

Annales de la Fondation Louis de Broglie,  
Vol. 9, n° 4, 1984

## THÉORIE DES PLANCKTONS

par Jean RICARD

### DEUXIÈME PARTIE

#### § 8 - Onde matérielle

Le principe de base de la mécanique ondulatoire dont est parti de Broglie a consisté à associer à une particule de masse propre  $m_0$ , par exemple à un électron, dans son référentiel propre  $R_0$  où elle est en repos une onde stationnaire

$$(51) \quad \psi_0 = F(x_0, y_0, z_0) \cos 2\pi \nu_0 t_0,$$

la fréquence  $\nu_0$  étant égale à  $m_0 c^2 / h$ . Cette onde devient dans le référentiel  $R$  par rapport auquel la particule a la vitesse  $v$  suivant  $Oz$

$$(52) \quad \psi = F(x_0, y_0, \frac{z-vt}{\sqrt{1-\beta^2}}) \cos 2\pi \frac{\nu_0}{\sqrt{1-\beta^2}} (t - \frac{v}{c^2} z).$$

La fréquence de cette onde "matérielle" est  $\nu = \nu_0 / \sqrt{1-\beta^2}$ , sa vitesse de phase est  $V = \frac{c^2}{v}$  et sa longueur d'onde est  $\lambda = \frac{c^2}{\nu v} = \frac{h}{mv}$ .

(1) Nous rappelons ici les principaux paramètres (MKSA) ; fréquence moyenne  $\nu_m = 5.10^{14}$ , énergie moyenne des photons  $3,31.10^{-19}$ , longueur d'onde moyenne  $\lambda_m = 6.10^{-7}$ , largeur en fréquence  $10^8$ , distance interfrange  $8.10^{-3}$ .

Mais alors que dans le cas électromagnétique, l'onde a une signification physique indépendamment de son association avec une densité de particules, ici, l'onde matérielle a une nature inconnue en tant qu'onde, tout en ayant une signification concrète, à savoir que le carré de son amplitude représente une densité d'énergie.

Nous allons appliquer notre théorie à ce cas qui diffère du cas électromagnétique en ce que 1- le principe de relativité intervient ; 2- la vitesse de phase n'est pas égale à la vitesse de l'énergie ; 3- le spin est  $h/4\pi$  au lieu de  $h/2\pi$ .

Précisons qu'ayant spécialement en vue les phénomènes d'interférence, nous allons considérer des ondes pour lesquelles les amplitudes ne sont variables que dans une dimension Oz et qui sont scalaires, de sorte que nous remplacerons dans (51) et (52) la fonction F par une constante A. Nous admettrons que les particules sont accompagnées d'un nuage de plancktons virtuels d'énergies différentes réparties suivant la loi (1). Si on se place dans le référentiel propre, la durée  $t_{p_0}$  du planckton

$(w_{p_0}, t_{p_0})$  est sa durée de vie qui est aussi la période d'une onde fictive qui correspondrait à l'énergie  $w_{p_0}$ , soit

$$t_{p_0} = \frac{1}{\nu_{p_0}} = \frac{h}{w_{p_0}}. \text{ Il en résulte que les relations (8) à}$$

(11) restent valables en remplaçant  $n_p, n_{ap}, w_p, t_p,$

$(\Delta n_{ap})_T$  par  $n_{p_0}, n_{ap_0}, w_{p_0}, t_{p_0}, (\Delta n_{ap_0})_{T_0}$ .

Dans le référentiel R, voyons ce qui se passe pour une particule détectable d'énergie au repos  $w_0 = m_0 c^2$ . Son énergie devient  $w = w_0 / \sqrt{1-\beta^2}$  et la fréquence de l'onde étant  $\nu = \nu_0 / \sqrt{1-\beta^2}$ , la période est  $T = T_0 \sqrt{1-\beta^2}$ . On a donc  $wT = w_0 T_0 = h$ . Ceci conduit à définir la durée du planckton détectable par T. Nous avons dit à propos des ondes électromagnétiques que pour un planckton  $(w_p, t_p)$ , la durée

est égale à la période d'une onde fictive dont la fréquence correspond à l'énergie du planckton. Il est naturel de faire ici aussi  $t_{p_0} = t_{p_0} \sqrt{1-\beta^2}$ .

Ceci n'empêche pas d'assimiler  $t_p$  à une durée de vie. Le planckton se déplaçant avec la vitesse v, son trajet peut être représenté suivant la fig. 1 par un segment mn, qui au lieu d'être égal à  $ct_p$ , est égal à  $vt_p = vt_p \sqrt{1-\beta^2}$ . Il ne faut pas confondre la durée  $t_p$  à celle que l'on obtient en observant dans le référentiel R le planckton assimilé à une horloge, pour un même point de  $R_0$ , et qui est égale à  $t_{p_0} / \sqrt{1-\beta^2}$ . Elle ne satisfait pas  $w_p t_p = h$ . Ici, nous n'imposons pas que le planckton soit fixe dans le repère  $R_0$ .

Un planckton détectable se déplace sur une longueur égale à  $\nu T_0 \sqrt{1-\beta^2}$ , qu'il ne faut pas confondre avec la longueur d'onde de l'onde  $\frac{c^2 \sqrt{1-\beta^2}}{\nu \nu_0} = \frac{c^3}{\nu} T_0 \sqrt{1-\beta^2}$ .

Il n'en reste pas moins que si on fait  $v = 0$ ,  $mn = 0$  et le planckton reste immobile. Si v tend vers c, on retrouve le trajet  $mn = ct$ . En effet,  $m_p$  est alors nul et on sait que l'énergie  $w_0 / \sqrt{1-\beta^2} = m_0 c^2 / \sqrt{1-\beta^2}$  tend vers  $h\nu$ . Donc  $t_0 = h/w_0$  tend vers  $1/\nu \sqrt{1-\beta^2}$  et  $vt_p = vt_{p_0} \sqrt{1-\beta^2}$  tend vers  $c/v = ct$ .

Dans ces conditions, nous pouvons reprendre le raisonnement qui montre qu'en un point et au temps t, tout planckton ayant apparu au temps  $t_1 < t - t_p$  a disparu, et tout planckton apparu au temps  $t_2 > t$  n'est pas en action. On peut donc définir le nombre de plancktons en action  $n_p$  au temps t par (8), et (9) à (10) en résultent. L'intervention du spin est moins claire que pour une onde électromagnétique car le moment cinétique n'est pas lié à

une rotation de vecteurs. Le spin de l'électron est une notion abstraite dont on ne peut donner une représentation physique. Si on considère la théorie de Dirac (voir de Broglie, Théorie des particules à spin, p. 84) une onde plane de direction Oz se réduit aux composantes

$$\psi_1 = -\frac{p_3 C_2 P}{\frac{w}{c} + m_0 c}, \quad \psi_3 = C_1 P \quad (\psi_2 \text{ et } \psi_4 \text{ nuls}), \quad p_3 \text{ étant la densi-}$$

té d'impulsion et P le facteur de propagation  $e^{\frac{2\pi i}{h}(w_t - p_z z)}$ . La densité moyenne de moment cinétique est  $\frac{h}{4\pi}(\psi_1 \psi_1^* + \psi_3 \psi_3^*)$  alors que la densité moyenne d'énergie est  $w(\psi_1 \psi_1^* + \psi_3 \psi_3^*)$ . Il en résulte que le rapport de la densité de moment cinétique à la densité d'énergie est donc  $h/4\pi w = T/4\pi$ . De même pour l'onde  $\psi_2, \psi_4$ , on aurait  $-T/4\pi$ . Comme pour l'onde électromagnétique, il est naturel d'admettre que le même rapport s'applique aux plancktons de l'onde totale qui a même fréquence que l'onde détectable, soit

$$(53) \quad \sigma_p = \pm \frac{w T}{4\pi} = \pm \frac{h}{4\pi} \frac{T}{t_p}$$

analogue à (12).

On peut reprendre sans changement le raisonnement qui a été fait à propos de l'onde électromagnétique et qui montre qu'étant donné une onde totale de fréquence donnée, seuls les plancktons de  $t_p = T = 1/\nu$  ( $T = T_0/\sqrt{1-\beta^2}$ ) peuvent être absorbés par une cible.

La loi de répartition des densités de plancktons de l'onde totale dans le référentiel R s'obtient à partir de la définition

$$\phi(w_p) = \frac{dn_p/N}{dw_p} \text{ de même que dans } R_0, \quad \phi(w_{p_0}) = \frac{dn_{p_0}/N}{dw_{p_0}}$$

Pour une même densité différentielle  $dn_p/N$  relative, on doit avoir

$$\phi(w_p) = \phi(w_{p_0}) \frac{dw_{p_0}}{dw_p} = \phi(w_{p_0}) / \sqrt{1-\beta^2}$$

ce qui donne bien

$$\int_0^\infty \phi(w_p) dw_p = \int_0^\infty \frac{\phi(w_{p_0})}{\sqrt{1-\beta^2}} dw_{p_0} \sqrt{1-\beta^2} = 1.$$

Tenant compte de la fonction de répartition, on obtient sans changement (13) et (14) et on peut de même définir les constantes radioactives  $R$  et  $R_m$  et la constante d'émission  $D$ , ce qui donne (15) et (16).

Comme pour les ondes électromagnétiques, nous sommes amenés pour expliquer la disparition des plancktons totaux correspondant à un planckton détectable absorbé à faire l'hypothèse que les plancktons détectables émettent continuellement des plancktons virtuels, d'où le rapport  $K = n/n_d$  suivant (17) ainsi que (18).

Faisons maintenant intervenir la largeur de l'onde détectable. Dire que celle-ci est la superposition d'ondes de fréquences qui peuvent s'écarter un peu d'une fréquence moyenne équivaut à dire d'après (52) que les vitesses des particules du faisceau ne sont pas identiques, mais peuvent s'écarter un peu d'une vitesse moyenne. On a alors une fonction de répartition des densités de plancktons du type (20) et en supposant des ondes planes, on obtient un paquet d'ondes

$$(54) \quad \psi = \int_0^\infty A(v-v_m) \cos 2\pi v(t - \frac{v}{c^2} z) dv,$$

$A(v-v_m)$  n'ayant de valeur notable que pour  $v$  voisin de  $v_m$ .

Si la largeur du paquet est très faible et qu'on puisse assimiler la courbe  $\phi$  à un rectangle de hauteur  $\phi_m$  et de largeur  $\delta w = h\delta\nu$  (fig. 2), la fréquence pouvant être considérée comme constante, on obtient pour le rapport  $n/n_d$  la relation (21). Si la largeur n'est pas négligeable,

mais cependant assez petite, on peut montrer que le paquet d'ondes (54) se déplace approximativement avec la vitesse  $v_m$  correspondant à  $v_m$ . Pour le voir, posons  $v - v_m = E \cdot v$  est la fonction de  $v$ , puisque  $v$  étant égal à  $v_0/\sqrt{1-\beta^2}$ ,  $v$  est égal à  $c\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{v^2}}$ . Développons  $\frac{vv}{c^2}$  suivant les puissances de  $E$ . Comme

$$v^2 - \frac{v^2 v^2}{c^2} = v_0^2 \text{ est constant, on a } \frac{d\left(\frac{vv}{c^2}\right)}{dv} = \frac{1}{v} \text{ et}$$

$$\frac{d^2\left(\frac{vv}{c^2}\right)}{dv^2} = -\frac{1}{vv}\left(\frac{c^2}{v^2} - 1\right)$$

et on a

$$\frac{vv}{c^2} = \frac{v_m v_m}{c^2} + \frac{E}{v_m} + \frac{1}{2} E^2 \left( \frac{d^2(vv/c^2)}{dv^2} \right)_m$$

et on a en ne retenant que le terme en  $E$

$$(55) \quad \psi = \int_{-v_m}^{+\infty} A(E) \cos 2\pi \left[ (v_m + E)t - \left( \frac{v_m v_m}{c^2} + \frac{E}{v_m} \right) z \right] dE$$

$$= \cos 2\pi v_m \left( t - \frac{z}{c^2} \right) \left[ \int_{-v_m}^{+\infty} A(E) \cos 2\pi E \left( t - \frac{z}{v_m} \right) dE - \int_{-v_m}^{+\infty} A(E) \sin 2\pi E \left( t - \frac{z}{v_m} \right) dE \right]$$

Le paquet d'onde se déplace en bloc avec la vitesse  $v_m$ , les intégrales n'étant fonction que de  $t - \frac{z}{v_m} = u$  mais avec des facteurs de phase  $\cos 2\pi v_m \left( t - \frac{z}{c^2} \right)$  et  $\sin 2\pi v_m \left( t - \frac{z}{c^2} \right)$  que nous appellerons  $\cos \phi$  et  $\sin \phi$ .

Ainsi, si on prend le même exemple qu'au § 4 avec  $\Delta(E) = a e^{-\sigma E^2}$  et qu'on néglige  $e^{-\sigma v_m^2}$ , les intégrales étant prises entre  $-\infty$  et  $+\infty$ , la deuxième intégrale est nulle et en posant  $t - \frac{z}{v_m} = u$ , on obtient

$$(56) \quad \psi = a \cos 2\pi v_m \left( t - \frac{z}{c^2} \right) \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}} e^{-\frac{\pi^2 u^2}{\sigma}}$$

Si on suit l'onde (ou les plancktons) avec la vitesse  $v_m$  en faisant  $z = v_m t + z_0$ ,  $z_0$  étant constant, la moyenne dans le temps de  $\psi^2$  est égale à  $\frac{a^2}{2} \frac{\pi}{\sigma} e^{-\frac{2\pi^2 u^2}{\sigma}}$  et l'énergie moyenne totale du paquet par unité de section est

$$(57) \quad \frac{a^2}{2} \frac{\pi}{\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2\pi^2 u^2}{\sigma}} v_m du = v_m \frac{a^3}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2\sigma}}$$

D'une manière générale, appelons  $f_c$  et  $f_s$  les deux intégrales de (56),  $\phi$  pour  $z = v_m t + z_0$  devient

$$2\pi v_m \left[ t \left( 1 - \left( \frac{v_m}{c} \right)^2 \right) - \frac{v_m z_0}{c^2} \right]$$

et

$$\psi^2 = \cos^2 \phi [f_c(z_0)]^2 + \sin^2 \phi [f_s(z_0)]^2 - 2 \sin \phi \cos \phi f_c(z_0) f_s(z_0)$$

dont la moyenne dans le temps est  $\frac{1}{2} [f_c^2 + f_s^2]$ .

Séparons dans (61) la fonction  $A(E)$  dans sa partie paire  $A_p$  et sa partie impaire  $A_i$  de sorte que

$$f_c = \int_{-\infty}^{+\infty} A_p(E) \cos(2\pi E u) dE \text{ et } f_s = \int_{-\infty}^{+\infty} A_i(E) \sin(2\pi E u) du.$$

On obtient pour l'énergie totale par unité de section (théorème de Rayleigh) :

$$(58) \quad W_t = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (f_c^2 + f_s^2) v_m du = \frac{v_m}{2} \int_0^{\infty} [A_p(E)]^2 + [A_i(E)]^2 dE,$$

analogue à (24). Dans l'exemple précédent,  $A_p = a e^{-\sigma E^2}$ ,  $A_i = 0$  et on retrouve (58).

Comme pour les ondes électromagnétiques, nous admettrons qu'à chaque intervalle de fréquence  $dv$  correspond pour l'ensemble du paquet un nombre de particules détectables

$$\bar{N}_d \phi h\nu = \frac{v}{2} \left[ A_p^2 (v-v_m) + A_i^2 (v-v_m) \right]$$

(cf (26)) et qu'en un point donné du paquet, la fonction  $\phi_Z$  est la même que  $\phi$ . On peut alors reproduire les mêmes calculs que pour l'onde électromagnétique et conserver les relations (27) à (32), puis (33) et (34).

Rappelons que ces résultats ne sont qu'approximatifs puisqu'on n'a conservé dans le développement de  $v\nu/c^2$  que le terme en  $E$ .

En définitive, nous admettrons que les particules détectables émettent continuellement des plancktons virtuels, la densité d'énergie de l'ensemble des plancktons étant proportionnelle au carré de l'amplitude de l'onde totale, et le rapport  $n_t/n_d$  des nombres de plancktons de l'onde totale au nombre de plancktons détectables étant donné par (21) pour une onde très étroite et (28) et (30) pour une onde d'une certaine largeur.

### § 9 - Calcul d'interférences pour une onde matérielle

Nous décrirons au § suivant un des moyens d'obtenir à partir d'un faisceau d'électrons deux faisceaux issus des points  $S_1$  et  $S_2$  (fig. 3). Pour une onde monochromatique, on obtient par superposition des deux ondes qui interfèrent

$$(59) \psi = A \left\{ \cos 2\pi\nu \left[ t - \frac{v}{c^2} \left( Z + \frac{1}{2} \frac{(y + \frac{S}{2})^2}{Z} \right) \right] + \cos 2\pi\nu \left[ t - \frac{v}{c^2} \left( Z + \frac{1}{2} \frac{(y - \frac{S}{2})^2}{Z} \right) \right] \right\} \approx 2A \left\{ \cos \left( \pi \frac{v}{c^2} \frac{yS}{Z} \right) \cos 2\pi\nu \left[ t - \frac{v}{c^2} \left( Z + \frac{1}{2} \frac{y^2 + (\frac{S}{2})^2}{Z} \right) \right] \right\}.$$

La densité moyenne dans le temps, en posant  $\delta = 2\pi \frac{v}{c^2} \frac{yS}{Z}$  est

$$(60) \psi_m^2 = 4A^2 \cos^2 \left( \frac{\delta\nu}{2} \right) \left[ \frac{1 + \cos 4\pi\nu \left[ t - \frac{v}{c^2} \left( Z + \frac{1}{2} \frac{y^2 + (\frac{S}{2})^2}{Z} \right) \right]}{2} \right]_m \\ = A^2 [1 + \cos \delta\nu]$$

qui subit une variation sinusoïdale en fonction de  $y$ , d'où formation de franges d'interférences. Si l'expression précédente se rapporte à l'onde totale, ces franges sont virtuelles comme les plancktons. La distance interfrange est  $d_i = \frac{Z}{S} \frac{c^2}{v\nu} = \frac{Z\lambda}{S}$  puisque la longueur d'onde est  $c^2/v\nu$ . Si la densité des plancktons de l'onde totale est très grande, cette onde a une signification, même si la densité des plancktons détectables est très faible ; celle-ci est égale à  $\frac{1}{k} \frac{\psi_m^2}{w_m}$ ,  $w_m$  étant l'énergie des électrons.

Dans le cas d'un paquet d'ondes suivant (54), le calcul est un peu plus compliqué. La superposition des ondes qui interfèrent donne en posant  $Z_+ = Z + \frac{1}{2} \frac{(y + \frac{S}{2})^2}{Z}$  et  $Z_- = Z + \frac{1}{2} \frac{(y - \frac{S}{2})^2}{Z}$ ,

$$\psi = \int_0^\infty A(v-v_m) \{ \cos 2\pi\nu (t - \frac{v}{c^2} Z_+) + \cos 2\pi\nu (t - \frac{v}{c^2} Z_-) \} dv = \psi_+ + \psi_-.$$

En remplaçant  $v$  par  $v_m + E$ ,  $\frac{v\nu}{c^2}$  par  $\frac{v_m v_m}{c^2} + \frac{E}{v_m}$ , on a

$$\psi_+ = \int_{-v_m}^\infty A(E) \{ \cos 2\pi\nu \left[ (v_m + E)t - \left( \frac{v_m v_m}{c^2} + \frac{E}{v_m} \right) Z_+ \right] \} dE \\ = \int_{-v_m}^\infty A(E) \{ \cos 2\pi\nu \left[ \left( t - \frac{v_m v_m}{c^2} Z_+ \right) \cos 2\pi E \left( t - \frac{t}{v_m} \right) - \sin 2\pi\nu \left( t - \frac{v_m v_m}{c^2} Z_+ \right) \times \right. \\ \left. \sin 2\pi \left( t - \frac{t}{v_m} \right) \right] \} dE$$

et de même pour  $\psi_-$ . Supposons la fonction  $A(E)$  paire et

comme précédemment, négligeons  $A(E)$  pour  $|E| > v_m$ . Le deuxième terme donne une contribution nulle. En posant

$$f_+ = \int_{-\infty}^{+\infty} A(E) \cos[2\pi E(t - \frac{Z_+}{v_m})] dE, \quad f_- = \int_{-\infty}^{+\infty} A(E) [\cos 2\pi E(t - \frac{Z_-}{v_m})] dE,$$

on a au total

$$(61) \quad \psi = \cos[2\pi v_m(t - \frac{v_m Z_+}{c^2})] f_+ + \cos[2\pi v_m(t - \frac{v_m Z_-}{c^2})] f_- = \psi_+ + \psi_-.$$

Calculons les moyennes dans le temps de  $\psi^2$ .

Le carré du premier terme de (61) donne  $\frac{1}{2}\{1 + \cos 4\pi v_m(t - \frac{v_m Z_+}{c^2})\} f_+^2$ , et on peut admettre,  $v_m$  étant grand, que la variation de  $f_+$  pendant une période  $1/v_m$  est négligeable. Dans ces conditions, la moyenne dans le temps de ce premier terme est  $\frac{1}{2} f_+^2$ .

L'annexe A, où est fait le calcul détaillé, montre que l'erreur ainsi faite est effectivement négligeable. De même,

pour le carré du deuxième terme, on obtient  $\frac{1}{2} f_-^2$ . Quant au terme  $2\psi_+ \psi_-$ , il est

$$\begin{aligned} 2\psi_+ \psi_- &= 2 \cos 2\pi v_m(t - \frac{v_m Z_+}{c^2}) \cos 2\pi v_m(t - \frac{v_m Z_-}{c^2}) f_+ f_- \\ &= \cos 2\pi v_m \frac{v_m}{c^2} (Z_+ - Z_-) + \cos 2\pi v_m [t - \frac{v_m}{c^2} (Z_+ + Z_-)] f_+ f_- \end{aligned}$$

Pour la même raison, la moyenne du deuxième terme est négligeable et

$$2(\psi_+ \psi_-)_m \approx \cos(\pi v_m \frac{v_m}{c^2} \frac{y_s}{2}) f_1 f_2.$$

Calculons  $\int_{-\infty}^{+\infty} (\psi^2)_m dt$ . L'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_1 f_2 dt$  peut s'évaluer comme suit. On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_+ f_- dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_+ dt \int_{-\infty}^{+\infty} A(E) \cos 2\pi E(t - \frac{Z_-}{v_m}) dE =$$

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} A(E) dE \int_{-\infty}^{+\infty} f_+ \{\cos 2\pi E[t - \frac{Z_+}{v_m} + \frac{Z_+}{v_m} - \frac{Z_-}{v_m}]\} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} A(E) dE \int_{-\infty}^{+\infty} f_+ \{\cos 2\pi E(t - \frac{Z_+}{v_m}) \cos 2\pi E \frac{Z_+ - Z_-}{v_m} - \sin 2\pi E(t - \frac{Z_+}{v_m}) \times \\ &\quad \sin 2\pi \frac{Z_+ - Z_-}{v_m}\} dt. \end{aligned}$$

Le terme en sin donne une intégration nulle,  $f_+$  étant pair en  $t - \frac{Z_+}{v_m}$ , et on a donc en employant la transformation de

Fourier

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_+ f_- dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} A(E) dE \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f_+ \cos 2\pi E(t - \frac{Z_+}{v_m}) dt \right] \cos 2\pi E \frac{Z_+ - Z_-}{v_m} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [A(E)]^2 dE \times \cos 2\pi E \frac{y_s}{v_m Z}. \end{aligned}$$

Au total, on a donc

$$(62) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (\psi^2)_m dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2} (f_+^2 + f_-^2) + \cos 2\pi v_m \frac{v_m}{c^2} \frac{y_s}{Z} f_1 f_2 \right] dt = \int_{-\infty}^{+\infty} [A(E)]^2 (1 + \cos 2\pi E \frac{y_s}{v_m Z}) dE \times \cos 2\pi v_m \frac{v_m}{c^2} \frac{y_s}{Z}.$$

Pour  $A(E) = a e^{-\sigma E^2}$ , on obtient

$$(63) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (\psi^2)_m dt = a^2 \sqrt{\frac{\pi}{2\sigma}} \left[ 1 + \cos(2\pi v_m \frac{v_m}{c^2} \frac{y_s}{Z}) e^{-\frac{\pi^2}{2\sigma} (\frac{y_s}{Z v_m})^2} - \frac{\pi^2}{2\sigma} (\frac{y_s}{Z v_m})^2 \right]$$

Le coefficient  $e^{-\frac{\pi^2}{2\sigma} (\frac{y_s}{Z v_m})^2}$  ne modifie pas sensiblement la position des franges. S'il n'existait pas, l'interfrange serait  $d_i = \frac{C^2 Z}{sv_m v_m} = \frac{Z \lambda_m}{s}$ , la longueur d'onde moyenne

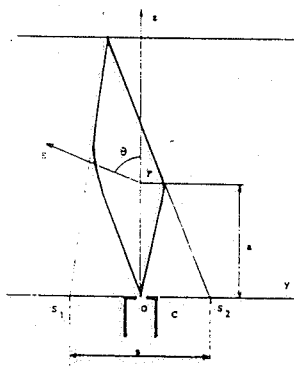
$\lambda_m$  étant  $C^2/v_m v_m$ . Avec les données du paragraphe suivant ( $\lambda_m = 3,7 \cdot 10^{-12}$ ,  $\sigma = 1,75 \cdot 10^{-27}$ ,  $v_m = 0,547 C$ ), on trouve

que l'exposant de l'exponentielle est de l'ordre de  $10^{-8}$  pour la 1ère frange brillante, donc de  $10^{-6}$  pour la dixième. Il pourrait en être autrement pour une onde de grande largeur ( $\sigma$  petit). On peut calculer la visibilité des franges comme pour l'onde électromagnétique.

Les densités d'énergie  $f_+^2$  et  $f_-^2$  se déplacent avec la vitesse  $v_m$  dans les directions  $(y + \frac{s}{2})/Z = \text{Cte}$  et  $(y - \frac{s}{2})/Z = \text{Cte}$  et on peut estimer que  $f_+ f_-$  se déplace dans la direction  $y/z = \text{Cte}$  également avec la vitesse  $v_m$ . On obtient donc l'énergie totale du paquet par unité de section en multipliant (62) et (63) par  $v_m$ , soit  $\bar{w}_t$  et le nombre total de plancktons est  $\bar{w}_t/w_{pm}$ ,  $w_{pm}$  étant l'énergie moyenne des plancktons.

Les expressions précédentes concernent l'onde totale ; le rapport  $N_t/N_d$  de la densité des plancktons de l'onde totale à la densité des plancktons de l'onde détectable est  $K$  mais le rapport des énergies, comme pour l'onde électromagnétique, dépend en outre de l'énergie moyenne  $w_{dm}$  de l'onde détectable, qui elle-même dépend du point  $y, Z$  considéré (calcul Annexe 2).

### § 10 - Application numérique (onde matérielle)



Considérons un faisceau d'électrons de faible intensité, en nous référant à l'exemple donné par Cognac, Pebay-Pegroula (Physique atomique, T. 1, p. 131). Il s'agit d'un faisceau très fin sortant d'un canon à électrons C (fig. 5) de différence de potentiel motrice  $U = 10^5$  volts qui est dévié en deux demi-faisceaux par un fil très fin F

de rayon  $r_0 = 1\mu$  porté au potentiel  $U_f = 50$  volts par rapport à la sortie du canon. Si  $E_z$  est le champ sur l'axe Oz, et à la distance du fil à la bouche du canon,  $E_0$  étant le champ à la surface du fil,

$$U_f = \int_{r_0}^a E_z dr = E_0 r_0 \text{Log} \frac{a}{r_0} = 9,21 E_0 r_0.$$

En un point de la trajectoire de l'électron, qui est presque parallèle à OZ, le rayon de courbure R est tel que  $m v^2/R = e E_n$ ,  $E_n$  étant la composante du champ perpendiculaire à  $O_z$ , égal à  $E \sin \theta$ , l'angle  $\theta$  étant l'angle du champ avec Fz. On en déduit que la déviation  $\alpha$  est donnée par

$$d\alpha = \frac{dl}{R} = \frac{e E_0 r_0 dl \sin \theta}{m v^2 r} = \frac{e E_0 r_0}{m v^2} d\theta$$

d'où une déviation totale

$$\alpha = \pi e E_0 r_0 / m v^2, \text{ l'angle } \theta \text{ variant de } 0 \text{ à } \pi,$$

qui est sensiblement le même pour toutes les trajectoires. Il en résulte que tout se passe comme si les trajectoires déviées étaient issues de deux points fixes  $S_1$  et  $S_2$  distants de  $s = 2\alpha a$ . On est ramené au schéma de la fig. 3.

$\beta = v/c$ , calculé à partir de  $\sqrt{1-\beta^2} = 1/(1 + \frac{eU}{m_0 c^2})$  = 0,837 est égal à 0,547. L'énergie d'un électron  $m_0 c^2 / \sqrt{1-\beta^2}$  est  $9,8 \cdot 10^{-14}$ . La fréquence  $mc^2/h$  est  $1,48 \cdot 10^{20}$ .  $mv^2$  est égal à  $1,83 eU$ , et pour  $U_f = 50$  volts, on en dé-

duit que  $\alpha = \frac{\pi U_f}{9,21 \cdot 1,84 U} = 0,93 \cdot 10^{-4}$  et  $s = 1,86\mu$ . l'interfrange  $\lambda Z/s$  est égal à  $0,2\mu$  pour  $Z = 10$  cm, la longueur d'onde  $\lambda$  étant égale à  $c^2/vv = h/mv = 3,7 \cdot 10^{-12}$ . Les observations se font au microscope électronique. Dans la zone d'interférence, la largeur occupée par les franges est limitée par les prolongements de  $S_1 F$  et  $S_2 F$ , soit  $2 \cdot 0,09 \cdot 0,93 = 16,7\mu$ . Supposons que la hauteur du faisceau (suivant Ox)

soit  $5\mu$ , ce qui donne une surface de  $83,5 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2$ .

On suppose que le faisceau d'électrons est équivalent à une intensité de  $10^{-12}$  ampères = I le nombre d'électrons transportés par seconde étant  $I/e = 10^7/1,6$ ; l'intervalle de temps entre deux passages successifs étant donc  $1,6 \cdot 10^{-7}$  sec, alors que le temps de transit dans l'appareil est  $0,1/0,547 c = 6 \cdot 10^{-10}$ . L'appareil ne contient donc en moyenne qu'un électron pendant  $1/270$  du temps. Comme dans le cas électromagnétique étudié précédemment, des paquets d'onde représentant chacun un électron ne pourraient pas interférer entre eux. Le volume correspondant à un électron est  $83,5 \cdot 10^{-12} \cdot 1,6 \cdot 10^{-7} = 2,19 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3$ . Si les plancktons étaient également répartis, cela correspondrait en moyenne à  $1,3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$  entre électrons ou à  $3,5 \cdot 10^8$  fois la longueur d'onde. Il serait donc absurde d'associer l'onde aux électrons. Admettons comme pour les ondes électromagnétiques que la distance entre plancktons doit être de  $1/100$  de la longueur d'onde, soit  $3,7 \cdot 10^{-14} \text{ m}$ , ce qui correspond à un volume de  $5 \cdot 10^{-41} \text{ m}^3$  par planckton. Pour l'onde étudiée, le rapport du nombre de plancktons de l'onde totale au nombre d'électrons devrait être  $0,4 \cdot 10^{32}$ . Nous adopterons un rapport un peu plus fort, soit  $10^{34}$ , eu égard à la discussion qui sera faite plus loin au § 12 concernant une particule isolée.

Cherchons comme au § 7 dans le cas d'une onde de très faible largeur la forme de la courbe  $\phi(w_p)$ . Dans le cas électromagnétique, nous avons adopté une largeur de  $10^8$  en fréquence pour une fréquence moyenne de  $5 \cdot 10^{14}$ . En adoptant le même rapport, on obtient pour une énergie moyenne de  $9,8 \cdot 10^{-14}$

$$9,8 \cdot 10^{-14} \frac{10^8}{5 \cdot 10^{14}} = 1,96 \cdot 10^{-20}$$

L'onde étant supposée justiciable de la formule (21), on obtient pour  $K = 10^{34}$

$$\phi(w_m) = \frac{1}{1,96 \cdot 10^{-20} \cdot 10^{34}} = 5,11 \cdot 10^{-15}$$

Le rapport  $\phi(w_m)/w_m$  est égal à 0,0521.

Utilisant la formule (40), si on fait  $\frac{2}{hR_m} = \frac{\phi(w_m)}{w_m}$ , l'exposant de l'exponentielle devient  $-\sqrt{\phi(w_m)w_m} \cong 10^{-12}$ , et celle-ci est indiscernable de l'unité.

On peut comme pour le cas électromagnétique récrire (40)

$$\phi(w_p) = \frac{\phi(w_m)}{w_m} w_p e^{-\frac{\phi(w_m)}{w_m} w_p}$$

La durée de vie moyenne des plancktons  $\frac{1}{R_m} = \frac{h}{2} \frac{\phi(w_m)}{w_m}$  est égale à  $7,08 \cdot 10^{-35}$ ,  $\phi$  est maximum pour

$$(w_p)_m = \sqrt{\frac{w_m}{\phi(w_m)}} = 4,38$$

et pour cette valeur,  $\phi = (\phi_p)_m = 0,084$ .

$\phi$  est donné par

$$\log(\phi_p) = -1,283 + \log w_p - 0,0992 w_p$$

A partir de (42) on voit de même que si on fait  $\frac{\pi}{2(hR_m)^2} = \frac{\phi(w_m)}{w_m}$ , l'exponentielle est indiscernable de l'unité, l'exposant étant  $-\frac{w_m \phi(w_m)}{2} = -2,5 \cdot 10^{-19}$ , et on peut récrire (42)

$$\phi(w_p) = \frac{\phi(w_m)}{w_m} w_p e^{-\frac{\phi(w_m) w_p^2}{2}}$$

La vie moyenne des plancktons est  $h \sqrt{\frac{2\phi(w_m)}{\pi w_m}} = 1,21 \cdot 10^{-34}$ .  $\phi$  est maximum pour  $(w_p)_m = \sqrt{\frac{w_m}{\phi(w_m)}}$  et a même valeur que



précédemment 4,38.

Pour cette valeur,

$$(\phi_p)_m = \sqrt{\frac{\phi(w_m)}{w_m}} e^{-1/2} = 0,14.$$

$\phi$  est donné par

$$\log \phi = -1,283 + \log w_p - 0,0113 w_p^2.$$

Les courbes  $\phi(w_p)$  sont représentées sur la fig. 14 en coordonnées logarithmiques (1).

### § 11 - Superposition de paquets d'ondes

Dans ce qui précède, nous avons considéré soit une onde plane homogène, soit des paquets d'onde à une dimension. Pour un paquet d'onde, la densité d'énergie tend vers zéro quand on s'éloigne de la concentration centrale, de sorte que même pour l'onde totale, il y a une zone où l'onde perd sa signification. Mais nous allons voir qu'il n'en est pas de même si on considère une succession de paquets d'onde suffisamment rapprochés.

Remarquons d'abord qu'un paquet d'onde suivant (57) présente suivant la définition que nous avons donné au § 4 une largeur en fréquence  $\sqrt{\frac{\pi}{2\sigma}} = \Delta\nu$ . La largeur en  $u = t - \frac{z}{v_m}$  est telle que  $\Delta u \frac{\pi}{\sigma} = \sqrt{\frac{\pi}{2\sigma}}$ , la largeur en  $z$  étant  $\Delta z = v_m \Delta u$ .

On a donc  $\Delta u \Delta \nu = \frac{1}{2}$ ,  $\Delta u$  est d'autant plus grand que  $\Delta \nu$  est petit. Pour  $\sigma$  très grand,  $\varepsilon$  est quasi nul et on retombe sur une onde plane. Pour  $\sigma$  petit, la largeur en  $\nu$  est grande mais la largeur en  $z$  est petite. Ainsi, dans l'exemple du § 10, nous

(1) Nous rappelons ici les principaux paramètres (MKSA) : fréquence moyenne  $\nu_m = 1,48 \cdot 10^{20}$ , énergie moyenne des électrons  $9,8 \cdot 10^{-14}$ , longueur d'onde moyenne  $\lambda = 3,7 \cdot 10^{-12}$ , largeur en fréquence  $3 \cdot 10^{13}$ , largeur en  $z$   $2,73 \cdot 10^{-6}$ ,  $\nu_m = 1,64 \cdot 10^8$ ,  $\sigma = 1,75 \cdot 10^{-27}$ .

avons admis que la largeur en fréquence est  $3 \cdot 10^{13}$ , d'où  $\sigma = \frac{\pi}{18} 10^{-26} = 1,75 \cdot 10^{-27}$ . La largeur en  $z$  est  $\nu_m / 6 \cdot 10^{13} = 0,27 \cdot 10^{-7}$ .

Ceci dit, soit un paquet d'onde suivant (57) où nous faisons  $z = v_m t + z$  en suivant le paquet, soit

$$(64) \psi = a \cos 2\pi \nu_m \left[ t \left( 1 - \left( \frac{v_m}{c} \right)^2 \right) - \frac{v_m z_0}{\sigma} \right] \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}} e^{-\frac{\pi^2 z_0^2}{\sigma v_m^2}}$$

dont l'amplitude (c'est-à-dire en faisant abstraction du cos) est représentée par la courbe A (fig.6). Un deuxième paquet distant de  $\Delta z$  sera obtenu en remplaçant  $z_0$  par  $z_0 - \Delta z$  et est représenté par la courbe B. Pour ce deuxième paquet, la valeur de  $\psi$  pour  $z_0 = 0$  c'est-à-dire au droit du sommet de la courbe A, en 0 sera

$$a \cos 2\pi \nu_m \left[ t \left( 1 - \left( \frac{v_m}{c} \right)^2 \right) + \frac{v_m \Delta z}{\sigma} \right] \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}} e^{-\frac{\pi^2 \Delta z^2}{\sigma v_m^2}}$$

Pour une succession de paquets équidistants de  $\Delta z$ , on aura en 0

$$\psi = \sum_n a \cos 2\pi \nu_m \left[ t \left( 1 - \left( \frac{v_m}{c} \right)^2 \right) + \frac{v_m n \Delta z}{c^2} \right] \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}} e^{-\frac{\pi^2 n^2 \Delta z^2}{\sigma v_m^2}}$$

En élevant  $\psi$  au carré, les termes carrés donnent des valeurs moyennes

$$\frac{a^2}{2} \frac{\pi}{\sigma} e^{-\frac{2\pi^2}{\sigma} \left( \frac{n \Delta z}{v_m} \right)^2}$$

mais les termes rectangles ont la forme

$$2a^2 \cos \left[ 2\pi \left[ \nu_m \left( t - \left( \frac{v_m}{c} \right)^2 \right) - \frac{v_m v_m}{c^2} n \Delta z \right] \right] \cos \left[ 2\pi \left[ \nu_m \left( t - \left( \frac{v_m}{c} \right)^2 \right) - \frac{v_m v_m}{c^2} (n-1) \Delta z \right] \right] \times \\ - \frac{\pi^2}{\sigma} (n^2 + (n-1)^2) \left( \frac{\Delta z}{v_m} \right)^2 = a^2 \left\{ \cos \left[ 4\pi \left[ \nu_m \left( t - \left( \frac{v_m}{c} \right)^2 \right) - 2\pi \frac{v_m v_m}{c^2} (n+n-1) \Delta z \right] \right] + \right. \\ \left. + \cos \left[ 2\pi \frac{v_m v_m}{c^2} (n-n-1) \Delta z \right] \right\} \frac{\pi}{\sigma} e^{-\frac{\pi^2}{\sigma} (n^2 + (n-1)^2) \left( \frac{\Delta z}{v_m} \right)^2}$$

et sont égaux en moyenne dans le temps à

$$(65) a^2 \frac{\pi}{\sigma} e^{-\frac{\pi^2}{\sigma}(n^2+n'^2)\left(\frac{\Delta z}{v_m}\right)^2} \cos\left[2\pi \frac{v_m v_m}{c^2}(n-n')\Delta z\right].$$

Le dernier facteur dépend de la valeur de  $\Delta z$  par rapport à la longueur d'onde moyenne  $\frac{c^2}{v_m v_m} = \lambda_m$ . Bornons nous au cas où  $\Delta z/\lambda_m$  est un nombre entier, le cos étant égal à 1.

On obtient pour la valeur moyenne de  $\psi^2$ , en posant

$$m = e^{-\frac{\pi^2}{\sigma}\left(\frac{\Delta z}{v_m}\right)^2}$$

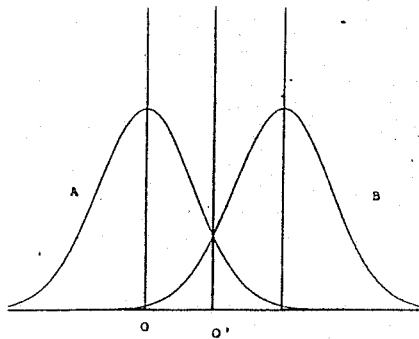
$$\begin{aligned} (\psi^2)_m &= \frac{a^2}{2} \frac{\pi}{\sigma} [\dots m^9 + m^4 + m+1+m^4 + m^9 + \dots]^2 \\ &= \frac{a^2}{2} \frac{\pi}{\sigma} [1+4[m^2+m^8+18+\dots] + 4[m^5+m^{10}+\dots] \\ &\quad + 4[m^{13}+m^{38}+\dots]]. \end{aligned}$$

Pour  $\Delta z$  égal à la largeur de la courbe  $\psi$ ,  $m$  est égal à  $e^{-\pi}$  et on trouve

$$(\psi^2)_m = 1,0075 \frac{a^2}{2} \frac{\pi}{\sigma}.$$

Si maintenant on calcule  $\psi^2$  pour  $z_0 = \frac{\Delta z}{2}$ , ce qui correspond au point  $O'$ , au milieu de deux courbes consécutives, on a

$$(\psi^2)_m = \frac{a^2}{2} \frac{\pi}{\sigma} (2(m^{0,5^2} + m^{1,5^2} + m^{2,5^2} + \dots))^2$$



Dans les mêmes conditions, on trouve  $(\psi^2)_m = 0,8347$ .

On peut donc dire que pour l'ensemble de la superposition,  $(\psi^2)_m$  oscille dans le rapport 1,00075/0,8347 et que si la densité des plancktons de l'onde totale est suffisante pour que l'onde d'une courbe telle que A soit si-

gnificative pour la valeur moyenne de  $\psi$ , elle le sera également pour la superposition. Si on négligeait les termes rectangulaires, on trouverait 1,0037 au lieu de 1,0075 et 0,8314 au lieu de 0,8347. La conclusion serait la même.

Désignons par  $\bar{w}_m$  l'énergie totale correspondant à une seule courbe (64) par unité de section. On a

$$(66) \bar{w}_m = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^3}{2} \frac{\pi}{\sigma} e^{-\frac{\pi^2 z_0^2}{\sigma v_m^2}} dz_0 = \frac{a^2}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2\sigma}} v_m.$$

La largeur de la courbe  $(\psi^2)_m$  suivant notre définition est  $\bar{w}_m / \frac{a^3}{2} \frac{\pi}{\sigma} = \ell$ . Par conséquent, si on superpose une série de courbes  $(\psi^2)_m$  décalées de cette largeur  $\ell$ , la densité moyenne d'énergie est  $\frac{\bar{w}_m}{\ell} = \frac{a^2}{2} \frac{\pi}{\sigma}$ .

Les valeurs trouvées précédemment pour  $(\psi^2)_m$  en  $O$  ou  $O'$  se trouvent de part et d'autre de cette moyenne.

## § 12 - Cas d'une particule isolée

Dans tout ce qui précède, nous avons en vue essentiellement le cas d'interférence de deux faisceaux et c'est pourquoi nous avons considéré des ondes planes ou des paquets d'onde suivant une dimension, dont chacun peut porter plusieurs particules.

Mais il est nécessaire d'examiner le cas d'une particule isolée, cas qui se présente essentiellement pour une particule matérielle. Par exemple, si au cours d'une collision entre particules, on libère un électron, on sait qu'il n'y en a qu'un seul et cet électron peut être suivi à la trace dans une chambre à bulles.

Dans la conception quantique orthodoxe, l'électron est représenté par une fonction d'onde complexe  $\psi$  (ou plusieurs fonctions d'onde dans la théorie de Dirac),  $\psi\psi^*$

(ou  $\Sigma\psi\psi^*$ ) une fois normée représentant la densité de probabilité de présence de l'électron, qui n'a de valeur notable qu'au centre du paquet d'onde. Lors d'une collision avec un atome avec ionisation de ce dernier, cette collision se produit avec une grande probabilité au voisinage du centre du paquet. L'électron perd une partie de son énergie cinétique et est après collision représenté par une nouvelle fonction d'onde ; il peut subir une deuxième collision et ainsi de suite, d'où l'apparition d'une série de traces dans une chambre à bulles, qui ne sont pas rigoureusement situées sur une courbe continue, mais sont au voisinage d'une telle courbe. Mais si on suit cette conception jusqu'au bout, comme tout paquet d'onde s'étale, si on faisait traverser à l'électron après son émission un très grand espace vide, avant de le faire pénétrer dans la chambre à bulles, on devrait tout au moins pour la première ionisation observer un écart probable assez grand de la trace ou même sa disparition. Il n'est pas satisfaisant de supposer qu'un électron puisse "vieillir", sa fonction d'onde se modifiant avec le temps.

A ce sujet, il est curieux de constater qu'alors que la théorie quantique a remporté des succès indiscutables quand l'électron est soumis à un potentiel, à commencer par l'atome d'hydrogène, et a même expliqué avec l'aide de la théorie des perturbations la structure fine des spectres, elle échoue dans le cas le plus simple d'un électron libre. En effet, ou bien on construit sa fonction d'onde par superposition d'ondes planes et on obtient inégalement un étalement du paquet d'ondes (voir à ce sujet l'Annexe 3), ou bien, si on recherche une fonction d'onde sans étalement, on est obligé d'accepter des discontinuités des dérivées de  $\psi$ , ce qui n'est pas satisfaisant (voir à ce sujet ma note du 10.12.73).

Dans notre conception, le carré de  $\psi$  qui est réel représente une densité probable d'énergie, donc aussi une densité de plancktons multipliée par l'énergie moyenne

d'un planckton. Pour obtenir un paquet d'ondes correspondant à un électron, il faut que le nombre probable de plancktons de l'onde détectable soit égal à l'unité, donc que le nombre de plancktons de l'onde totale soit égal à  $K$ . Ainsi la difficulté signalée ci-dessus disparaît. Ce n'est pas l'électron qui vieillit, c'est le paquet d'onde qui s'étale de sorte que la densité probable des électrons tend vers zéro en un point du paquet à l'infini, mais il y a toujours un nombre probable d'électrons égal à l'unité pour l'ensemble des paquets.

Pour préciser cette question, nous allons considérer un paquet d'ondes à 3 dimensions, dont le calcul est effectué dans l'Annexe 3. Reprenons l'équation (4) de cette annexe que nous récrivons en exprimant la valeur moyenne dans le temps  $(\psi_z^2)_m$  de la densité d'énergie (voir § 13)

$$(\psi_z^2)_m = \frac{a^2}{2} \left(\frac{\pi}{\mu}\right)^2 e^{-\frac{2\pi^2(x^2+y^2)}{\mu\lambda_m^2}} \frac{\pi}{\sigma} e^{-\frac{2\pi^2}{\sigma} \left(t - \frac{z}{v_m}\right)^2}.$$

C'est en première approximation la densité d'énergie du paquet d'ondes au point  $x, y, z$ , qui se déplace en bloc dans la direction  $Oz$  avec la vitesse  $v_m$ .

Suivant  $Oz$ , la largeur de la courbe  $\psi_z = \frac{\pi}{\sigma} e^{-\frac{2\pi^2 z^2}{\sigma v_m^2}}$  est

$$\sqrt{\frac{\sigma}{2\pi}} v_m \text{ et la largeur de la courbe } \psi_x = \frac{\pi}{\mu} e^{-\frac{2\pi^2 x^2}{\mu\lambda_m^2}} \text{ est}$$

$\sqrt{\frac{\mu}{2\pi}} \lambda_m$  (de même pour  $\psi_y$ ). Noter que  $\mu$  n'a pas de dimensions, alors que  $\sigma$  a la dimension de  $1/v_m^2$  ou le carré d'un temps ce qui confère bien à ces deux largeurs la dimension d'une longueur.

Il est naturel d'admettre que les longueurs en  $x, y, z$ , sont les mêmes, d'où

$$(67) \quad \Delta l = \sqrt{\frac{\sigma}{2\pi}} v_m = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi}} \lambda_m \quad \text{ou} \quad \mu = \sigma \left(\frac{v_m}{\lambda_m}\right)^2$$

ce qui donne  $\Delta l = 2,7 \cdot 10^{-6}$  m et  $\mu = 3,4 \cdot 10^{12}$ .

Cherchons la densité de plancktons de l'onde totale au point de concentration maximale pour un paquet d'ondes dont le nombre probable d'électrons est égal à l'unité et le nombre de plancktons de l'onde totale est donc égal à K.

La densité d'énergie au point central est

$$d_c = \frac{a^2}{2} \frac{\pi}{\sigma} \left(\frac{\pi}{\mu}\right)^2 = \frac{a^2}{2} \frac{\pi^3}{\sigma^3} \left(\frac{\lambda_m}{v_m}\right)^4$$

et l'énergie totale du paquet est

$$\bar{W}_t = \frac{a^2}{2} \frac{\pi}{2\mu} \lambda_m^2 \sqrt{\frac{\pi}{2\sigma}} v_m = \frac{a^2}{2} \left(\frac{\pi}{2\sigma}\right)^{3/2} \frac{\lambda_m^4}{v_m}$$

Le rapport de la densité d'énergie centrale à l'énergie totale étant égal au rapport de la densité centrale de plancktons au nombre total de plancktons du paquet, on a donc pour l'onde totale, avec  $K = 10^{34}$

$$(68) \quad d_c = 10^{34} \left(\frac{2\pi}{\sigma}\right)^{3/2} \frac{1}{v_m^3}$$

Dans l'exemple du § 10, nous avons adopté une largeur en fréquence de  $3 \cdot 10^{13}$ , d'où  $\sigma = \frac{\pi}{18} \cdot 10^{-26}$ ,  $v_m$  étant égal à  $1,64 \cdot 10^8$ . On obtient  $d_c = (3,65 \cdot 10^5)^3 \cdot 10^{34}$ , de sorte que le nombre de plancktons par m dans chaque dimension est  $7,8 \cdot 10^{16}$ , et par longueur d'onde (égale à  $3,7 \cdot 10^{-12}$ ) de  $2,91 \cdot 10^5$ .

Cherchons la distance au centre pour que la

densité de plancktons par longueur d'onde soit égale à la valeur admissible que nous avons adoptée, soit 100. On aura

$$e^{-\frac{2\pi^2 x^2}{\mu \lambda_m^2}} = e^{-\frac{2\pi^2 y^2}{\mu \lambda_m^2}} = e^{-\frac{2\pi^2 z^2}{\sigma v_m^2}} = \frac{10^{-3}}{2,91}$$

ce qui donne  $x = y = z = 4,4 \cdot 10^{-6}$  m. Le rapport de cette distance à la largeur est 1,6.

En posant  $\frac{2\pi^2 z^2}{\sigma v_m^2} = u$ , la proportion du nombre de plancktons

dans la zone périphérique où le nombre de plancktons par longueur d'onde est plus petit que 100, au nombre total de plancktons est

$$\gamma^3 \quad \text{avec} \quad \gamma = \int_0^\infty e^{-u^2} du \int_0^\infty e^{-u^2} du$$

et  $\gamma$  peut se calculer par le développement asymptotique

$$\gamma = \frac{e^{-u^2}}{u\sqrt{\pi}} \left[ 1 - \frac{1}{2u^2} + \frac{1.3}{4u^4} - \frac{1.3.5}{6u^6} + \dots \right]$$

ce qui donne  $\gamma^3 = 2,8 \cdot 10^{-13}$ . Ce résultat reste valable si on tient compte de la 2ème approximation (équation (6) de l'annexe 3) car pour  $z = 4,4 \cdot 10^{-6}$ ,  $\sigma^2 + z^2 \pi^2 d'^2 \approx \sigma^2$  et  $\mu^2 + \frac{\pi^2 z^2}{\lambda_m^2} \approx \mu^2$ .

Nous pouvons donc en conclure que même pour une particule isolée, l'onde totale garde une signification presque parfaite en tant que représentant par le carré de son amplitude la densité probable d'énergie des plancktons. Il n'en reste pas moins qu'il existe une zone périphérique où elle perd cette signification, et cette zone augmente au fur et à mesure que l'onde s'étale.

L'Annexe 3 montre que pour obtenir une largeur 10 fois plus grande, il faut que le paquet se déplace de 57 m en ce qui concerne la largeur en z, et de 40 m en ce qui con-

cerne la largeur en x ou y. En même temps, le maximum de  $\psi\psi^*$  diminue. Pour un déplacement de 10 m, la densité maximale, en ce qui concerne le facteur  $\frac{\pi^2}{00^*}$  de (6) Annexe 3,

est multipliée par  $\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\pi Z}{\mu\lambda})^2}}$  qui est égal à 0,14. En ce

qui concerne le facteur  $\frac{m}{\tau}$  qui suit la première exponentielle, où on peut négliger les termes en  $\tau$ , elle est multipliée par

$$\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\pi z d''}{\sigma})^2}}$$
 qui est égal à 0,5.

Au total, la densité maximale est multipliée par 0,07, et la densité de plancktons par m de  $\sqrt[3]{0,07} = 0,41$ . Si on cherche comme précédemment la distance au centre pour que la densité de plancktons par longueur d'onde s'abaisse à 100,  $e^{-u^2} = \frac{10^{-3}}{2,91}$  doit être remplacé par  $\frac{10^{-9}}{2,91 \cdot 0,41} = \frac{10^{-9}}{1,19}$ . On trouve ainsi  $\gamma^3 = 5,6 \cdot 10^{-12}$ .

La proportion de plancktons dans la zone périphérique n'augmente donc pas très rapidement.

Il n'en reste pas moins que cette zone périphérique augmente, et qu'au bout d'un très long trajet, l'onde perdrait sa signification en tant que représentant par le carré de son amplitude une densité d'énergie. Ceci ne veut pas dire que la particule disparaît. Les plancktons de l'onde totale existent toujours, et on peut admettre qu'un d'entre eux (s'il s'agit d'un paquet d'onde correspondant à une seule particule) reste détectable. Il ne faut pas oublier en effet que le moment cinétique des plancktons est lié à une fréquence T et que le planckton pour lequel  $t_p = T$  est détectable(1). Mais l'onde ayant

(1) C'est ce qui se passe pour une particule cosmique venant de très loin.

perdu sa signification, les phénomènes liés spécifiquement aux propriétés d'une onde doivent disparaître, et en particulier la formation de franges d'interférence. Nous verrons les conséquences de ce fait au § 14.

### § 13. Peut-on conserver la mécanique quantique ?

Cette question est fondamentale. Si on était obligé d'abandonner les procédés de calcul de la mécanique quantique orthodoxe, notre théorie serait condamnée, étant donné tous les succès que ces procédés ont permis d'atteindre. Mais il est possible de conserver ces procédés tout en modifiant certaines interprétations des hypothèses de base. Notre conception diffère de la conception quantique en ce que les fonctions d'onde que nous avons définies et que nous désignerons désormais par  $\psi_r$  pour éviter toute ambiguïté, représentent par le carré de leurs amplitudes des densités d'énergie, et sont essentiellement réelles, alors que les fonctions d'onde de la théorie quantique  $\psi$  sont complexes et telles que  $\psi\psi^*$  représente une densité de probabilité de présence de particules. C'est pourquoi d'ailleurs nous nous sommes efforcés dans tout ce qui précède de n'utiliser que des fonctions réelles, bien que les calculs soient souvent plus faciles avec des fonctions complexes.

Mais nous allons voir qu'il est possible de déduire les fonctions  $\psi$  à partir des fonctions  $\psi_r$ .

Considérons d'abord le cas le plus simple d'une onde plane du type (51)

$$(69) \quad \psi_r = A \cos 2\pi v \left( t - \frac{v}{c^2} z \right),$$

A étant constant et réel. La moyenne dans le temps de  $\psi_i^2$  soit  $(\psi_i^2)_m$  qui est égal à  $A^2/2$ , a pour signification la densité probable d'énergie, qui est ici constante dans

tout l'espace. Si au lieu de (69), nous écrivons

$$(70) \quad \psi = B e^{i2\pi\nu(t - \frac{\nu}{c^2} z)},$$

en attribuant à  $\psi\psi^*$  la signification de probabilité de présence des particules ou ce qui revient au même de densité probable des particules, on doit avoir  $(\psi_r^2)_m = \psi\psi^* \cdot h\nu$ ,  $h\nu$  étant l'énergie d'une particule qui est ici la même pour toutes les particules. Donc

$$(71) \quad \frac{A^2}{2} = B^2 h\nu.$$

$\psi\psi^*$  n'est pas ici normalisable.  $k\psi\psi^*$  représente la densité des plancktons de l'onde totale.

On voit donc que les deux procédés sont équivalents à condition

1° de représenter la densité d'énergie des particules ou plancktons par la moyenne dans le temps de  $\psi_r$ , ce que nous avons toujours fait précédemment (voir en particulier la fin du § 3)

2° de définir la proportionnalité de A et B par (71).

Considérons maintenant un paquet d'ondes à trois dimensions, tel que celui qui fait l'objet de l'Annexe 3. Pour obtenir des expressions similaires à (69) et (70), remplaçons dans (1) de cette Annexe a par B, et présentons  $\psi_r$  par l'expression (1) dans laquelle  $a e^{i2\pi[ ]}$  est remplacé par  $A \cos 2\pi[ ]$ ,  $[ ]$  étant la parenthèse qui multiplie  $i2\pi$  dans (1). Comme  $\cos 2\pi[ ]$  est égal à  $\frac{1}{2}[e^{i2\pi[ ]} + e^{-i2\pi[ ]}]$ , on obtient pour  $\psi_r$  l'expression (3) où  $e^{i2\pi\nu_m(t - \frac{\nu_m}{c^2} z)}$  est remplacé par  $\cos 2\pi\nu_m(t - \frac{\nu_m}{c^2} z)$  et par conséquent pour la moyenne dans le temps  $(\psi_r^2)_m$  l'expression

(4) où  $a^2$  est remplacé par  $\frac{A^2}{2}$ . Si on donne à  $\psi\psi^*$  la signification de densité probable des particules de l'onde détectable, on doit avoir  $(\psi_r^2)_m = \psi\psi^* w_{dm}$ ,  $w_{dm}$  étant l'énergie moyenne des particules et par conséquent

$$(72) \quad \frac{A^2}{2} = B^2 w_{dm}.$$

On voit encore que les procédés qui utilisent  $\psi_r$  ou  $\psi$  sont équivalents, sous les conditions 1° et 2° précédentes, (71) étant remplacé par (72).

$w_{dm}$  a été calculé par (34) dans le cas d'une onde électromagnétique, et on obtient la même expression pour le paquet d'ondes à trois dimensions de l'Annexe 3. En effet, en calculant l'énergie totale du paquet d'ondes (1) où  $a e^{i2\pi[ ]}$  est remplacé par  $A \cos 2\pi[ ]$ , en première approximation, on obtient

$$W_t = \iiint_{-\infty}^{+\infty} (\psi_r^2)_m dx dy dz = \frac{A^2}{2} v_m \lambda_m^2 \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\mu\alpha^2 - 2\mu\beta^2} e^{-2\sigma E^2} x \\ \times d\alpha d\beta dE = \frac{A^2}{2} v_m \lambda_m^2 \frac{\pi}{2\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\sigma E^2} dE,$$

expression qu'on peut d'ailleurs retrouver en calculant directement les intégrations en  $x, y, z$ . D'autre part  $\phi$  étant la fonction de répartition des densités de particules suivant la fréquence avec  $\int_0^{\infty} \phi dv = 1$ , on a pour le nombre total de particules

$$N_d = \frac{A^2}{2} v_m \lambda_m^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2\sigma E}}{h\nu} dv \\ \text{d'où} \quad w_{dm} = \frac{W_t}{N_d} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\sigma E^2} dv}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2\sigma E^2}}{h\nu} dv}$$

comme (34).

Rappelons que nous avons admis que la fonction de répartition  $\phi_z$  au point  $z$  est la même que la fonction de répartition  $\phi$ , et que  $w_{dm}$  est donc le même pour l'ensemble du paquet ou en un point donné.

On aurait pu évidemment raisonner en sens inverse, et au lieu de définir d'abord  $\psi_r$ , définir d'abord  $\psi$  et en déduire  $\psi_r$ . Si nous avons préféré définir d'abord  $\psi_r$ , -suivant (69), c'est que nous savons que dans le cas électromagnétique, les  $E$  étant définis par (22), les  $E^2$  représentent des densités d'énergie.

En résumé, étant donné une fonction  $\psi_r$  telle que  $(\psi_r^2)_m$  représente une densité d'énergie des particules ou des plancktons, on peut calculer une fonction  $\psi$  telle que  $\psi\psi^*$  représente une densité probable de particules ou de plancktons. Si le paquet d'ondes ne contient qu'une particule, la notion de densité probable de particules coïncide avec celle de probabilité de présence de la particule et  $\psi\psi^*$  est normé.  $\psi$  est donc la fonction définie dans la théorie quantique orthodoxe. On peut alors énoncer les postulats de la théorie quantique orthodoxe, définir les opérateurs et valeurs propres, l'équation de Schrödinger, et généraliser à l'espace de configuration où  $(x, y, z, t)$  sont remplacés par les paramètres  $(q_1, q_2, \dots, t)$ .

La différence qui subsiste, c'est que dans notre conception, si les densités de plancktons de l'onde totale deviennent très faibles, l'onde perd sa signification en tant que représentant par le carré de son amplitude une densité d'énergie des plancktons, et que comme nous l'avons dit à la fin du paragraphe précédent, les phénomènes d'interférences doivent disparaître. Rappelons aussi que comme dans l'onde totale, les plancktons, qu'ils soient ou non détectables apparaissent et disparaissent

constamment, la notion de trajectoire d'une particule perd toute signification, et que si on détecte une particule matérielle, on ne peut connaître à l'avance ni sa position, ni sa vitesse exactement. Les relations d'incertitude sont donc une conséquence de notre hypothèse des plancktons.

#### § 14 - Suggestions concernant des expériences

Pour terminer, faisons quelques suggestions concernant des expériences susceptibles de confirmer notre théorie. Comme les plancktons de l'onde totale ne sont pas détectables, sauf ceux qui le sont à l'état de particules, il n'est pas possible de prouver leur existence par une observation. Ainsi, si on se reporte à la relation (34), le rapport des densités d'énergie  $\bar{w}_t/\bar{w}_d$ , n'est pas égal au rapport des densités de plancktons  $N_t/N_d = k$ , mais ceci ne peut être vérifié car  $\bar{w}_t$  n'est pas mesurable.

1. Une première suggestion est basée sur le fait que si l'intensité de l'onde diminue au point que la densité des plancktons de l'onde totale n'est plus suffisante pour que celle-ci garde une signification, les phénomènes d'interférence doivent disparaître. Pour une onde électromagnétique, nous avons supposé dans l'application du § 7 que la distance moyenne entre photons était de 0,87 m, la densité des plancktons de l'onde totale suivant Oz étant  $(\sqrt[3]{10^{25}}/0,87) = 2,5 \cdot 10^8$  par m ou 150 par longueur d'onde. Une onde plane n'existant pas, on peut supposer qu'il y a une juxtaposition de paquets d'ondes suivant le schéma du § 11. La largeur en  $z$  de chaque paquet étant  $\frac{\sqrt{\sigma}}{2\pi} C = 0,66$  m, un peu inférieur à 0,87 m, la variation d'intensité serait un peu plus forte que celle qui a été calculée dans ce paragraphe. Mais pour obtenir une onde totale qui ne soit plus significative, il faudrait que la distance moyenne entre photons soit nettement plus grande que 0,87 m. On pourrait supposer, soit que le

nombre probable de photons par paquet d'onde soit inférieure à l'unité, ce qui n'est pas interdit dans notre conception, soit que la largeur des paquets d'onde soit plus grande, ce qui se produit spontanément du fait de l'étalement des paquets d'onde. De toute façon, quel que soit le nombre de photons par paquet, on doit obtenir à partir d'une source lumineuse très éloignée une intensité quasi-constante.

Pour les électrons, nous avons supposé dans l'application du § 10 que la distance moyenne entre électrons était de  $1,3 \cdot 10^{-3}$  m, la densité des plancktons suivant Oz étant  $\sqrt[3]{34} \cdot 10^3 / 1,3 = 1,8 \cdot 10^{-14}$ , soit 670 par longueur d'onde. Mais ici, la largeur en  $z$ ,  $\sqrt{\frac{\sigma}{2\pi}} v_m = 2,7 \cdot 10^{-6}$  m est beaucoup plus faible que la distance moyenne entre électrons. D'autre part, nous avons vu au § 12 que l'onde totale garde une signification même pour un seul électron par paquet, ce qui permettrait des interférences d'un paquet d'ondes avec lui-même, la largeur étant de l'ordre de grandeur du diamètre du fil. Pour obtenir un faisceau d'électrons tel que l'onde totale ne soit plus significative, il faudrait donc de toute façon qu'il y ait un étalement important des paquets d'onde, donc qu'il y ait un long parcours entre le canon à électrons et le dispositif d'interférence.

Retenons de ce qui précède que pour obtenir la disparition des franges d'interférence, il faut que la source lumineuse ou le canon à électrons soient loin du dispositif d'interférence. En diminuant progressivement l'intensité, on devrait pouvoir obtenir une évaluation du rapport  $k = n_t / n_d$ . De plus, il y aura lieu de répéter l'expérience en faisant varier la fréquence et la largeur.

Si on fait varier la fréquence, la largeur restant assez petite pour que la relation (21) reste valable, et si on admet que la courbe  $\phi(w_p)$  reste la même,

cette relation devrait permettre d'obtenir la valeur de  $w_p$  correspondant à  $k$ , donc de préciser la forme de la courbe  $\phi(w_p)$  (fig. 14). Si la largeur est assez grande et que les franges d'interférence (qui sont alors irisées) sont observables, leur disparition permettant d'évaluer  $k$ , on devrait pouvoir se rendre compte en faisant varier la fréquence moyenne si  $k$  dépend de la fréquence ou n'en dépend pas (voir § 3 et notamment (30)).

Si pour une fréquence donnée on fait varier la largeur, celle-ci restant assez petite pour que la relation (21) reste valable, cette relation pourrait être vérifiée. Si la largeur est grande et que  $K$  varie, la relation (30) pourrait être vérifiée.

2° Une deuxième suggestion concerne le fait que l'énergie moyenne des particules  $w_{dm}$  dépend de  $\delta$ , c'est-à-dire de la distance entre le point d'observation et le point central du système de franges. Ceci a été démontré dans l'Annexe 2 et n'est possible que si la largeur est assez grande. Il en résulte que les densités d'impact des particules, et les densités d'énergie ne subissent pas les mêmes variations et on a les moyens de le vérifier bien que les expériences soient délicates, en comptant les nombres d'impact, par exemple dans le cas électromagnétique, par un photomultiplicateur, et en mesurant d'autre part les énergies par une plaque photographique, ou plutôt les quantités de chaleur produites par absorption.

A vrai dire, de telles expériences n'apporteraient pas la preuve de l'existence des plancktons virtuels, car le calcul de  $w_{dm}$  peut être fait uniquement par l'onde détectable. Mais elles apporteraient une vérification intéressante de notre analyse.

3° Nous ne sommes pas rentrés dans le détail des répartitions spatiales des plancktons, et avons seulement



supposé que pour une onde plane, la répartition est uniforme (fig. 1) avec de possibles fluctuations. Mais celles-ci étant probablement rapides et peu importantes, il est peu probable qu'elles puissent avoir une incidence sur les intensités des franges d'interférences. Mais dans l'hypothèse que nous avons faite (§ 4) de l'émission des plancktons de l'onde totale par les particules détectables, il n'est pas impossible que suivant les conditions d'émission, il survienne des répartitions particulières de plancktons pour des juxtapositions de paquets d'onde, et que ceci puisse entraîner dans la superposition de deux faisceaux avec différence de marche des modifications des franges. Ceci pourrait faire l'objet de recherches ultérieures qui viendraient compléter la théorie.

Bien entendu, toutes ces expériences devraient être entreprises pour des fréquences très différentes depuis les rayons  $\gamma$  jusqu'aux ondes hertziennes pour les ondes électromagnétiques, ou pour des vitesses d'électrons très différentes.

Remarque finale. Observons que dans le dispositif d'interférences de la fig. 5, la théorie quantique orthodoxe est incapable d'expliquer la formation des franges. En effet, cette théorie suppose que le paquet d'ondes représentant un électron interfère avec lui-même, et  $\psi\psi^*$  représente la probabilité de présence. Si le paquet d'onde se partage en deux au passage du fil, l'électron se trouve soit à gauche, soit à droite du fil, mais pas des deux côtés à la fois. S'il est à gauche, la partie gauche subit une déviation, mais pas la partie droite, et inversement. Il pourrait encore survenir une différence de marche dans la superposition des deux parties, mais la distance interfrange ne pourrait être celle qui est observée ( $\lambda Z/s$ ).

Dans notre théorie, nous sommes obligés de faire une hypothèse supplémentaire pour expliquer la chose.

Nous avons admis que les plancktons virtuels n'étaient pas détectables, sauf quelques uns d'entre eux. Mais ils n'en ont pas moins une masse, et il semble naturel d'admettre qu'ils ont aussi une charge électrique, proportionnelle à leur masse. Dans ces conditions, pour un planckton passant au voisinage du fil, le rayon de courbure de sa trajectoire serait, pendant son trajet celui qui a été calculé. Dans tout l'intervalle  $dz$ , il y a un certain nombre de plancktons en action qui subissent en moyenne la même déviation. La déviation totale doit donc être la même et de sens inverse pour les deux parties de l'onde.

#### TABLE DES MATIERES

§ 8 - Onde matérielle	p. 297
§ 9 - Calcul d'interférences pour une onde matérielle	p. 304
§ 10 - Application numérique (onde matérielle)	p. 308
§ 11 - Superposition de paquets d'ondes	p. 312
§ 12 - Cas d'une particule isolée	p. 315
§ 13 - Peut-on conserver la mécanique quantique ?	p. 321
§ 14 - Suggestions concernant des expériences	p. 325