

$$(16) \quad \frac{dn_a}{dt} = \frac{dn_l}{dt} = R_m n = n \frac{w_{pm}}{h}$$

Bien entendu, la durée de vie moyenne h/w_{pm} n'est pas égale à la moyenne des durées de vie $t_p = h/w_p$ des plancktons.

Remarquons que si un certain nombre de plancktons détectables sont absorbés au passage d'une cible, et si on considère comme il se doit que la loi de répartition en énergie se conserve, cela voudrait dire que les plancktons absorbés sont remplacés par de nouveaux plancktons détectables, ce qui serait absurde car une nouvelle absorption serait possible et la conservation de l'énergie ne serait pas respectée.

Ceci nous amène à faire l'hypothèse que chaque planckton détectable émet continuellement des plancktons virtuels dont les énergies se répartissent suivant la loi (1). Si un planckton détectable disparaît par absorption, tous les plancktons qu'il a émis avant sa disparition, disparaissent au bout d'un certain temps, sauf ceux dont la durée de vie serait très grande, mais qui sont en nombre négligeable. Soient alors n_d la densité des plancktons détectables et n_a comme précédemment le nombre d'apparitions des plancktons totaux à partir d'un instant arbitraire. L'hypothèse précédente se traduit par

$$\frac{dn_a}{dt} = D n_d,$$

D étant une constante que nous appelons constante d'émission. Si on se donne D le rapport $k = n/n_d$ de la densité des plancktons totaux à la densité des plancktons détectables en résulte car d'après (15) et (16)

$$(17) \quad k = \frac{n}{n_d} = \frac{Dh}{w_{pm}} = \frac{D}{R_m}$$

Le rapport des densités d'énergie est $C^2/C_d^2 = k \frac{w_{pm}}{w_d} = DT$,

ce qui redonne (10) puisque $C^2 = C_d^2 DT = n_d w_d DT = n_d h D = h \frac{dn_a}{dt}$.

Remarquons maintenant que si un planckton détectable émet des plancktons de toutes énergies, il doit aussi émettre des plancktons de son énergie propre. La densité d'apparition de ces derniers par unité de temps est

$$(18) \quad \frac{(dn_a)_T}{dt} = \frac{n}{T} = \frac{(dn_l)_T}{dt}$$

Leur durée de vie est justement T . On peut donc dire qu'un planckton détectable se renouvelle constamment au terme de

sa vie.

Enfin, observons que dire qu'un planckton détectable émet continuellement des plancktons de toutes énergies, revient au même que de dire qu'une onde détectable émet ces plancktons. Une onde telle que (6) est donc non seulement caractérisée par le fait que $C_d^2 = n_d w_d$, mais aussi par le fait que $C_d^2 = \frac{dn_a}{dt} \frac{w_d}{D}$.

Remarque concernant une onde polarisée linéairement

Si on considère une telle onde

$$(19) \quad E_x = C_d \cos 2\pi\nu(t - \frac{z}{c}) = H_y, \quad E_y = H_x = 0$$

dont la densité d'énergie est $C_d^2 \cos^2 2\pi\nu(t - \frac{z}{c})$, on doit se demander s'il ne faudrait pas admettre que la densité des photons, donc aussi des plancktons de l'onde totale serait variable avec la phase. (9) et (10) resteraient valables puisqu'en suivant les plancktons avec la vitesse c , n_p et n_{ap} resteraient constants, mais pour un observateur fixe voyant passer l'onde, ils seraient variables ainsi que la densité d'énergie. En fait, il n'y a pas lieu de retenir cette complication, car dans la théorie du photon on admet que pour une onde polarisée linéairement, la densité des photons est proportionnelle à l'énergie moyenne dans le temps, c'est-à-dire à C_d^2 , et non pas à l'énergie instantanée. C'est cette énergie moyenne, proportionnelle au carré de l'amplitude, qui intervient dans les phénomènes d'interférence qui nous occupent. Remarquons d'ailleurs que l'onde (19) peut être considérée comme la somme d'une onde polarisée circulairement dextrogyre

$$E_{xd} = \frac{C_d}{2} \cos 2\pi\nu(t - \frac{z}{c}) = H_{yd}, \quad E_{yd} = \frac{C_d}{2} \sin 2\pi\nu(t - \frac{z}{c}) = -H_{xd}$$

et de l'onde levogyre

$$E_{x\ell} = \frac{C_d}{2} \cos 2\pi\nu(t - \frac{z}{c}) = H_{y\ell}, \quad E_{y\ell} = \frac{C_d}{2} \sin 2\pi\nu(t - \frac{z}{c}) = -H_{x\ell}$$

La densité d'énergie de chacune de ces deux ondes est $C_d^2/4$, et la densité d'énergie moyenne dans le temps de l'onde polarisée linéairement (19) est $C_d^2/2$, donc la somme des densités d'énergie des deux ondes circulaires. L'onde (19) est donc équivalente à la somme des deux ondes polarisées circulairement. D'ailleurs, comme le spin d'un photon est $h/2\pi$, il est indiqué d'associer à l'ensemble des photons, une onde polarisée circulairement.

Retenons cependant de ce qui précède que pour qu'une onde polarisée linéairement ait une signification en tant que représentant un ensemble de plancktons, il faut que la distance moyenne entre plancktons soit petite par rapport à la longueur d'onde. Il doit en être de même pour les ondes polarisées circulairement qui lui sont équivalentes.

§ 4 - Introduction de la largeur de l'onde détectable

Une onde rigoureusement monochromatique n'existant pas, il faut admettre qu'une onde détectable est constituée par une superposition d'ondes planes monochromatiques, c'est-à-dire par un paquet d'ondes et que les plancktons détectables suivent une loi de répartition en énergie analogue à (1), soit en prenant la fréquence comme variable au lieu de l'énergie

$$(20) \quad \phi(\nu) = \frac{dn_d/\bar{n}_d}{d\nu}$$

\bar{n}_d étant la densité totale des plancktons détectables du paquet et dn_d la densité différentielle. Nous avons surmonté \bar{n}_d d'un trait comme nous le ferons dans la suite

pour toutes les grandeurs qui concernent l'ensemble du paquet.

Il faut noter ici qu'alors que la fonction $\phi(w_p)$ constitue une propriété intrinsèque des plancktons et peut être considérée comme invariable, tout au moins pour un certain genre de particules et une fréquence donnée, la fonction de répartition (20) peut être de formes et largeur très diverses, et est une donnée expérimentale, depuis un spectre très étroit (laser) jusqu'à un spectre très large (émission du corps noir). A un train d'onde amorti, on fait correspondre une courbe de Lorentz qui fait intervenir une largeur dite "naturelle". Si l'effet Doppler intervient, la largeur est plus grande et les énergies se répartissent suivant une loi de Gauss.

Considérons le cas où la largeur étant faible, on peut assimiler la courbe ϕ représentée sur la fig(2) en fonction de $w = hv$ à un rectangle de hauteur ϕ_m

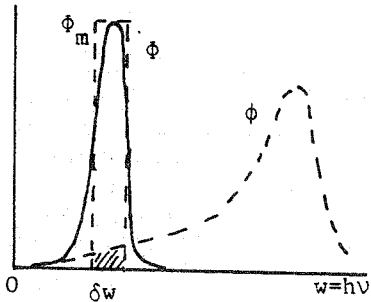


fig. 2

et de largeur δw avec $\phi_m \delta v = \phi_m \delta w / h = 1$. On peut alors considérer que l'onde détectable ne comporte qu'une fréquence $\nu = \nu_m$ à laquelle correspond l'énergie $w_m = \nu_m / h$. Dans l'intervalle δw , le nombre de plancktons détectables est \bar{n}_d par unité de volume, totalité des plancktons détectables qui doit être égal à $n\phi(w)\delta w$, n étant le nombre total de par unité de volume. On doit donc avoir

$$(21) \quad k = \frac{n}{\bar{n}_d} = \frac{1}{\phi \delta w}$$

Considérons maintenant le cas où la largeur n'est pas très petite. Il faut alors remplacer (6) par

$$(22)1 \quad E_x = \int_0^\infty A(\nu - \nu_m) \cos(2\pi \nu u) d\nu = H_y$$

$$(22)2 \quad E_y = \int_0^\infty A(\nu - \nu_m) \sin(2\pi \nu u) d\nu = -H_x$$

avec $u = t - \frac{z}{c}$. $A(\nu - \nu_m) d\nu$ est l'amplitude différentielle correspondant à l'intervalle $d\nu$. Elle est supposée n'avoir de valeur notable que pour ν voisin de ν_m . A étant concentré autour de $\nu = \nu_m$, les E sont concentrés autour de $u = 0$. Par exemple, si $A = a e^{-\sigma(\nu - \nu_m)^2}$, et si on peut négliger $e^{-\sigma \nu^2}$ qui est très petit, on a en posant $\nu - \nu_m = E$,

$$E_x = a \int_{-\infty}^\infty e^{-\sigma E^2} \cos[2\pi(\nu_m + E)u] dE$$

$$= a \int_{-\infty}^\infty e^{-\sigma E^2} [\cos(2\pi \nu_m u) (\cos 2\pi E u) - \sin(2\pi \nu_m u) \sin(2\pi E u)] dE$$

La deuxième partie de l'intégrale est nulle, $e^{-\sigma E^2} \sin(2\pi E u)$ étant une fonction impaire de E , et on a

$$E_x = a \cos(2\pi \nu_m u) \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}} e^{-\frac{\pi^2 u^2}{\sigma}}$$

de même pour E_y avec $\sin(2\pi \nu_m u)$ au lieu de $\cos(2\pi \nu_m u)$, d'où une densité moyenne d'énergie au point u

$$(23) \quad w_u = a^2 \frac{\pi}{\sigma} e^{-\frac{2\pi^2 u^2}{\sigma}}$$

On est en présence d'un paquet d'ondes qui se déplace en bloc avec la vitesse c . Si on fait appel au théorème de Rayleigh, on a à partir de (22)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E_x^2 du = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [A(v - v_m)]^2 dv$$

et de même pour E_y , d'où une énergie totale du paquet par unité de section du faisceau

$$(24) \quad w_t = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [E_x^2 + E_y^2 + H_x^2 + H_y^2] dz = c \int_0^{\infty} [A(v - v_m)]^2 dv$$

soit pour $A = ae^{-\sigma E^2}$, $w_t = c \int_{-\infty}^{+\infty} a^2 e^{-2\sigma E^2} dE = c a^2 \sqrt{\frac{\pi}{2\sigma}}$.

On retrouve bien la même expression en intégrant (23) de $z = -\infty$ à $z = +\infty$. On a aussi

$$(25) \quad w_t = c \int_0^{\infty} [A(v - v_m)]^2 dv = \int_0^{\infty} \bar{N}_d \phi hv dv,$$

\bar{N}_d étant le nombre total de plancktons détectables par unité de section et ϕ la fonction de répartition pour l'ensemble du paquet. A l'intervalle dv correspond l'énergie $c[A(v - v_m)]^2 dv$, d'où

$$(26) \quad \bar{N}_d \phi hv = c[A(v - v_m)]^2.$$

On peut aussi définir la fonction de répartition ϕ_z au point z telle que $\phi_z = \frac{dn_z/n_z}{dv}$, n_z étant la densité des plancktons au point z . Si ϕ_z est la même fonction $\phi_z(v)$ que $\phi(v)$, l'énergie moyenne des plancktons au point z est la même que l'énergie moyenne des plancktons pour l'ensemble du paquet, et on peut dans (26) remplacer ϕ par ϕ_z . Autrement dit, les différences de densité d'énergie entre deux points ne résultent pas des différences d'énergie des plancktons, mais uniquement des différences de densité des plancktons.

(26) ne résulte pas automatiquement de (25),

mais on peut se convaincre de son bien fondé en considérant la superposition de plusieurs ondes planes de fréquences distinctes. Si on superpose deux ondes $E_{x_1} = A_1 \cos 2\pi v_1 u$ et $E_{x_2} = A_2 \cos 2\pi v_2 u$ chacune correspond à des densités d'énergie A_1^2 et A_2^2 . La superposition correspond à une énergie $(E_{x_1} + E_{x_2})^2$ (nous n'écrivons pas les E_y , H_x et H_y), ce qui donne en moyenne dans le temps $A_1^2 + A_2^2$ car l'intégration dans le temps du terme $2A_1 A_2 \cos 2\pi v_1 u \cos 2\pi v_2 u$ est nulle. On en conclut que les énergies correspondant à v_1 et v_2 pour des écarts δv_1 et δv_2 se répartissent proportionnellement à $A_1^2 \delta v_1$ et $A_2^2 \delta v_2$ et ceci quel que soit le point z . On peut donc admettre que pour une superposition d'un grand nombre d'ondes, la fonction de répartition ϕ , égale à ϕ_z satisfait (26).

Remarque - On pourrait être tenté de dire que si n est le nombre total de plancktons de l'onde totale et n_d le nombre total de plancktons de l'onde détectable, $n \phi(w)dw$ doit être égal à $n_d \phi(w)dw$. Mais ceci serait absurde car il en résulterait que $\phi/\phi = n/n_d$. Or ϕ/ϕ est très variable (voir fig.2). En fait, il faut considérer que pour chaque onde détectable partielle d'une fréquence donnée, on a des plancktons différents de l'onde totale. Nous avons vu en effet qu'un planckton de l'onde totale est caractérisé non seulement par son énergie et sa durée, mais aussi par la fréquence de l'onde détectable à laquelle il est associé.

Nous allons maintenant développer une analyse analogue à celle du § 3, soit pour l'ensemble du paquet, soit pour un point donné du paquet. Pour chaque fréquence v et pour un intervalle de fréquence δv , appelons $(\delta \bar{n}_d)_v$ le nombre de plancktons détectables par unité de section du faisceau et $(\delta n)_v$ le nombre des plancktons de l'onde

totale ; de même $\frac{d(\bar{n}_a)_v}{dt}$ le nombre d'apparitions des planctons par unité de temps.

La relation (9) reste applicable en remplaçant $\frac{dn_{ap}}{dt}$ par $\frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{d(\bar{n}_a)_v}{dt} \right) dw$ et n_p par $\frac{d}{dw_p} (\bar{n}_v)_p dw_p$. On a donc

$$(27) \quad \frac{\partial}{\partial w_p} \frac{d(\bar{n}_a)_v}{dt} = \frac{1}{t_p} \frac{\partial (\bar{n}_v)_p}{\partial w_p} = \frac{1}{t_p} (\bar{n}_v)_p \phi(w_p)_v = \frac{(\bar{n}_v)_p}{h} \times \phi(w_p)_p$$

$$d'où \quad \frac{d(\bar{n}_a)_v}{dt} = \frac{(\bar{n}_v)_p}{h} \int_0^\infty \phi(w_p)_p dw_p = \frac{(\bar{n}_v)_p}{h} w_{pm} = (R_m)_v (\bar{n}_v)_p = D_v (\bar{n}_d)_v,$$

$(R_m)_v$ et D_v étant les constantes radioactives et d'émission définies comme en (15) et (16). On a donc

$$(28) \quad K_v = \frac{(\bar{n}_v)_p}{(\bar{n}_d)_v} = \frac{D_v}{(R_m)_v},$$

relation analogue à (17).

La fonction de répartition $(\phi_a)_v$ des apparitions de planctons est liée à la fonction de répartition $(\phi)_v$ des planctons en action par une relation analogue à (13) soit

$$(29) \quad (\phi_a)_v = \frac{\frac{\partial}{\partial w_p} \left(\frac{d(\bar{n}_a)_v}{dt} \right)}{\frac{d(\bar{n}_a)_v}{dt}} = \frac{(\bar{n}_v)_p \frac{\phi(w_p)_p}{h}}{(\bar{n}_v)_p \frac{w_{pm}}{h}} = \phi(w_p)_p \frac{w_p}{w_{pm}}$$

Pour l'ensemble du paquet, c'est-à-dire pour les planck-

tons correspondant à toutes les fréquences, on aura

$$\frac{d\bar{n}_d}{dv} = \bar{n}_a \phi(v) \quad \frac{d\bar{n}}{dv} = K_v \bar{n}_d \phi(v), \quad \bar{n} = \bar{n}_d \int_0^\infty K_v \phi(v) dv,$$

$$(30) \quad K = \frac{\bar{n}}{\bar{n}_d} = \int_0^\infty K_v \phi(v) dv.$$

En ce qui concerne les énergies totales \bar{W}_t et \bar{W}_d , $(w_{pm})_v$ étant l'énergie moyenne des planctons de l'onde totale correspondant à v , et w_{dm} l'énergie moyenne des planctons détectables, on a

$$\bar{W}_d = \bar{n}_d w_{dm}, \quad \frac{d\bar{W}_t}{dv} = \frac{d\bar{n}}{dv} (w_{pm})_v, \quad \bar{W}_t = \bar{n}_d \int_0^\infty K_v (w_{pm})_v \phi(v) dv,$$

$$(31) \quad d'où \quad \frac{\bar{W}_t}{\bar{W}_d} = \int_0^\infty \frac{K_v (w_{pm})_v \phi(v) dv}{w_{dm}}.$$

Dans ce qui précède, nous avons affecté ϕ_v , $(\phi_a)_v$, D_v , R_{mv} , K_v et $(w_{pm})_v$ de l'indice v car il n'est pas exclu que ces grandeurs soient différentes suivant la fréquence. Si $\phi(w_p)$ est indépendant de v , il en est de même des autres grandeurs. Dans ce cas, (31) se réduit à

$$(32) \quad \frac{\bar{W}_t}{\bar{W}_d} = \frac{\bar{N}_t w_{pm}}{\bar{N}_d w_{dm}}$$

Les calculs précédents peuvent être reproduits sans changements s'il s'agit des densités en un point du paquet, en supprimant les traits supérieurs. Par exemple \bar{W}_t est la densité d'énergie au point z au lieu que \bar{W}_t est le nombre de planctons du paquet par unité de section. K et \bar{W}_t/\bar{W}_d

ont la même valeur que pour l'ensemble du paquet. Il ne pourrait en être autrement que si $\phi(v)$ différait suivant le point considéré, ce qui n'est pas le cas suivant ce qui a été dit précédemment.

D'après (30) K est constant si K_v l'est aussi.

On peut alors se demander pourquoi dans l'approximation faite précédemment de la fonction rectangulaire et de très faible largeur, on trouve des valeurs différentes pour des largeurs w différentes. Ceci est dû à ce que (27) n'est plus valable. On n'a plus le droit d'écrire

$$\frac{\partial(\delta n)_v}{\partial w_p} = (\delta n)_v \phi(w_p) \text{ puisque } w_p \text{ est supposé constant dans}$$

l'intervalle δw . Il faut se contenter d'écrire

$$\frac{dn_{ap}}{dt} = \frac{n_p}{t_p} = \frac{n\phi\delta w}{t_p} = D_p n_d$$

d'où on retrouve

$$\frac{n_p}{n_d} = \frac{D_p t_p}{\phi\delta w} = \frac{1}{\phi\delta w} \text{ puisque } D_p t_p = \frac{n_p}{n_d} = 1.$$

On peut maintenant observer que l'énergie moyenne des plancktons de l'onde détectable w_{dm} n'est pas exactement égale à l'énergie correspondant à la fréquence moyenne v_m . En effet, comme $\int_0^\infty \phi dv = 1$, il résulte de (26) que

$$\bar{N}_d = \frac{c}{h} \int_0^\infty \frac{[A(v - v_m)]^2}{v} dv$$

Par conséquent

$$(33) w_{dm} = \frac{\bar{w}_d}{\bar{N}_d} = \frac{\int_0^\infty [A(v - v_m)]^2 dv}{\int_0^\infty \frac{[A(v - v_m)]^2}{h\nu} dv}$$

Par exemple, pour $A = ae^{-\sigma E^2}$ avec $v - v_m = E$, et en négligeant $e^{-\sigma v_m^2}$ comme précédemment

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2\sigma E^2}}{v_m + E} dE = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2\sigma E^2}}{v_m} \left[1 - \frac{E}{v_m} + \frac{E^2}{v_m^2} \dots \right] dE = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2\sigma E^2}}{v_m} x$$

$$(1 - D)dE = \frac{1}{v_m} \sqrt{\frac{\pi}{2\sigma}} \left[1 + \frac{1}{2(2\sigma v_m^2)} + \frac{3}{4} \frac{1}{(2\sigma v_m^2)^2} \dots \right] = \frac{1}{v_m} \sqrt{\frac{\pi}{2\sigma}} (1+B)$$

$$\text{et (34) } w_{dm} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2\sigma E^2}}{v_m + E} dE}{\frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2\sigma E^2}}{v_m + E} dE} = \frac{h y_m}{1+B} = \frac{w_m}{1+B}$$

w_{dm} est très voisin de w_m . Nous verrons dans l'application du § 7 que pour $w_m = 5 \cdot 10^4$ Hz et une largeur en fréquence $\sqrt{\frac{\pi}{2\sigma}} = 10^8$, σ est égal à $\frac{\pi}{2} 10^{-16}$. Le premier terme de B est égal à $\frac{1}{5} \sqrt{\frac{E}{\pi}} 10^{-8}$, donc très petit. Mais il peut en être autrement pour une largeur plus grande. Cette question sera reprise au § 14 et d'autre part dans l'annexe 2 où on traitera une fonction A telle que ϕ s'annule exactement pour $v = 0$, et où on s'affranchit de l'approximation $e^{-\sigma v_m^2} = 0$.

Pour A donné, la fonction ϕ se calcule par

$$\phi = \frac{c A^2}{\bar{N}_d h v} = \frac{A^2/v}{\int_0^\infty \frac{A^2}{v} dv} \text{ , soit dans le cas précédent } \frac{\sqrt{2\sigma} e^{-2\sigma E^2}}{\pi} \frac{1-D}{1-B}$$

Quant à la fonction de répartition des énergies

$$\phi_w = \frac{d\bar{w}_d/\bar{w}_d}{-dv} = \frac{e^{-2\sigma E^2}}{\sqrt{\pi/2\sigma}} \text{ , elle est dans le rapport}$$

$$(35) \quad \frac{\phi_w}{\phi} = \frac{1-B}{1-D}$$

avec ϕ . Quant à la largeur de la courbe ϕ , elle est dans notre définition égale à $1/\phi_m$, ϕ_m étant la valeur maximale de ϕ , obtenue pour

$$E = E_m = \frac{1}{2} v_m \left[-1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\sigma v_m^2}} \right] = -\frac{1}{2} v_m \left[\frac{1}{2\sigma v_m^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{(\sigma v_m^2)^2} \dots \right]$$

$$= -\frac{1}{2} v_m C$$

de sorte que

$$(36) \quad \frac{1}{\phi_m} = \sqrt{\frac{\pi}{2\sigma}} (1+B) \left(1 - \frac{C}{2}\right) e^{\frac{\sigma v_m^2 C^2}{2}} \approx \sqrt{\frac{\pi}{2\sigma}} \left[1 + \frac{1}{16(\sigma v_m^2)^2} \right] \times$$

$$e^{\frac{1}{8\sigma v_m^2}}$$

très voisin de la largeur de la courbe d'énergie $\sqrt{\frac{\pi}{2\sigma}}$.

Remarque concernant la définition de la largeur. Nous avons précédemment appelé largeur d'une courbe $f(v)$ le rapport de l'aire sous tendue par cette courbe à la valeur maximale de f , soit $1/\phi_m$.

On adopte souvent une autre définition qui consiste à définir la largeur par la distance $l_2 = v_2 - v_1$, v_1 et v_2 étant les 2 valeurs de v , situées de part et d'autre de v_m pour lesquels f est égal à $f_m/2$, ou encore à f_m/e , f_m étant la valeur maximale de f . Dans le 2ème cas si $f = e^{-2\sigma E^2}$, on obtient $l_2 = \sqrt{\frac{2}{\sigma}}$, au lieu de $l_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2\sigma}}$ avec notre première définition. Les deux définitions sont voisines ($l_2 = 1,13 l_1$). C'est la deuxième définition que nous emploierons dans l'Annexe 3 concernant un paquet d'ondes à trois dimensions.

Remarque concernant la phase

Dans (22), nous avons supposé que toutes les ondes partielles ont même phase. S'il n'en était pas ainsi, il faudrait remplacer dans les calculs suivant (22) $2\pi v u$ par $2\pi[vu + g]$, g étant une phase qui doit dépendre de v . Afin d'obtenir un paquet d'ondes, il faut supposer que g varie peu au voisinage de $v = v_m$, ce qui conduit à remplacer g par $g_m + E g'_m$, g_m étant la valeur de g pour $v = v_m$ et g'_m étant constant. Les calculs demeurent inchangés en remplaçant $\cos 2\pi v u$ par $\cos 2\pi[v_m u + g_m]$ et $\cos 2\pi E u$ par $\cos 2\pi E[u + g'_m]$. La même remarque, que nous ne reproduirons pas, pourrait être faite pour les paquets d'onde étudiés ultérieurement.

Remarque concernant les phénomènes d'optique non linéaire

On peut se demander concernant ces phénomènes comment il se fait qu'une onde de fréquence v puisse se transformer au contact de matière en une onde de fréquence supérieure, par exemple $2v$, alors qu'elle ne peut échanger d'énergie que par quantum $h\nu$. En fait, un tel phénomène se produit en deux temps. L'onde de fréquence v est absorbée dans la matière avec son cortège de plancktons vituels. Puis est émise une autre onde détectable de fréquence $2v$. Ce qui le prouve, c'est qu'une matière de propriétés appropriées est nécessaire pour obtenir ce phénomène.

§ 5 - Nature de la fonction $\phi(w_p)$ de répartition des densités de plancktons

Jusqu'ici, nous n'avons pas précisé la forme de la fonction ϕ . Elle ne peut résulter que d'hypothèses. Comme nous l'avons dit plus haut, la formation des plancktons de l'onde totale à partir de l'onde détectable est un phénomène intrinsèque qui ne dépend éventuellement que du type de particule et de la fréquence de l'onde.

Cherchons les conditions que doit remplir la fonction ϕ . Nous avons vu suivant (16) qu'étant donné une assemblée de planctons, leur nombre à un instant donné, s'il n'y avait pas de formation de nouveaux planctons, décroîtrait avec le temps suivant une constante radioactive, $R_m = w_{pm}/h$ qui constitue une propriété intrinsèque des planctons. La fonction $\phi(w_p)$ doit donc être telle que

$$(37) \quad \int_0^{\infty} \phi(w_p) w_p dw_p = h R_m .$$

A cette condition, il faut joindre

$$(38) \quad \int_0^{\infty} \phi(w_p) dw_p = 1$$

qui résulte de la définition de ϕ .

De plus, il est naturel d'admettre que la densité des planctons est nulle pour $w_p = 0$ et $w_p = \infty$, et il en est de même de ϕ .

Parmi les fonctions qui satisfont (37) et (38), choisissons une des plus simples

$$(39) \quad \phi(w_p) = C w_p e^{-aw_p} ,$$

C et a étant des constantes et w_p étant bien entendu toujours positif. (38) donne

$$C \int_0^{\infty} w_p e^{-aw_p} dw_p = \frac{C}{a^2} = 1$$

et (37) donne

$$C \int_0^{\infty} w_p^2 e^{-aw_p} dw_p = \frac{2C}{a^3} = h R_m ,$$

d'où

$$a = \frac{2}{h R_m} \quad \text{et} \quad C = \frac{4}{(h R_m)^2} .$$

La fonction ϕ est donc

$$(40) \quad \phi(w_p) = \frac{4}{(h R_m)^2} w_p e^{-\frac{2w_p}{h R_m}} .$$

Le maximum de ϕ est obtenu pour $(w_p)_m = \frac{h R_m}{2}$ et est égal à $\frac{2}{eh R_m}$. Comme deuxième exemple, prenons

$$(41) \quad \phi(w_p) = C w_p a^{-aw_p^2} .$$

On a de même à partir de (38)

$$C \int_0^{\infty} w_p e^{-aw_p^2} dw_p = \frac{C}{2a} = 1$$

et par (37)

$$C \int_0^{\infty} w_p^2 e^{-aw_p^2} dw_p = \frac{C}{4} \sqrt{\frac{\pi}{a^3}} = h R_m ,$$

d'où

$$a = \frac{\pi}{4(h R_m)^2} \quad \text{et} \quad C = \frac{\pi}{2(h R_m)^2} .$$

La fonction ϕ est

$$(42) \quad \phi = \frac{\pi}{2(h R_m)^2} w_p e^{-\frac{\pi w_p^2}{4(h R_m)^2}} .$$

Le maximum de ϕ est obtenu pour $(w_p)_m = \sqrt{\frac{2}{\pi}} h R_m$ et est égal à $\sqrt{\frac{\pi}{2e}} \frac{1}{h R_m}$.

§ 6 - Calcul d'interférences (ondes électromagnétiques)

Ce calcul se fait de la manière habituelle en déterminant la différence de marche des deux faisceaux qui interfèrent. Considérons d'abord le cas simple d'une onde monochromatique. Dans le dispositif des fentes d'Young, cette onde passe par les deux fentes S_1 et S_2 (fig.3) et on prend pour axes Oy suivant S_1 , S_2 , Oz perpendiculaire à S_1 , S_2 et Ox perpendiculaire au plan de figure, O étant

le milieu de S_1, S_2 . Z est la distance entre l'écran portant les fentes et l'écran de détection. En un point y, z de ce dernier, on a sensiblement

$$S_1M = \sqrt{Z^2 + \left(y + \frac{s}{2}\right)^2} = Z + \frac{1}{2} \frac{\left(y + \frac{s}{2}\right)^2}{Z},$$

$$S_2M = Z + \frac{1}{2} \frac{\left(y - \frac{s}{2}\right)^2}{Z}.$$

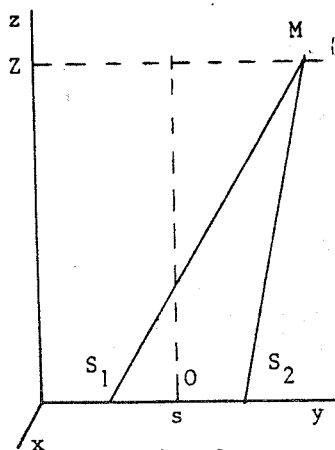


fig. 3

On assimile les 2 faisceaux S_1M et S_2M à des ondes planes, ce qui donne pour l'onde résultante au point M pour l'onde totale

$$E_{xt} = C \left\{ \cos 2\pi v \left(t - \frac{1}{c} \left(Z + \frac{1}{2} \frac{\left(y + \frac{s}{2}\right)^2}{Z} \right) \right) \right. \\ \left. + \cos 2\pi v \left[t - \frac{1}{c} \left(Z + \frac{1}{2} \frac{\left(y - \frac{s}{2}\right)^2}{Z} \right) \right] \right\} \\ = 2C \cos \left(\frac{\pi s y}{c Z} v \right) \cos \left[2\pi v \left(t - \frac{1}{c} \left(Z + \frac{y^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2}{2Z} \right) \right) \right].$$

Si l'on veut comme précédemment considérer une onde polarisée circulairement, il faut faire une approximation supplémentaire car les champs perpendiculaires à S_1M et S_2M ne sont pas colinéaires et font entre eux un angle α . Le calcul montre que $\cos \alpha = 1 - \frac{s^2}{2Z^2}$, et on peut négliger $s^2/2Z^2$ qui dans l'exemple numérique donné au § 7 est de l'ordre de 10^{-9} . Dans ces conditions, on peut calculer E_{yzt} perpendiculaire à E_x de la même manière avec des sin au lieu de cos ; de même pour H_{yzt} et H_{xt} et on trouve pour densité moyenne d'énergie dans le temps :

$$(43) \quad \frac{1}{2} [E_{xt}^2 + E_{yzt}^2 + H_{xt}^2 + H_{yzt}^2] = 8C^2 \cos^2 \frac{\pi y s}{c Z} v = 4C^2 \left[1 + \cos \frac{2\pi y s}{c Z} v \right].$$

Elle subit une variation sinusoïdale en fonction de y , d'où

la formation de franges d'interférence, la distance interfrange étant $d = \frac{cZ}{sv} = \lambda \frac{Z}{s}$, λ étant la longueur d'onde.

Les expressions précédentes concernent l'onde totale. Les franges sont donc virtuelles comme les plancktons et ne sont pas observables. Mais les photons de l'onde détectable sont détectés par exemple par observation photographique ou par photomultiplicateur et la densité probable de ces photons est égale à la densité des plancktons de l'onde totale divisée par k donné par (17) qui est constant. Il en est de même du rapport des densités d'énergie (il n'y a ici qu'une fréquence). Il en résulte que même si la densité des photons est très faible, de telle sorte que l'onde détectable perd toute signification en tant que représentant par le carré de son amplitude une densité d'énergie, les impacts des photons doivent au bout d'un certain temps se répartir proportionnellement à l'intensité (43). En effet, k étant le même pour chacune des deux ondes partielles, est nécessairement le même pour l'onde résultante.

Considérons maintenant le cas d'une onde d'une certaine largeur. Si celle-ci est très faible, tout se passe comme s'il n'y avait qu'une seule fréquence et le calcul est le même que le précédent. Si ce n'est pas le cas, on considère un paquet d'ondes à une dimension suivant (22), et on obtient par un calcul analogue

$$(44) \quad E_{xt} = 2 \int_0^{\infty} A(v-v_m) \cos \left(\frac{\pi s y}{c Z} v \right) \cos \left[2\pi v \left(t - \frac{1}{c} \left(Z + \frac{y^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2}{2Z} \right) \right) \right] dv$$

et de même pour E_{yzt} , H_x , H_{yzt} . En posant $\frac{2\pi s y}{c Z} = \delta$, le théorème de Rayleigh donne pour y et Z donnés

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (E_{xt})^2 dt = 4 \int_0^{\infty} [A(v-v_m)]^2 \cos^2 \frac{\delta v}{2} dv = 2 \int_0^{\infty} [A(v-v_m)]^2 (1 + \cos(\delta v)) dv.$$

Pour obtenir l'énergie qui passe au point y, Z par unité de

section, on peut en négligeant $s^2/2Z^2$ considérer que l'énergie se déplace dans la direction $y/z = \text{cte}$ avec la vitesse c , et on obtient pour l'énergie totale

$$(45) \quad \bar{W}_t = 4c \int_0^{\infty} [s(v-v_m)]^2 (1 + \cos(\delta v)) dv$$

ou avec $v = v_m + E$

$$\bar{W}_t = 4c \int_{-v_m}^{\infty} [s(v-v_m)]^2 (1 + \cos(\delta v)) \cos(\delta E) - \sin(\delta v_m) \sin(\delta E) dE.$$

Pour chaque fréquence v , la distance interfrange est différente, et on peut prévoir que les franges s'estompent quand on s'écarte de $y = 0$. On introduit alors suivant un calcul classique la notion de "visibilité" des franges en définissant le coefficient de visibilité par

$$\alpha = \frac{\bar{W}_{t\max} - \bar{W}_{t\min}}{\bar{W}_{t\max} + \bar{W}_{t\min}}$$

En dérivant (45) par rapport à δ on a

$$-\frac{1}{4c} \frac{d\bar{W}_t}{d\delta} = \int_{-v_m}^{\infty} [A(E)]^2 v [\cos(\delta E) \sin(\delta v_m) + \sin(\delta E) \cos(\delta v_m)] dE$$

et on voit en posant

$$I_C = \int_{-v_m}^{\infty} [A(E)]^2 v \cos(\delta E) dE \quad \text{et} \quad I_S = \int_{-v_m}^{\infty} [A(E)]^2 v \sin(\delta E) dE$$

que W_t est maximum ou minimum pour $\text{tg}(\delta v_m) = -\frac{I_S}{I_C}$,

$$\cos(\delta v_m) = \frac{\pm I_C}{\sqrt{I_C^2 + I_S^2}}, \quad \sin(\delta v_m) = \frac{I_S}{\sqrt{I_C^2 + I_S^2}}.$$

En posant

$$P = \int_{-v_m}^{\infty} [A(E)]^2 dE, \quad I'_C = \int_{-v_m}^{\infty} [A(E)]^2 \cos(\delta E) dE,$$

$$I'_S = \int_{-v_m}^{\infty} [A(E)]^2 \sin(\delta E) dE,$$

on a

$$\left(\frac{W_t}{4c}\right)_{\max} = P + \frac{|I'_C I'_C| + |I'_S I'_S|}{\sqrt{I_C^2 + I_S^2}}, \quad \left(\frac{W_t}{4c}\right)_{\min} = P - \frac{|I'_C I'_C| + |I'_S I'_S|}{\sqrt{I_C^2 + I_S^2}}$$

et

$$(46) \quad \alpha = \frac{|I'_C I'_C| + |I'_S I'_S|}{P \sqrt{I_C^2 + I_S^2}}$$

Si v reste toujours voisin de v_m , on peut admettre

$I_C = v_m I'_C$, $I_S = v_m I'_S$ et (46) se réduit à

$$\alpha = \frac{\sqrt{I_C'^2 + I_S'^2}}{P}$$

En reprenant l'exemple $A(E) = a e^{-\sigma E^2}$ et négligeant $e^{-\sigma v_m^2}$, on a

$$I_C = a^2 v_m \sqrt{\frac{\pi}{2\sigma}} e^{-\frac{\delta^2}{8\sigma}}, \quad I_S = a^2 \frac{\delta}{4\sigma} \sqrt{\frac{\pi}{2\sigma}} e^{-\frac{\delta^2}{8\sigma}}, \quad P = a^2 \sqrt{\frac{\pi}{2\sigma}},$$

$$I'_C = a^2 \sqrt{\frac{\pi}{2\sigma}} e^{-\frac{\delta^2}{8\sigma}}, \quad I'_S = 0$$

et on obtient

$$(47) \quad \alpha = \frac{\sigma v_m}{\sqrt{\sigma^2 v_m^2 + \frac{\delta^2}{16}}} e^{-\frac{\delta^2}{8\sigma}}$$

On peut calculer directement α sans passer par I'_C , I'_S , I_C , I_S , en partant de

$$(48) \quad \frac{\bar{W}_t}{2c} = v \int_{-\infty}^{+\infty} a^2 e^{-2\sigma E^2} (1 + \cos(\delta v_m) e^{-\frac{\delta^2}{8\sigma}}) dE = a^2 \sqrt{\frac{\pi}{2\sigma}} (1 + \cos(\delta v_m) e^{-\frac{\delta^2}{8\sigma}})$$

qui est max ou min pour $\text{tg} \delta v_m = -\frac{\delta}{4\sigma v_m}$, $\cos \delta v_m = \pm \frac{\sigma v_m}{\sqrt{\sigma^2 v_m^2 + \frac{\delta^2}{16}}}$

ce qui redonne (47). α est égal à 1 pour $\delta = 0$ c'est-à-dire pour $y = 0$ et s'annule pour δ grand. Les franges s'estompent d'autant plus vite que σ est plus petit, c'est-à-dire que la largeur en fréquence est plus grande.

Comme pour une onde sans interférences, le rapport $K = \bar{n}/n_d$ est donné par (21) ou (30) mais il survient ici une différence en ce qui concerne le rapport des énergies. Ceci est dû à ce que d'après (32) ce rapport dépend non seulement du rapport des densités de plancktons, mais encore de l'énergie moyenne w_{dm} des plancktons de l'onde détectable. Or dans le cas d'interférence, w_{dm} dépend de δ , c'est-à-dire de la distance à la frange centrale. Le calcul détaillé de w_{dm} est fait dans l'annexe 1 pour une fonction $A(E)$ particulière. Il en résulte que la "visibilité" en énergie n'est pas tout à fait la même que la visibilité en densité de plancktons. Cette question sera réexaminée au § 14.

Observons pour terminer ce paragraphe concernant les interférences que les plancktons apparaissant et disparaissant constamment, les plancktons qu'on pourrait détecter au voisinage des fentes S_1 et S_2 ne sont pas les mêmes que ceux qui peuvent l'être dans la zone d'interférence. Notre théorie donne ainsi une explication toute naturelle du fait qu'il est impossible de définir la trajectoire d'un planckton ou d'une particule, comme dans la théorie quantique orthodoxe, et ceci sans faire appel au principe d'indétermination puisque la position et la vitesse d'un planckton sont bien déterminées bien que non mesurables.

§ 7 - Application numérique (ondes électromagnétiques)

Considérons un faisceau lumineux de faible intensité, en prenant l'exemple traité dans l'ouvrage Physique atomique de Cagnac-Pebay-Peyroula, Tome 1 p. 23, La puissance est 10^{-7} watt par m^2 , ce qui correspond à une

bougie placée à 30 m. Les fentes S_1 et S_2 (fig.3) sont distantes de $s = 150\mu$ et ont une hauteur de 16 mm et une largeur a de 30μ (surface des deux fentes environ $10^{-6}m^2$). La puissance qui passe dans les deux fentes est donc d'environ 10^{-13} watt. La longueur d'onde est 6000 \AA , ce qui correspond à une fréquence de $5 \cdot 10^{14}$ Hertz. L'énergie des photons est $6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 5 \cdot 10^{14} \approx 3,3 \cdot 10^{-19}$ joules. Le nombre de photons traversant les deux fentes par seconde est $3 \cdot 10^5$ et le temps moyen entre deux passages de photons est $3,3 \cdot 10^{-6}$ sec.

L'appareil de détection est constitué par un photomultiplicateur dont la fente d'entrée de 1 mm de largeur explore l'intensité de la lumière dans le plan $Z = 2$ m. La durée de transit des photons est $2/c$, soit environ 500 fois moins que l'intervalle de temps entre deux passages, autrement dit, l'appareil ne contient en moyenne qu'un photon pendant le $1/500$ du temps. On est bien dans les conditions où les photons ne pourraient interférer entre eux s'ils étaient constitués par des paquets d'onde. L'interfrange est $\lambda Z/s = 6 \cdot 10^{-7} \cdot 2/1,5 \cdot 10^{-4} = 8$ mm.

Dans l'onde d'entrée le volume moyen par photon est $chv/10^{-7} \approx 10^{-3} m^3$. Dans la zone d'interférence, les photons sont presque totalement répartis à l'intérieur de la tache de diffraction d'une fente, c'est-à-dire dans une zone d'ouverture angulaire $\lambda/a = 0,02$ radians, dont la largeur suivant Oy est de 40 mm à la distance $Z = 2$ m, alors que la largeur est de 60μ pour les deux fentes, ce qui donne un volume par photon de $10^{-3} \times 40/0,06 = 2/3 m^3$. Si les photons étaient également répartis dans l'espace, ceci donnerait une distance moyenne entre photons de 0,87 m. Il n'y aurait que $5,2 \cdot 10^{-7}$ photons par longueur d'onde. Il est évident que dans ces conditions, il serait absurde d'associer un ensemble de photons à l'onde. Puisque nous considérons une onde électromagnétique, celle-ci existe quelle que soit son intensité, mais elle ne peut plus être considérée comme proportionnelle à une densité

de photons. Par contre, on peut supposer que la densité des plancktons de l'onde totale est beaucoup plus grande. Il paraît raisonnable de supposer que dans la direction de propagation, la distance moyenne entre plancktons est le 1/100 de la longueur d'onde, soit $6 \cdot 10^{-9}$ m. Si les plancktons étaient également répartis dans l'espace on aurait donc $2,16 \cdot 10^{-25}$ m³ par planckton, ce qui conduit en comparant à $2/3$ m³ à adopter un rapport n_t/n_d de l'ordre de 10^{25} . Remarquons qu'il faut en outre pour obtenir des interférences que l'intensité soit voisine dans les deux fentes. Nous avons bien admis que C ou A dans (43) ou (45) est indépendant de y, mais il faut en outre qu'il n'y ait pas de fluctuations importantes de l'intensité sur la largeur d'une fente.

Dans la théorie cinétique des gaz, la répartition des molécules s'écarte peu d'une répartition uniforme et on sait que pour un gaz parfait, la condensation moyenne $(v-v_0)/v_0$, v étant le volume spécifique et v_0 le volume spécifique moyen est égale à $\sqrt{2/\pi n_0}$, n_0 étant le nombre de molécules dans le volume considéré. Il n'y a pas de raisons d'appliquer la même formule aux plancktons, leur répartition spatiale résultant d'une loi inconnue. Si cependant on applique l'estimation précédente de la condensation à un petit cube ayant pour dimensions la largeur d'une fente, soit $(3 \cdot 10^{-5})^3 = 9 \cdot 10^{-15}$ en volume, le nombre n_0 serait d'après ce qui précède $9 \cdot 10^{-15}/2,2 \cdot 10^{-25} \approx 4 \cdot 10^{10}$ et la fluctuation relative serait $\sqrt{2/\pi \cdot 4 \cdot 10^{10}} \approx 4 \cdot 10^{-6}$, donc très faible. On peut donc adopter $K = 10^{25}$.

Cherchons dans le cas d'une onde de faible largeur justiciable de (21) une forme possible de la fonction ϕ et de la constante radioactive R_m définie en (16), en utilisant (40) et (42).

Admettons que la largeur de l'onde en fréquence est 10^8 , ce qui est un ordre de grandeur habituel. w_m est

égal à $5 \cdot 10^{14}$ h. D'après (21), $\phi(w_m) = \frac{1}{10^{25} \cdot 10^8 h}$. On peut

remarquer d'abord sur (40) que pour ces valeurs, l'exponentielle peut être confondue avec l'unité. En effet, si on fait $\frac{2}{hR_m} = \frac{\sqrt{\phi(w_m)}}{w_m}$, l'exposant devient $-\sqrt{\phi(w_m)} w_m = -\sqrt{5 \cdot 10^{-19}} = -7,07 \cdot 10^{-10}$. Dans ces conditions, on peut récrire (40)

$$(49) \quad \phi = \frac{\phi(w_m)}{w_m} w_p e^{-\frac{\sqrt{\phi(w_m)}}{w_m} w_p}$$

$$\text{avec } \frac{\phi(w_m)}{w_m} = \frac{10^{-33}}{5 \cdot 10^{14} h^2} = 4,55 \cdot 10^{18}$$

La durée de vie moyenne des plancktons $\frac{1}{R_m} = \frac{h}{2} \sqrt{\frac{\phi(w_m)}{w_m}}$ est égale à $7,08 \cdot 10^{-25}$, donc très petite.

ϕ est maximum pour $(w_p)_m = \sqrt{\frac{w_m}{\phi(w_m)}} = 4,68 \cdot 10^{-10}$ et pour cette valeur, $(\phi_p)_m$ est égal à $\frac{1}{\frac{w_m}{\phi(w_m)} \frac{1}{e}} = 7,85 \cdot 10^8$.

ϕ est donné par

$$\log \phi = 18,658 + \log w_p - 9,271 \cdot 10^8 w_p$$

A partir de (42) on voit de même que si on fait

$$\frac{\pi}{2(hR_m)^2} = \frac{\phi(w_m)}{w_m}, e^{-\frac{\pi w_m^2}{4(hR_m)^2}} \approx 1 \text{ car l'exposant est}$$

$$-\frac{w_m \phi(w_m)}{2} = 1,2 \cdot 10^{-20}. \text{ Dans ces conditions, on peut récrire (42)}$$

$$(50) \quad \phi = \frac{\phi(w_m)}{w_m} w_p e^{-\frac{\phi(w_m) w_p^2}{w_m}}$$

La vie moyenne des plancktons est $\frac{1}{R_m} = h \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{\phi(w_m)}{w_m}} = 1,13 \cdot 10^{-24}$.

ϕ est maximum pour $(w_p)_m = \sqrt{\frac{w_m}{\phi(w_m)}}$, donc même valeur qu'à partir de (40). Pour cette valeur,

$$(\phi_p)_m = \sqrt{\frac{\phi(w_m)}{w_m}} e^{-\frac{1}{2}} \doteq 1,29 \cdot 10^9 .$$

ϕ est donné par

$$\log \phi = 18,658 + \log w_p - 0,989 \cdot 10^{18} w_p^2 \quad (1).$$

La fig. 4 montre la forme des courbes ϕ dans ces deux cas en coordonnées logarithmiques.