Annales de la Fondation Louis de Broglie,
Vol. 10, n° 4, 1985

L'ALÉATOIRE DU NON-ALÉATOIRE

par Ya. G. SINAI

(Article paru dans Priroda -"La Nature"- 1981 n°3 p.72.
Traduction du russe par S. Diner)*

Jacob Grigorievich Sinaï, docteur en sciences physico-mathématiques, collaborateur scientifique supérieur de l'Institut de Physique Théorique L.D. Landau de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S., professeur à la faculté de mécanique et de mathématiques de l'Université M.V. Lomonossov à Moscou. Ses travaux essentiels sont liés à la théorie ergodique et aux problèmes mathématiques de la mécanique statistique. Il est l'auteur des monographies : La théorie ergodique (en collaboration avec I.P. Cornfeld et S.V. Fomin), Naouka, Moscou, 1980 ; La théorie des transitions de phase. Résultats rigoureux, Naouka, Moscou, 1980.

*****

Note du Traducteur (N.d.T.)

Les ouvrages de Ya. G. Sinaï sont traduits en anglais. Cf. la bibliographie complémentaire pour le premier. Pour le second : Theory of phase transitions : rigorous results. Pergamon Press, 1983.

Le mérite essentiel de Sinaï est d'avoir démontré dès 1962 qu'un système aussi simple que le billard plan ou le gaz de Lorentz bidimensionnel présentaient de très fortes propriétés statistiques, étant en fait des systèmes mélangeants (mixing). Ce résultat a été un pas décisif dans l'étude des propriétés stochastiques des systèmes déterministes, et reste un des rares cas où ces propriétés sont démontrées analytiquement. Cette démonstration a été étendue aux billards quelconques à parois strictement concaves et au gaz de Lorentz tridimensionnel. Toute la recherche actuelle dans son vigoureux développement a recours à la simulation numérique sur ordinateur des systèmes dynamiques et à la caractérisation empirique des phénomènes chaotiques.

*avec l'accord de Priroda

La théorie classique des probabilités étudie les évènements et les processus aléatoires auxquels sont attribués dès le départ des probabilités correspondantes. L'exemple le plus répandu de tels phénomènes est celui du jeu de pile ou face, où les probabilités de voir tomber la pièce de monnaie sur l'une ou l'autre face sont déclarées identiques et égales à un demi. Des schémas probabilistes un peu plus complexes apparaissent lorsque l'on considère le battage de cartes, le jeu de roulette, le tirage de la loterie, etc.

Les lois de la théorie des probabilités apparaissent dans de longues séries de jeux ou d'épreuves et consistent en ce que les fréquences d'apparition de telle ou telle combinaison de chiffres, de cartes, de possibilités, cessent d'osciller lorsque la longueur de la série augmente et aboutissent à une valeur limite déterminée. Plus la série est longue, plus les oscillations des moyennes deviennent faibles. Pour les jeux les plus simples une série de 1000 coups est déjà sans doute très longue. En thermodynamique, où les lois fondamentales ont une origine statistique, nous rencontrons des ensembles de 10^{20} molécules, et les grandeurs telles que la pression, la densité, etc., s'expriment comme des moyennes sur des séries de 10^{20} molécules. Les oscillations des moyennes sont alors si faibles que nous les ignorons complètement et utilisons les moyennes comme des grandeurs totalement définies.

On souligne habituellement que les phénomènes aléatoires ont deux propriétés caractéristiques : la possibilité de principe de répéter indéfiniment les épreuves, par exemple le lancer de la pièce de monnaie, le tirage de la loterie, etc. et l'indépendance mutuelle des résultats de chaque épreuve.

Lors de la résolution de problèmes pratiques, l'hypothèse sur l'existence de probabilités définies a priori n'est pas du tout aussi anodine qu'il peut paraître à première vue. Elle suppose a priori l'existence d'un quelconque mécanisme "aléatoire" du type disque de roulette, loterie, etc., dont l'action définit les valeurs des probabilités. La nature de ce mécanisme, les caractéristiques de son action ne sont en fait jamais discutées et les valeurs des probabilités sont définies à partir de l'analyse statistique des données.

On peut cependant indiquer de nombreux exemples où il n'existe aucun mécanisme aléatoire visible, et où l'applicabilité des lois de la théorie des probabilités ne fait aucun doute. L'un des exemples le plus important est la turbulence. Le mouvement des liquides ou des gaz obéit à des équations déterministes du mouvement, les équations de Navier-Stokes, d'aspect relativement simple. Mais dans le cas où se produit la turbulence le mouvement apparaît si complexe que la notion de trajectoire individuelle perd son sens et que la seule description possible est en termes de caractéristiques moyennes.

Dans de nombreux problèmes de la physique des plasmas,de l'optique non-linéaire et de la théorie des vibrations, dans les problèmes de prévision météorologique, dans différents problèmes d'écologie, etc., nous rencontrons des phénomènes où les déductions de la théorie des probabilités sur la stabilité du comportement des valeurs moyennes, sur les relations entre ces valeurs moyennes et d'autres lois statistiques plus fortes, fonctionnent avec une précision étonnante.

Il existe un domaine des mathématiques, la théorie ergodique, dont le problème fondamental est l'analyse des causes engendrant l'apparition de lois statistiques dans les systèmes dynamiques. Soulignons que l'évolution de ces systèmes dynamiques est définie par des équations du mouvement déterministes, c'est-à-dire des équations qui ne contiennent aucun terme aléatoire dans le membre de droite. Il apparaît alors deux problèmes fondamentaux discutés ci-dessous.

Premièrement, dans quelles conditions et de quelle manière une dynamique déterministe mène à l'apparition des lois statistiques de la théorie classique des probabilités ? Deuxièmement, pourquoi les lois statistiques sont-elles stables, c'est-à-dire ne sont pas détruites par l'action de faibles bruits, de fluctuations etc. ? On a pendant longtemps considéré que l'apparition de lois statistiques dans les systèmes dynamiques était inévitablement liée à l'augmentation du nombre de degrés de liberté, fournissant la possibilité d'effectuer des moyennes selon ces degrés. Il est maintenant clair qu'une telle exigence n'est pas du tout nécessaire. Il existe d'importantes classes de systèmes dynamiques à faible nombre de degrés de liberté, avec même seulement deux degrés, pour lesquels une dynamique strictement déterministe conduit à l'apparition de lois statistiques.

Au cours des deux dernières décennies on a développé une théorie montrant que les lois statistiques apparaissent dans les systèmes dont la dynamique a un caractère instable. H. Poincaré doit, semble-t-il être considéré comme le père de l'idée du lien entre l'instabilité et la statistique*.

On peut trouver des affirmations voisines dans les travaux de J. Hadamard, G. Birkhoff, M. Born, E. Hopf et d'autres encore. Cette idée a été exprimée avec netteté par le physicien soviétique N.S. Krylov dans son ouvrage : "Travaux sur les fondements de la physique statistique" publié dès 1950[1].

Ce livre est souvent cité jusqu'aujourd'hui dans les travaux des mathématiciens, des physiciens et des philosophes. Les éditions de l'Université de Princeton ont récemment publié ce livre en traduction anglaise[2].

La compréhension contemporaine du lien entre l'instabilité et la statistique a pris naissance après l'introduction d'idées et de méthodes provenant de la théorie de l'information. Un rôle d'importance essentielle a été joué là par le travail de A.N. Kolmogorov en 1958, où un tel lien avec la théorie de l'information a été découvert pour la première fois. C'est avec ce travail qu'a commencé le développement impétueux de la théorie que nous allons décrire.[3]

---

*N.d.T. : En fait cette idée est déjà présente chez Maxwell où elle s'exprime très clairement dans les mêmes termes que chez Poincaré.

[1]N.S. Krylov. Travaux sur les fondements de la physique statistique. Editions de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S. Moscou, 1950, 208 pages (en russe)

[2]N.S. Krylov. Works on the foundations of statistical physics. Princeton Series in Physics. Princeton University Press 1979, 283 pages

[3]A.N. Kolmogorov. Doklady Akad. Naouk SSSR 1958, T.119, n°5, p. 861

On peut se donner une certaine représentation de l'instabilité du mouvement à partir du récit de R. Bradbury : "A sound of thunder". On y raconte comment au XXIè siècle les hommes ont appris à voyager dans le passé. La seule exigence imposée aux voyageurs, consiste en ce qu'ils ne doivent pas sortir d'un chemin particulier, construit en quelque sorte dans une autre dimension et n'ayant pas d'influence sur l'évolution de notre univers. Il arriva qu'un groupe de jeunes gens partit à la chasse aux dinosaures. Ayant par mégarde glissé hors du chemin l'un des chasseurs écrasat un papillon. A leur retour à la maison, les voyageurs effrayés voient qu'un nouveau président a été élu dans leur pays, que l'on a adopté une nouvelle orthographe et qu'il y a eu encore bien d'autres changements.

Cet exemple est typique pour les mouvements instables. Leur propriété fondamentale consiste en ce qu'une petite variation des données initiales induit des différences croissantes entre les trajectoires du mouvement. Pour une instabilité totale cette différence croît exponentiellement avec le temps. On peut démontrer que dans des conditions normales (absence de singularités dans les membres droits des équations du mouvement) une croissance plus rapide est impossible. Les systèmes à instabilité totale présenteront pour nous un intérêt fondamental.

Malheureusement nous ne savons pas actuellement déterminer pour un système dynamique donné concrètement si son mouvement sera instable. On ne sait pour le moment étudier que des classes distinctes de systèmes dynamiques. Ce n'est déjà pas si mal, pour autant qu'il se trouve parmi elles de nombreux exemples importants du point de vue des applications. De plus ceci donne une base pour des représentations générales. Nous allons décrire trois exemples concrets de systèmes dynamiques instables et éclaircir le sens de cette instabilité.

EXEMPLES DE SYSTEMES INSTABLES

Le gaz de Lorentz

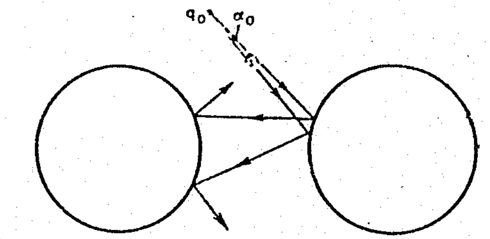
Supposons que se trouvent placés arbitrairement, mais en moyenne uniformément, sur un plan illimité, un nombre infini de circonférences de même rayon. Nous les nommerons diffuseurs. On considère le mouvement d'un point matériel se déplaçant à vitesse constante entre les diffuseurs. Lorsqu'il atteint un des diffuseurs le point se reflèchit selon la loi d'égalité de l'angle d'incidence et de l'angle de réflexion. Un tel système dynamique est appelé gaz de Lorentz, plus précisément gaz de Lorentz bidimensionnel. Proposé par H.A. Lorentz au début du XXè siècle comme modèle pour la conductivité des métaux, ce système se présente jusqu'à aujourd'hui comme un des modèles fondamentaux de la mécanique statistique de non-équilibre[4].

Le gaz de Lorentz bidimensionnel est l'exemple d'un des systèmes dynamiques les plus instables. Pour s'en convaincre, considérons un faisceau de trajectoires issues d'un point quelconque q_0 dans des directions différentes. L'angle d'ouverture du faisceau, angle entre les directions extrêmes, est un petit angle α_0. Lors de réflexions successives sur les diffuseurs chaque trajectoire modifie sa direction et l'angle entre les directions extrêmes se modifie.

On peut caractériser l'instabilité par le temps nécessaire pour que l'angle α_0 atteigne une grandeur de l'ordre de 1 radian. Autrement dit, au cours de cette durée "on perd la mémoire" de ce qu'à l'instant initial l'angle α_0 était petit et toutes les directions voisines les unes des autres. Plus ce temps est petit, plus le mouvement est instable.

Il apparaît que dans le gaz de Lorentz ce temps croît avec la diminution de α_0 proportionnellement à l'une des fonctions les plus lentes : $\ell n\ 1/\alpha_0$. La croissance logarithmique est une manifestation du caractère diffusif de la réflexion sur les diffuseurs circulaires. On peut remplacer les circonférences par n'importe quelle courbe convexe à courbure strictement positive, la proportionalité à $\ell n\ 1/\alpha_0$ se conserve. Mais si à la place de circonférences on prend des polygones, où la courbure des frontières est nulle, $\ell n\ 1/\alpha_0$ se change en $1/\alpha_0$ et l'on obtient un système beaucoup plus stable.

[4]Lorentz H.A., Proc. Amsterdam Academy 1905, v 437, n° 7, p. 585



"Perte de mémoire" dans les systèmes instables. Les trajectoires issues d'un même point q_0 dans des directions voisines (angle α_0) divergent très rapidement et leurs directions deviennent différentes. Ceci montre comment se produit la perte de mémoire des conditions initiales dans les systèmes dynamiques.

Des considérations relativement élémentaires permettent de se convaincre de l'instabilité d'un système de deux ou trois boules en collisions élastiques dans un récipient à faces planes. Il existe d'autres exemples, à caractère plus mathématique, de systèmes dynamiques instables. Ainsi par exemple le mouvement inertiel d'un point matériel dans un espace à courbure négative. Ce système dynamique est un cas particulier des systèmes d'Anosov, d'après le mathématicien soviétique D.V. Anosov, qui a apporté une contribution importante à l'étude des propriétés topologiques des systèmes dynamiques instables.

Sur l'exemple du gaz de Lorentz on peut déjà pressentir comment l'instabilité est liée à la statistique.

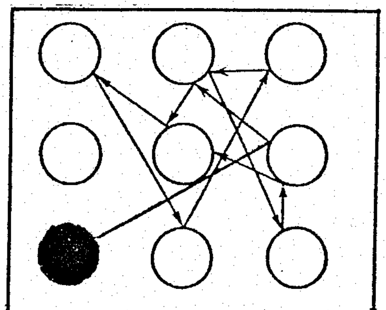
Considérons une suite de 0 et de 1, obtenue par dix lancers successifs d'une pièce de monnaie : 1,0,1,0,0,1,0,1,1,0. Nous écrirons 1 si la pièce tombe sur pile et 0 sur face.

Considérons maintenant un gaz de Lorentz bidimensionnel avec une configuration périodique des diffuseurs[5], et écrivons 1

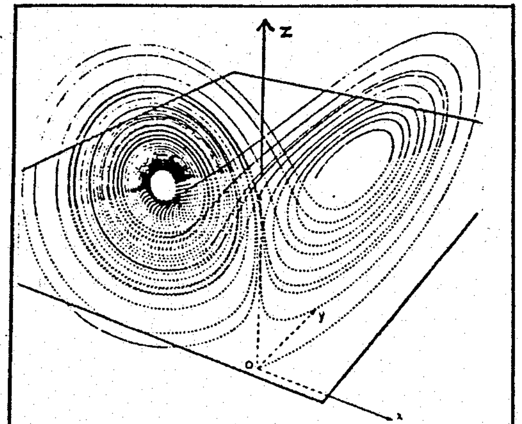
[5]On appelle périodique une configuration des diffuseurs où les centres forment un réseau cristallin régulier. Le gaz de Lorentz avec une configuration périodique des diffuseurs est fondamentalement plus simple pour l'analyse mathématique que le gaz de Lorentz avec une configuration arbitraire.

lorsque la réflexion s'effectue sur la moitié gauche de la circonférence et 0 sur la moitié droite. On peut trouver une trajectoire engendrant lors de dix réflexions la même suite de 0 et de 1 que la pièce de monnaie.

On peut bien sûr objecter que cet exemple est choisi ad hoc. Ce n'est pas le cas. Si l'on enregistre les réflexions non pas consécutivement, mais après un certain nombre de réflexions, on pourra pour une suite "aléatoire" de 0 et 1 de longueur quelconque trouver une trajectoire reproduisant cette suite.



Trajectoire d'un point dans le gaz de Lorentz, reproduisant après dix réflexions la suite "aléatoire" 1,0,1,0,0, 1,0,1,1,0. (le début de la trajectoire est sur le diffuseur noir). Pour la trajectoire d'un point du gaz de Lorentz nous écrivons 1 si la réflexion a lieu sur la demi-moitié gauche du cercle, et 0 sur la demi-moitié droite.



Trajectoire dans un système de Lorenz pour $\sigma=10$, $r=28$, $b=1/3$. Trajectoire obtenue sur ordinateur par le mathématicien américain O. Lanford. On peut voir qu'au départ elle effectue des tours à droite, puis quelques tours à gauche, puis de nouveau des tours à droite et ainsi de suite de manière irrégulière. Sur la figure apparaissent environ 50 tours.

Le modèle de Lorenz

Il est apparu récemment de nombreux travaux où l'on rencontre le terme "attracteur étrange". Ces attracteurs étranges se manifestent dans de nombreux problèmes de la physique, de l'hydrodynamique, de la biologie, de la chimie etc. Le journal "Progrès des Sciences Physiques" a publié en 1978 deux grandes revues de A.S. Monin et de M.I. Rabinovich, consacrées aux "attracteurs étranges" dans les problèmes physiques[6*].

L'intérêt pour les attracteurs étranges s'est largement développé au milieu des années 70. Ceci a été favorisé par des travaux mathématiques profonds concernant un domaine dénommé par la suite dynamique différentielle. Dans ces travaux on étudiait d'une manière abstraite des systèmes dynamiques multidimensionnels à comportement complexe de la trajectoire (attracteur de Smale-Williams, attracteur de Plykin, etc.).

Par ailleurs, en 1963, le météorologue américain réputé E. Lorenz[7] a publié un travail où il obtenait un système de trois équations différentielles ordinaires, nommé par la suite système de Lorenz, qu'il étudiait à l'aide d'un ordinateur.

Ce système se présente ainsi :

$$\frac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y$$

$$\frac{dy}{dt} = -xz + rx - y$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - bz$$

Dans les membres de droite, outre les termes linéaires, il n'y a pas plus d'un terme quadratique. On peut considérer que

[6] Monin A.S. Ousp. Fiz. Naouk 1978 T. 125 n° 1 p. 97
Rabinovich M.I. Ousp. Fiz. Naouk 1978 T. 125 n° 1 p. 123
[*] N.d.T. Cf. Ruelle D. La Recherche n° 108, p. 132, 1980

[7] Lorenz E.N. J. Atmos. Sci. 1963, v. 20, p. 130

c'est là le système le plus simple d'équations différentielles non linéaires. La dérivation de ce système d'équations a été faite par Lorenz à partir du problème bien connu de Bénard-Rayleigh de la convection d'un gaz ou d'un liquide placé entre deux plaques horizontales et chauffé par le bas.[8] Les paramètres σ, r, b ont un sens physique direct. Ainsi le gradient vertical de température est caractérisé par le paramètre r.

Si dans le problème de Bénard-Rayleigh r est inférieur à une certaine valeur critique, c'est la solution de Rayleigh qui s'avère déterminante : le gaz est immobile et la température varie linéairement d'une plaque à l'autre. Pour ces valeurs de r la solution de Rayleigh est stable. Lorsque r croît et atteint une certaine valeur critique, la solution de Rayleigh devient instable. A sa place apparaissent des mouvements convectifs du type "rouleaux", où l'espace se divise en cellules de convection, à l'intérieur desquelles le gaz a un mouvement selon des courbes fermées. Si l'on continue à augmenter r les "rouleaux" perdent aussi leur stabilité. Les expériences montrent alors l'apparition de mouvements complexes et irréguliers. E. Lorenz a observé dans son modèle de nombreux traits du problème de départ de Bénard-Rayleigh. Ainsi, pour $r < 1$ toutes les solutions du problème de Lorenz tendent vers le point (0,0,0) ce qui correspond à la stabilité de la solution de Rayleigh. Pour $r > 1$ la solution à l'origine devient instable et il apparaît de nouvelles solutions stables, correspondant à des mouvements convectifs. Il en existe deux car il n'existe que deux choix possibles du sens de rotation à l'intérieur des cellules de convection. Lorsque r continue d'augmenter ces solutions perdent aussi leur stabilité (pour $r > 25$). Lorenz a étudié par ordinateur l'aspect des trajectoires pour $r = 28$, $\sigma = 10$ et $b = 8/3$. Il a trouvé des trajectoires passant du demi-espace $x > 0$ au demi-espace $x < 0$ d'une manière totalement irrégulière et chaotique.

[8] Sous diverses variantes ce problème est envisagé dans l'article de Gaponov.Grekhov A.V. et Rabinovich M.I. La dynamique chaotique des systèmes simples. Priroda 1981, n° 2, p. 54.

Il faut plus précisément dire que si l'on choisit d'avance d'une manière quelconque une suite de passages d'un demi-espace à l'autre, il se trouvera toujours dans le système de Lorenz une trajectoire qui effectuera la même série de passages.

Nous rencontrons à nouveau une situation remarquée dans le cas du gaz de Lorentz : une suite "aléatoire" quelconque de sauts est reproduite par une trajectoire du système dynamique du modèle de Lorenz.

Le modèle de Lorenz fournit un exemple typique d'attracteur étrange. Pour des valeurs des paramètres, correspondant au domaine des solutions "aléatoires", il se forme dans l'espace des points (x,y,z) où a lieu le mouvement, un ensemble qui attire toutes les trajectoires voisines. De tels ensembles sot appelés des attracteurs. La compréhension de ce qui se produit là a été améliorée par le très important travail des mathématiciens de Gorki : V.S. Afraimovich, V.V. Bykov et L.P. Shilnikov[9]. En simplifiant quelque peu, leur explication revenait à ce que sur l'attracteur lui-même le mouvement a un caractère instable. D'un point de vue topologique l'attracteur consiste en quelque sorte en un nombre infini de feuillets bidimensionnels, comme des feuilles de papier, mais sa structure dans la direction perpendiculaire est bien plus compliquée et "lacunaire". Il suffit de dire, par exemple, qu'entre deux feuillets quelconques, il y a des lacunes, qui n'appartiennent pas à l'attracteur. C'est précisément à cause de cette structure topologique peu ordinaire que l'on a accolé à ces attracteurs l'épithète "étrange", par suite de la définition de tels attracteurs dans l'article fameux de D. Ruelle et F. Takens : "On the nature of turbulence" Comm. Math. Phys. 20, 167-192, 1971.

L'instabilité dans le modèle de Lorenz n'est pas aussi importante et régulière que dans le gaz de Lorentz. L'instabilité se manifeste en ce que si l'on modifie les données initiales selon certaines directions les trajectoires correspondantes s'écarteront exponentiellement l'une de l'autre. De plus il

[9] V.S. Afraïmovich, V.V. Bykov, L.P. Shilnikov. Doklady Akad. Naouk SSSR, 1977, T. 234, n° 2, p. 336.

apparaît que la divergence exponentielle des trajectoires s'observe si l'on n'enregistre que l'intersection des trajectoires avec certains plans, alors que par ailleurs les trajectoires peuvent se rapprocher. Il n'existe pas à l'heure actuelle de méthodes analytiques permettant de calculer la position des attracteurs étranges et d'étudier le caractère d'instabilité du mouvement sur ces attracteurs. Toute l'information disponible a été obtenue grâce aux ordinateurs. Mais les résultats sur l'instabilité ainsi décrits sont sûrs et même, en un certain sens, mathématiquement rigoureux.

Le gaz parfait

Le troisième exemple de système instable a un caractère quelque peu dégénéré. Il sera question du gaz parfait, c'est-à-dire d'un système de points matériels se déplaçant sans interaction dans l'espace. C'est là le système dynamique le plus simple de la mécanique statistique. Ce type de système a pour particularité distinctive, le grand nombre (en fait infini) de degrés de liberté et leur "égalité en droits", qui découle de ce que chaque particule influe de la même manière sur le comportement global du système. En ceci les systèmes de la mécanique statistique diffèrent, par exemple, de ceux de l'hydrodynamique, où l'influence des différents modes s'affaiblit avec la diminution de la longueur d'onde.

Malgré l'absence d'interactions le gaz parfait possède des propriétés statistiques définies. Ceci a été remarqué tout d'abord par H. Poincaré dans son travail sur le mouvement des "petites planètes" où il considèrait le mouvement circulaire de points matériels à vitesses angulaires différentes[10]. Poincaré a montré que si ces vitesses sont incommensurables, et que si toutes les planètes sont au même point à l'instant initial, par suite des vitesses angulaires différentes elles se répartissent uniformément sur le cercle au cours du temps. C'est sans aucun doute l'affirmation d'un caractère statistique. Ceci n'est bien entendu pas valable si les vitesses angulaires sont commensurables entre elles.

[10] Poincaré H. Réflexions sur la théorie cinétique des gaz, J. de Physique 1906, série 4, t. 5, p. 369.

L'instabilité du mouvement dans un gaz parfait se manifeste en ce que la distance entre deux molécules, se déplaçant à vitesses différentes, croît linéairement avec le temps. Evidemment c'est une instabilité très faible, mais elle suffit à assurer l'apparition de lois statistiques définies pour un gaz parfait à nombre infini de degrés de liberté.

L'affirmation selon laquelle la dynamique d'un gaz parfait possède des propriétés statistiques doit normalement susciter une certaine perplexité. On considère d'habitude que le caractère mélangeant et la relaxation vers l'équilibre qui lui est liée sont dûs aux interactions entre molécules, du type des collisions. Mais dans un gaz parfait la relaxation a tout de même lieu, à ceci près que seuls relaxent vers l'équilibre des distributions de non équilibre d'un type très particulier.

Les distributions de non équilibre, obtenues par perturbation des valeurs des paramètres thermodynamiques, ne relaxent pas vers des distributions d'équilibre.

Nous avons ainsi donné trois exemples plus ou moins significatifs de systèmes dynamiques instables.

COMMENT COMMENCE L'ANALYSE DES LOIS STATISTIQUES ?

Passons maintenant au problème essentiel : comment les lois statistiques découlent-elles de l'instabilité du mouvement ?

La première considération est la suivante. Du fait de l'instabilité, il y a dans ces systèmes une grande diversité des types de trajectoire. Afin d'éclaircir ceci, considérons l'espace de phase du système dynamique, c'est-à-dire l'espace dans lequel se produit le mouvement. Divisons-le en cellules et enregistrons à chaque unité de temps le numéro de la cellule où se trouve le point mobile. Le résultat de l'observation d'une trajectoire continue sur T unités de temps se présentera comme la suite $\{i_0, i_1, \ldots, i_T\}$ où les symboles $i_0, i_1 \ldots$ – sont les numéros successifs des cellules visitées. Le type de segment de trajectoire du temps 0 au temps T sera tout le mot $\{i_0, i_1, \ldots i_T\}$. Dans les systèmes instables le nombre de types différents de segment de trajectoire croît exponentiellement avec T. L'exposant de l'exponentielle est une caractéristique du système·

dynamique, qui s'avère une grandeur apparentée à l'entropie de la théorie de l'information.

Par ailleurs, si l'on envisage les mots "aléatoires" $\{i_0, i_1 \ldots i_T\}$ comme les mots où il n'y a aucune régularité, c'est-à-dire constitués sans aucune règle grammaticale, leur nombre augmente aussi exponentiellement avec le temps. Le nombre des suites "non aléatoires" où il existe des régularités du type périodicité, etc., croît plus lentement que l'exponentielle. Si l'on pose maintenant le problème de l'énumération des types de segments de trajectoire des systèmes dynamiques instables, on arrivera inévitablement à la conclusion, qu'il y aura parmi ces types des mots "aléatoires", et ceci en nombre exponentiel.

Les considérations développées sont évidemment très schématiques. Il serait très important de savoir évaluer quantitativement pour un système dynamique son degré d'aléatoire, d'étudier par exemple les fonctions de corrélation temporelle, la forme du spectre de fréquence etc. Nous abordons alors une question générale importante. Dans la mesure où il existe de nombreux types de trajectoires dans les systèmes dynamiques instables, il y a lieu de renoncer à l'étude des trajectoires individuelles, et de la remplacer par la considération des ensembles de trajectoires. Dans les systèmes instables il n'existe aucuns principes généraux permettant de préfèrer un ensemble à un autre, et ce choix peut se faire de nombreuses manières. Dans les problèmes concrets on définit habituellement un ensemble en donnant une densité de distribution de probabilité sur l'espace de phase. On étudie alors les propriétés des trajectoires apparaissant avec la probabilité 1 par rapport à cette distribution de probabilité (ces propriétés seront décrites plus concrètement plus loin) et par suite ne dépendant pas de fait de cette distribution. Outre des considérations de commodité il y a pour ce choix les bases suivantes. Dans ce cas l'ensemble est stable par rapport à toute petite perturbation du système dynamique, en ce sens que les propriétés statistiques des trajectoires typiques ne changent pas significativement sous l'action de petites perturbations. De plus, lorsque l'on étudie les systèmes dynamiques instables au moyen de calculs faits sur ordinateur, on a affaire à des transformations individuelles d'espaces de phase discrets. Il existe des arguments sérieux pour penser que les caractéristiques statistiques

des trajectoires obtenues par calcul sur ordinateur et celles de l'ensemble décrit plus haut sont voisines. Cependant, à notre connaissance, cette question n'a pas été étudiée d'une manière suffisamment sérieuse.

Supposons, par exemple, que l'on choisisse au moyen du procédé décrit précédemment, un ensemble de trajectoires. Remarquons que le passage à l'ensemble ne signifie pas l'addition d'un quelconque mécanisme aléatoire extérieur à la dynamique déterministe. C'est là seulement un procédé d'évaluation, un choix particulier des unités de mesure, afin de pouvoir définir quantitativement un lot de trajectoires à propriétés déterminées. Formulons maintenant avec plus de précision les propriétés statistiques que nous voulons extraire des propriétés de la dynamique.

QUELLES PROPRIETES STATISTIQUES ETUDIE-T-ON DANS LES SYSTEMES INSTABLES ?

Existence et propriétés des moyennes temporelles

Il a déjà été dit que dans les applications de la théorie des probabilités les valeurs véritables des probabilités sont déterminées sur la base de l'observation statistique de telle ou telle fréquence. L'existence de limites pour ces fréquences est la conséquence d'une des lois fondamentales de la théorie des probabilités -la loi des grands nombres. Elle est vérifiée dans des conditions précises d'indépendance des résultats des observations statistiques individuelles.

Dans le cas de systèmes dynamiques il est naturel de considérer, à la place des séries d'observations statistiques, les caractéristiques moyennes au cours du temps des trajectoires du système, comme par exemple la fraction de temps passée par un segment de trajectoire de longueur T dans une cellule de l'espace de phase, donnée à l'avance. L'ensemble est dit ergodique si pour toute cellule et pour des trajectoires typiques, il existe tout d'abord une limite pour la fraction de temps passée par le segment de trajectoire dans la cellule lorsque $T \to \infty$, et si de plus cette limite est la même pour toutes les trajectoires typiques.

Pour les systèmes dynamiques conservatifs de la mécanique classique, qui vérifient la loi de conservation de l'énergie, l'existence d'une limite pour les moyennes temporelles découle des considérations générales de la théorie ergodique. De ce fait la seule question non triviale est l'indépendance de ces moyennes par rapport à la trajectoire. Dans la littérature cette question apparaît sous le nom d'"hypothèse ergodique" et remonte à L. Boltzmann. Dans le cas des attracteurs étranges les problèmes d'existence et d'étude des moyennes temporelles sont loin d'être triviaux et sont liés à la question de la structure des distributions de probabilité naturelles sur ces attracteurs.

Fluctuations des moyennes temporelles

En théorie classique des probabilités on rencontre constamment à côté de la loi des grands nombres la loi de distribution gaussienne pour l'écart entre les fréquences et les probabilités. La distribution de ces écarts peut aussi être étudiée dans le cas des systèmes dynamiques. En admettant que l'ergodicité de l'ensemble est établie, considérons une fonction f sur l'espace de phase, sa moyenne temporelle $\frac{1}{T}\int_0^T f(x_s)ds$, et la limite de cette moyenne $\bar{f} = \lim\limits_{T\to\infty} \int_0^T f(x_s)ds$. Par x_s on représente ici la position du point mobile à l'instant s. La différence entre ces deux quantités, qui représente la fluctuation de la moyenne temporelle, tend vers zéro quand $T \to \infty$. Pour de nombreuses catégories de systèmes dynamiques instables il apparaît qu'elle tend vers zéro comme 1/T. C'est pourquoi il est naturel de considérer la différence normalisée $\sqrt{T}\,(\frac{1}{T}\int_0^T f(x_s)ds - \bar{f})$. Si la probabilité pour que la différence normalisée soit comprise entre a et b, tend pour tout a et b vers une limite égale à $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\int_a^b e^{-v^2/2\pi}dv$ pour $T \to \infty$, nous avons en fait là une probabilité calculable à l'aide de la distribution classique de Gauss. C'est pourquoi nous dirons dans ce cas que cette différence obéit pour $T \to \infty$ à la distribution de probabilité de Gauss. Le nombre σ qui figure dans la dernière expression dépend de la fonction f et de l'ensemble.

Le problème consiste ainsi à prouver que les fluctuations des moyennes temporelles obéissent à la loi de Gauss pour $T \to \infty$, dans le cas d'un système dynamique donné et pour une large classe de fonctions f.

LES FONCTIONS DE CORRELATION TEMPORELLES ET LEUR COMPORTEMENT

Considérons à nouveau une fonction f sur l'espace de phase. Supposons que nous avons démontré que l'ensemble est ergodique et que $\bar{f} = 0$. On appelle fonction de corrélation temporelle la limite

$$b(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(x_{s+t})\, f(x_s)ds$$

Il existe de nombreux problèmes où il est important de connaître le caractère du comportement de b(t) lorsque $t \to \infty$.

Si $b(t) \to 0$ lorsque $t \to \infty$ pour tout f borné, le système dynamique est appelé mélangeant (mixing). Dans les problèmes de la mécanique statistique hors-équilibre la vitesse de décroissance de b(t) lorsque $t \to \infty$ est étroitement liée à la détermination des coefficients de transport, comme le coefficient de viscosité ou celui de conductivité thermique, etc. La présence dans b(t) d'une composante périodique ou presque périodique signifie l'existence dans le système d'un mouvement périodique ou presque périodique.

Dans les modèles de la théorie des probabilités une décroissance rapide (exponentielle) des fonctions de corrélation temporelles se rencontre pour les chaînes ou processus de Markov. Dans les systèmes dynamiques, afin d'étudier la vitesse de décroissance de b(t), on est amené à construire ce que l'on appelle une approximation markovienne du système dynamique et dont nous parlerons plus loin.

ETUDE DES PROPRIETES STATISTIQUES DES SYSTEMES DYNAMIQUES

L'étude des propriétés décrites ci-dessus constitue dans le cas des systèmes dynamiques instables une théorie mathématique suffisamment compliquée pour que l'on ne puisse la décrire qu'à grands traits dans le cadre de cet article.

La première considération, relativement attendue et nullement évidente, consiste en ce que les trajectoires des systèmes instables se séparent en faisceaux de trajectoires qui se rapprochent exponentiellement lorsque $t \to \infty$ ou $t \to -\infty$.

L'existence de tels faisceaux asymptotiques s'avère une conséquence directe de l'instabilité du mouvement, mais il n'est pas aisé de trouver l'aspect explicite de ces faisceaux même dans des cas concrets comme le gaz de Lorentz par exemple.

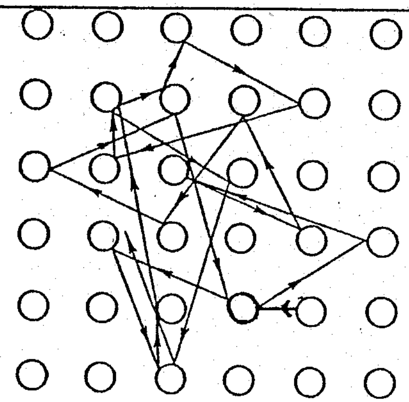
Des faisceaux de trajectoires convergentes lorsque $t \to \pm\infty$ sont bien connus en géométrie de Lobatchevsy. Sur des plans de Lobatchevsky on peut pour toute droite et par tout point hors de cette droite faire passer : des droites qui coupent la droite donnée, des droites qui ne coupent pas cette droite et s'éloignent d'elle à l'infini, deux droites limites s'approchant asymptotiquement de la droite dans l'une ou l'autre direction. Si par chaque point du plan de Lobatchevsky on fait passer une droite limite, qui s'approche de la droite donnée dans une certaine direction, nous obtiendrons le faisceau des droites asymptotiques qui nous intéresse. L'insolite apparent des faisceaux asymptotiques dans les systèmes instables est lié à notre mode de pensée "euclidien". A l'aide de tels faisceaux asymptotiques on construit des partitions particulières de l'espace de phase dites, partitions markoviennes. Il apparaît alors des liens nouveaux inattendus avec la mécanique statistique d'équilibre.

Dans la mécanique statistique d'équilibre on considère des systèmes à grands nombres de particules dans de grands volumes, dont la distribution de probabilité, dite distribution de Gibbs, est déterminée par la fonction de Hamilton du système. Le lien avec la mécanique statistique apparaît si l'on considère d'une manière formelle le grand paramètre d'un système dynamique, le temps, comme un paramètre de volume. L'espace des morceaux de trajectoire d'un système dynamique se présente alors comme l'espace de phase d'un certain système de la mécanique statistique. La distribution de probabilité des ensembles de trajectoires devient alors une distribution d'équilibre de Gibbs avec une fonction de Hamilton construite à l'aide des caractéristiques dynamiques du système.

Rapportons un résultat obtenu récemment à l'aide des méthodes

ainsi décrites. Revenons au gaz de Lorentz et supposons que la configuration des diffuseurs est périodique. En choisissant un instant quelconque T, effectuons une transformation de similitude sur l'espace avec un coefficient $1/\sqrt{T}$, et une transformation analogue de l'axe du temps avec un coefficient $1/T$. En d'autres termes augmentons $\sqrt{T}$ fois l'unité de longueur et T fois l'unité de temps. Après cette transformation, pour une grande valeur de T, la trajectoire d'une molécule du gaz de Lorentz consistera en une succession de droites de longueur $\sim 1/\sqrt{T}$ et aura un aspect complexe et emmélé, analogue à celui de la trajectoire d'une particule brownienne. En fait ce n'est pas seulement une analogie. Le résultat mentionné ci-dessus consiste en ce que, si l'on se donne une densité de distribution de probabilité $p(q_0,v_0)$ pour les coordonnées et les vitesses initiales du point mobile après la transformation d'échelle, pour $T \to \infty$, les distributions de probabilité des coordonnées à tout instant tendront vers la distribution de probabilité d'une particule brownienne.

Le mouvement brownien habituel est le mouvement d'une particule massive sous l'action par collisions d'un grand nombre de particules légères. Dans le gaz de Lorentz c'est une particule légère qui se déplace en se réfléchissant sur des particules lourdes fixes. Pour de grandes valeurs de T le mouvement apparaît comme chaotique, brownien, précisément à cause de l'instabilité.



Long morceau d'une trajectoire dans le gaz de Lorentz, débutant sur le diffuseur noir. Courbe complexe en zig-zag évoquant la trajectoire d'une particule brownienne. A la différence du mouvement brownien habituel d'une particule lourde sous l'effet des collisions d'un grand nombre de particules légères, dans le gaz de Lorentz c'est une particule légère qui se déplace en se réfléchissant sur des particules lourdes.

Ce résultat montre aussi comment, directement à partir des équations de la mécanique, réversibles par rapport au temps, on peut déduire les équations mécaniques irréversibles d'un milieu continu, dans ce cas les équations de la diffusion.

L'instabilité des systèmes dynamiques comporte une propriété remarquable de stabilité par rapport aux petites perturbations. Supposons que nous rajoutions dans le membre de droite des équations du mouvement un bruit faible de nature quelconque. Il aurait pu arriver que ce bruit défigure complètement les propriétés statistiques des trajectoires. Il n'en est rien. En fait, il y a dans les systèmes instables de si nombreuses trajectoires différentes, que si l'on fait subir une petite perturbation à une trajectoire donnée, la trajectoire perturbée se trouvera au bout d'un temps suffisamment long voisine d'une autre trajectoire du système dynamique non perturbé. Le temps pendant lequel ces trajectoires vont se trouver voisines est suffisamment long pour que les caractéristiques statistiques réussissent à s'établir. Ainsi il apparaît que le caractère aléatoire d'un système dynamique instable n'est pas détruit par l'action de petits bruits "aléatoires" non contrôlés.

Remarquons que le tirage d'une loterie, comme "Sportloto" s'effectue effectivement en utilisant un système dynamique instable et s'avère de ce fait "aléatoire" au plus haut point.

* * *

La conclusion immédiate de tout ceci est l'absence de nécessité d'un mécanisme aléatoire extérieur complémentaire pour l'applicabilité des lois de la théorie des probabilités. Les lois statistiques sont souvent le résultat de la manifestation de propriétés déterministes de certaines dynamiques. Une de ces propriétés est l'instabilité du mouvement. Plus le mouvement est instable, plus s'y manifeste avec stabilité des lois statistiques.

L'instabilité d'une dynamique non aléatoire conduit à l'apparition de l'aléatoire.

* * *

<u>Note ajoutée par l'auteur pour la traduction française</u>

Le premier lecteur, critique et rédacteur de cet article a été B.M. Vul. Ses remarques ont permis d'améliorer à un haut degré la précision et la clarté de l'exposé. Je dédie la traduction française de mon article à sa radieuse mémoire.

APPENDICES AJOUTES PAR LE TRADUCTEUR

APPENDICE I

Il a été signalé dans le corps du texte que Maxwell, avant Poincaré avait conscience du lien entre l'instabilité et la statistique. Pour la commodité du lecteur reproduisons ici les propos en question :

"It is a metaphysical doctrine that from the same antecedents follow the same consequents. No one can gainsay this. But it is not of much use in a world like this, in which the same antecedents never again concur, and nothing ever happens twice...
The physical axiom which has a somewhat similar aspect is "that from like antecedents follow like consequents". But here we have passed from sameness to likeness, from absolute accuracy to a more or less rough approximation. There are certain classes of phenomena... in which a small error in the data only introduces a small error in the result... The course of events in these cases is stable.
"There are other classes of phenomena which are more complicated, and in which cases of instability may occur, the number of such cases increasing, in an extremely rapid manner, as the number of variables increases...

"Every existence above a certain rank has its singular points: the higher the rank, the more of them. At these points, influences whose physical magnitude is too small to be taken account of by a finite being, may produce results of the highest importance...

"If, therefore, those cultivators of physical science from whom the intelligent public deduce their conception of the physicist... are led in persuit of the arcana of science to the study of the singularities and instabilities, rather than the continuities and stabilities of things, the promotion of natural knowledge may tend to remove that prejudice in favor of determinism which seems to arise from assuming that the physical science of the future is a mere magnified image of that of the past".

James Clerk Maxwell (1873)
Cité dans Campbell (L) Garnett (W)
The life of James Clerk Maxwell
Mac Millan Co (1882)

"Une cause très petite qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard. Si nous connaissions exactement les lois de la nature et la situation de l'univers à l'état initial, nous pourrions prédire exactement la situation de ce même univers à un instant ultérieur. Mais, lors même que les lois naturelles n'auraient plus de secret pour nous, nous ne pourrions connaître la situation qu'approximativement. Si cela nous permet de prévoir la situation ultérieure avec la même approximation, c'est tout ce qu'il nous faut, nous disons que le phénomène a été prévu, qu'il est régi par des lois ; mais il n'en est pas toujours ainsi, il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux ; une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les dernières. La prédiction devient impossible et nous avons le phénomène fortuit".

H. Poincaré. Calcul des probabilités
p. 4, Gauthier-Villars 1912

APPENDICE II

Compléments bibliographiques

Articles de popularisation du même niveau que celui de Sinaī

1. LEBOWITZ J.L., PENROSE O., Physics ToDay 26, 1-7, 1973
Modern ergodic theory
2. CHAITIN G.J., Scientific American 232, 47-52, 1975
Randomness and mathematical proof
3. CASATI G., Scientia 113, 1978. Chaotic behavior in deterministic systems
4. RUELLE D., La Recherche n° 108 Février 1980 p. 132
Les attracteurs étranges
5. BERGE P., POMEAU Y., La Recherche n° 110 Avril 1980 p. 422
La turbulence
6. VIDAL C., ROUX J.C., Pour la Science n° 39 Janvier 1981 p.50
Comment naît la turbulence
7. HOFSTADTER D., Pour la Science, Mars 1982, p. 16. Les attracteurs étranges, de fragiles structures mathématiques entre l'ordre et le désordre, et les nombres de Feigenbaum
8. CROQUETTE V., Pour la Science n° 62 Décembre 1982 p. 62
Déterminisme et chaos
9. MILGRAM M. dans P. Dumouchel et J.P. Dupuy, eds. L'auto-organisation. De la Physique au Politique. Le Seuil 1983
Les formalismes du hasard
10. FORD J., Physics ToDay, 40-47, April 1983. How random is a coin toss ?
11. CRAWFORD J.D., LOTT J., RIECKE H., Am. J. Phys. 50 (4), 363-373, 1982. Connection between non linear resonance and statistical behavior
12. KADANOFF L.P., Physics ToDay 46-53, December 1983. Roads to chaos
13. RUELLE D., Pour la Science 82,58, Août 1984. Déterminisme et prédicibilité
14. EKELAND I., Le calcul, l'imprévu. Le Seuil, Paris, 1983

Ouvrages de base

1. ARNOLD V.I., AVEZ A., Problèmes ergodiques de la Mécanique classique, Gauthier-Villars 1967
2. CORNFELD I.P., FOMIN S.V., SINAI J.G., Ergodic theory, Springer Verlag 1981
3. LICHTENBERG A.J., LIEBERMAN M.A., Regular and stochastic motion, Springer Verlag 1983
4. GUCKENHEIMER J., HOLMES P., Nonlinear oscillations, Dynamical systems, and Bifurcations of vector fields, Springer Verlag 1983
5. ZASLAVSKY G.M., Chaos in dynamic systems, Harwood, 1985
6. RABINOVICH M.I., TROUBETSKOV D.I., Introduction à la théorie des vibrations et des ondes, Nauka, Moscow 1984 (en russe)
7. BERGE P., POMEAU Y., VIDAL Ch., L'Ordre dans le Chaos. Vers une approche déterministe de la turbulence, Hermann, Paris, 1984.
8. SCHUSTER H.G., Deterministic chaos. An introduction. Physik Verlag 1984.

Articles de revues fondamentaux

1. BERRY M. dans Jorna S. ed. Topics in nonlinear dynamics, American Institute of Physics 1978 p. 16. Regular and irregular motion
2. HELLEMAN R.H.G. dans Cohen E.G.D. ed. Fundamental problems in Statistical Mechanics vol. 5 North Holland 1980 p. 165-233. Self-generated chaotic behavior in nonlinear mechanics (bibliographie étendue)
3. OTT E., Rev. Mod. Physics 53, 655, 1981,Strange attractors and chaotic motions of dynamical systems
4. ECKMANN J.P., Rev. Mod. Physics 53, 643, 1981, Roads to turbulence in dissipative dynamical systems
5. On pourra lire dans S. Diner, D. Fargue, G. Lochak, eds. La Pensée Physique Contemporaine, A. Fresnel 1982, les trois articles :
   p. 365 AVEZ A., Hasard et information
   p. 429 CASATI G., La théorie ergodique et le comportement stochastique dans les systèmes non linéaires
   p. 391 BASS J., L'analyse des phénomènes aléatoires. Méthodes probabilistes et méthodes déterministes
6. Les fondements logiques du calcul des probabilités sont admirablement discutés dans :
   MARTIN-LÖF P., Theoria 1, 12, 1969. The literature on Von Mises' Kollektivs revisited.
   DELLACHERIE C., Gazette des mathématiciens n° 11, 1978 Nombres au hasard. De Borel à Martin-Löf.
7. CHIRIKOV B.V., IZRAIELEV F.M., SCHEPELYANSKY D.L., S.P. Novikov, ed., Soviet Scientific Reviews, Sect C, Math. Phys. Rev. Harwood N.Y. vol. 2, 209-267, 1981. Dynamical stochasticity in classical and quantum mechanics.
8. PIKOVSKII A.S., RABINOVICH M.I., S.P. Novikov, ed., Soviet Scientific Reviews, Sect C, Math. Phys. Rev. Harwood N.Y. vol. 2, 165-208, 1981. Stochastic behavior of dissipative systems.