Annales de la Fondation Louis de Broglie,
Vol. 11, n° 1, 1986

Electromagnétisme et équation de Dirac en dimension 5

par Claude DAVIAU

La Landé, Pouillé-les-Coteaux
44150 Ancenis

(manuscrit reçu le 4 Décembre 1985)

Résumé : Les équations de l'électromagnétisme en dimension 5 aboutissent, sous des hypothèses simples, à l'électromagnétisme du photon de L. de Broglie. L'équation de Dirac se transpose immédiatement en dimension 5. Le couplage électromagnétique est très peu modifié, et les états stationnaires sont identiques à ceux de la théorie aujourd'hui classique de Dirac.

Dans un précédent article, nous avions discuté, à partir d'une étude sur le spin, la question certes peu nouvelle d'une cinquième dimension d'espace-temps. Cette question a été abordée de diverses manières par de très nombreux chercheurs, depuis Kaluza (1) jusqu'à nos jours (2)(3). Des travaux récents sur l'unification des interactions fortes et faibles ont repris les travaux anciens. Sans aborder la théorie des groupes de Lie, ni la géométrie riemanienne, il nous paraissait intéressant d'obtenir, à partir d'équations classiques de l'électromagnétisme, les équations de l'électromagnétisme du photon de Louis de Broglie. Nous commencerons par rappeler brièvement ces résultats, sous une forme légèrement modifiée par rapport à (4). Nous utiliserons, par commodité :

$$(1.1) \qquad a_\mu = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (a_1, a_2, a_3, ia_0, a_5)$$

(1.2) $a^{\mu} = (-a_1, -a_2, -a_3, -a_4, -a_5)$

(1.3) $a_{\mu}a^{\mu} = a_1a^1 + a_2a^2 + a_3a^3 + a_4a^4 + a_5a^5 = a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 - a_5^2$

(1.4) $$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_4}, \frac{\partial}{\partial x_5}\right) = (\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_4, \partial_5)$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\ \frac{\partial}{\partial x_2}\ \frac{\partial}{\partial x_3}\ \frac{1}{ic}\ \frac{\partial}{\partial t}\ \frac{\partial}{\partial x_5}\right)$$

$\vec{A}$ désignera le potentiel-vecteur et V le potentiel électrique de l'électromagnétisme. Supposons que, dans un repère, le potentiel soit de la forme :

(1.5) $A_{\mu} = (c\vec{A}, iV, 0)$: $A_1 = cA_x$; $A_2 = cA_y$; $A_3 = cA_z$;
$A_4 = iV$; $A_5 = 0$

(1.6) $A_{\mu}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = A_{\mu}(x_1, x_2, x_3, x_4)e^{iax_5}$

Donc on aura :

(1.7) $\partial_5 A_{\mu} = iaA_{\mu}$

Comme en électromagnétisme classique, posons :

(1.8) $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$ $\qquad \mu, \nu = 1,2,3,4,5$

On obtient alors :

(1.9) $F_{12} = cB_3$; $F_{13} = -cB_2$; $F_{23} = cB_1$; $F_{14} = iE_1$;
$F_{24} = iE_2$; $F_{34} = iE_3$

où $\vec{E} = (E_1, E_2, E_3)$ et $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$ vérifient :

(1.10) $\vec{B} = \text{rot}\ \vec{A}$; $\vec{E} = -\text{grad}\ V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

Pour $\mu = 5$, les relations (1.8) nous donnent :

(1.11) $F_{5\nu} = \partial_5 A_{\nu} - \partial_{\nu}A_5 = iaA_{\nu} - \partial_{\nu}A_5$ et si $A_5 = 0$: $F_{5\nu} = iaA_{\nu}$

Donc, dans un repère où les conditions (1.5) et (1.6) sont satisfaites, le tenseur antisymétrique complet est formé des 3 composantes du champ magnétique, des 3 composantes du champ électrique et des 4 composantes du quadri-vecteur potentiel : il ne s'introduit aucune grandeur étrangère à l'électromagnétisme classique.

Les relations (1.8) entraînent :

(1.12) $\partial_{\rho}F_{\mu\nu} + \partial_{\mu}F_{\nu\rho} + \partial_{\nu}F_{\rho\mu} = 0$ $\qquad$ c'est-à-dire :

(1.13) $\text{rot}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$; $\text{div}\ \vec{B} = 0$

Les équations en présence de courant :

(1.14) $\partial_{\rho}F^{\mu\rho} + \frac{1}{\varepsilon_0}j^{\mu} = 0$ $\qquad$ deviennent ici :

(1.15) $\text{div}\ \vec{E} + a^2V = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

(1.16) $\text{rot}\ \vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - a^2\vec{A} + \mu_0\vec{j}$

De plus, la cinquième équation (1.14) est :

$\Box A_5 + \frac{1}{\varepsilon_0}j_5 + iac(\text{div}\ \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t})$ $\qquad$ ce qui donne, pour $j_5 = A_5 = 0$:

(1.17) $\text{div}\ \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ $\qquad$ c'est-à-dire la relation de Lorentz.

Les équations (1.10), (1.13), (1.15), (1.16), (1.17) ont été obtenues par Louis de Broglie dans sa théorie de la fusion des particules à spin (5). On les obtient ici par un calcul beaucoup plus élémentaire, et sans les équations non maxwelliennes de la théorie du photon.

Le raccordement est complet si l'on pose :

(1.18) $a = \frac{m'c}{\hbar}$, où m' désigne la masse propre, extrêmement petite, du photon.

La plupart des physiciens ont admis jusqu'ici que les photons et les neutrinos étaient des particules de masse nulle. Il semble aujourd'hui que la masse du neutrino pourrait bien être certes petite, mais non nulle. Pourquoi n'en serait-il pas de même pour le photon ? C'est en tout cas le point de vue de Louis de Broglie, qui a toujours considéré le photon comme une particule comme les autres.

Invariants du champ électromagnétique

Les invariants du champ sont les coefficients du polynôme caractéristique :

(1.19) $P(\lambda) = \text{dét}(F_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu})$ Le calcul de $P(\lambda)$, en dimension 4, donne :

(1.20) $P_4(\lambda) = -\lambda^4 + (\vec{E}^2 - c^2\vec{B}^2)\lambda^2 + c^2(\vec{E}.\vec{B})^2$

En dimension 5, le calcul nous donne :

(1.21) $P_5(\lambda) = -\lambda^5 + [\vec{E}^2 - c^2\vec{B}^2 - a^2(V^2 - c^2\vec{A}^2)]\lambda^3$

$+ [c^2(\vec{E}.\vec{B})^2 + a^2c^2(\vec{E}.\vec{A})^2 + a^2c^4(\vec{B}.\vec{A})^2 - a^2c^2(\vec{E}^2\vec{A}^2 + V^2\vec{B}^2)$

$+ 2a^2c^2 \det(\vec{E},\vec{B},\vec{A})]\lambda$

Etant donné l'extrême petitesse de a, on a :

(1.22) $P_5(\lambda) \simeq \lambda\, P_4(\lambda)$

Les invariants du champ sont pratiquement les mêmes. La petitesse de la masse propre du photon rend en quelque sorte "invisible" la cinquième dimension des équations de l'électromagnétisme.

De plus, par tout changement de coordonnées lorentzien, la direction x_5 est invariante, les quatrièmes composantes d'espace A_5 ou j_5 sont invariantes, donc s'il existe un repère dans lequel ces deux grandeurs sont nulles, elles le sont dans tout autre repère. Donc les relations (1.5) et (1.6)

sont conservées, donc aussi toutes les relations qui en découlent.

2- EQUATION DE DIRAC EN DIMENSION 5

L'équation relativiste de Klein-Gordon s'obtient à partir de :

(2.1) $\frac{E^2}{c^2} - (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + m_0^2c^2) = 0$, grâce aux règles de correspondance :

(2.2) $E \leftrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$; $p_x \leftrightarrow \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$; $p_y \leftrightarrow \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y}$; $p_z \leftrightarrow \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial z}$

On obtient :

(2.3) $\Box\psi + \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\psi = 0$ avec $\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Pour garder l'interprétation probabiliste et l'invariance relativiste, Dirac a remplacé cette équation du second ordre par une équation du premier ordre, en utilisant une fonction d'onde à 4 composantes et des matrices α_1, α_2, α_3, α_4 telles que :

(2.4) $\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij}1$ (1 matrice unité)

L'équation de Dirac s'écrit :

(2.5) $$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - i\frac{eV}{\hbar c}\right)\psi = \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{ieA_x}{\hbar e}\right)\alpha_1 + \left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{ieA_y}{\hbar c}\right)\alpha_2 + \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{ieA_z}{\hbar c}\right)\alpha_3 + i\frac{m_0c}{\hbar}\alpha_4\right)\psi$$

L'équation de Dirac peut être mise sous une forme plus symétrique en posant :

(2.6) $Y_1 = i\alpha_4\alpha_1$; $Y_2 = i\alpha_4\alpha_2$; $Y_3 = i\alpha_4\alpha_3$; $Y_4 = \alpha_4$

(2.7) $P_1 = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} + eAx$; $P_2 = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y} + eAy$; $P_3 = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial z} + eAz$;

$$P_4 = -\frac{\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t} + ieV$$

On obtient, comme pour les matrices α_i :

(2.8) $Y_iY_j + Y_jY_i = 2\delta_{ij}\,1$

Avec la sommation sur μ, l'équation de Dirac prend la forme :

(2.9) $(P_\mu Y_\mu + im_0c)\psi = 0$

L'équation de Klein-Gordon ne diffère de l'équation des ondes électromagnétiques que par un terme supplémentaire. Ceci nous suggère à nouveau l'utilisation d'une dimension supplémentaire d'espace etd'une cinquième règle de correspondance :

(C5) $m_0c \leftrightarrow \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_5} + eA_5 = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_5}$ $\quad (A_5 = 0)$

Ceci équivaut à :

$$\psi(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = \psi(x_1,x_2,x_3,x_4)e^{i\frac{m_0c}{h}x_5}$$

Cette égalité signifie que les masses sont les valeurs propres de l'opérateur ∂_5, ou encore que la phase interne de la particule est simplement la phase dans la propagation suivant la direction supplémentaire x_5.

Posons : $\Box = \square - \frac{\partial^2}{\partial x_5^2}$

l'équation de Klein-Gordon est alors l'équation des ondes électromagnétiques :

(2.10) $\Box\,\psi = 0$

Cette équation peut-elle être remplacée, comme en dimension 4, par une équation du premier ordre ? Il suffit pour cela qu'il existe 5 matrices Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5 vérifiant

(2.8). Or il est bien connu que la matrice :

(2.11) $Y_5 = Y_1Y_2Y_3Y_4$, en théorie de Dirac, vérifie les relations de commutation (2.8).

Si donc on pose :

(2.12) $P_5 = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_5} + eA_5$, l'équation de Dirac s'écrit simplement, avec sommation sur μ :

(2.13) $Y_\mu P_\mu\,\psi = 0$

On sait que l'on peut choisir :

(2.14) $1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ $\sigma_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$ $\sigma_2 = \begin{pmatrix}0 & -i\\i & 0\end{pmatrix}$ $\sigma_3 = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$

$$Y_1 = \begin{pmatrix}0 & i\sigma_1\\-i\sigma_1 & 0\end{pmatrix} \quad Y_2 = \begin{pmatrix}0 & i\sigma_2\\-i\sigma_2 & 0\end{pmatrix} \quad Y_3 = \begin{pmatrix}0 & i\sigma_3\\-i\sigma_3 & 0\end{pmatrix}$$

$$Y_4 = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} \quad Y_5 = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix}0 & \sigma_1\\\sigma_1 & 0\end{pmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix}0 & \sigma_2\\\sigma_2 & 0\end{pmatrix} \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix}0 & \sigma_3\\\sigma_3 & 0\end{pmatrix}$$

$$\alpha_5 = iY_5Y_4 = \begin{pmatrix}0 & -i1\\i1 & 0\end{pmatrix}$$

On a alors :

(2.15) $Y_\mu^+ = Y_\mu$ et $Y_\mu^2 = 1$, $\quad \mu = 1,2,3,4,5$

Comme en théorie de Dirac, on posera :

(2.16) $\bar{\psi} = \psi^+Y_4$

Donc, avec :

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \qquad \bar{\psi} = (\psi_1^*, \psi_2^*, -\psi_3^*, -\psi_4^*)$$

$$\partial_5 \psi^+ = -i \frac{m_0 c}{\hbar} \psi^+$$

(2.17) $$\partial_5 \bar{\psi} = -i \frac{m_0 c}{\hbar} \bar{\psi}$$

L'équation adjointe de l'équation de Dirac est :

$\sum_k \frac{\partial \psi^+}{\partial x_k} Y_k^+ + \frac{\partial \psi^+}{\partial x_4^*} Y_4 + \frac{\partial \psi^+}{\partial x_5} Y_5 = 0$, soit en multipliant à droite par Y_4 :

$- \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_k} Y_k - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_4} Y_4 - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_5} Y_5 = 0$, donc simplement :

(2.18) $P_\mu \bar{\psi} Y_\mu = 0$ On obtient, en multipliant (2.13) à gauche par $\bar{\psi}$ et (2.18) à droite par ψ et en ajoutant :

$\bar{\psi} Y_\mu P_\mu \psi + P_\mu \bar{\psi} Y_\mu \psi = 0$ c'est-à-dire encore :

(2.19) $\partial_\mu (\bar{\psi} Y_\mu \psi) = 0$; donc avec $s_\mu = \bar{\psi} Y_\mu \psi$: $\partial_\mu s_\mu = 0$

Par rapport au quadrivecteur flux-densité classique, l'équation (2.19) comporte le terme supplémentaire :

$\partial_5 (\bar{\psi} Y_5 \psi)$.

Ce terme peut être regardé comme un terme source du quadrivecteur flux-densité. Cela paraît fâcheux puisque le quadrivecteur flux-densité, dans la théorie de Dirac, est conservatif et c'est justement ceci qui permet de normer les fonctions d'onde. Mais, pour les solutions qui vérifient la condition (C5) :

(2.20) $$\partial_5 (\bar{\psi} Y_5 \psi) = (\partial_5 \bar{\psi}) Y_5 \psi + \bar{\psi} Y_5 (\partial_5 \psi) = -i \frac{m_0 c}{\hbar} \bar{\psi} Y_5 \psi + \bar{\psi} Y_5 i \frac{m_0 c}{\hbar} \psi = 0$$

Donc en fait l'équation à 5 dimensions nous redonne l'équation de continuité du courant à 4 dimensions : là aussi, la cinquième dimension est "cachée", dès que l'onde est fonction propre de l'opérateur de masse. D'autre part, les solutions de (2.13) qui ne vérifient pas (C5) ne peuvent pas être associées à un quadrivecteur flux-densité conservatif, et peuvent donc apparaître ou disparaître spontanément. Il y a donc place ici pour la création ou la disparition de particules, ce qui n'est pas le cas pour la théorie de Dirac avant la seconde quantification.

L'utilisation des matrices de Dirac nous permet de réobtenir l'énoncé bien connu : si un ensemble de 4 matrices Y'_μ vérifient $Y'_\mu Y'_\nu + Y'_\nu Y'_\mu = 2\delta_{\mu\nu} 1$, on sait qu'il existe une matrice S telle que $Y'_\mu = S Y_\mu S^{-1}$, de sorte que l'équation de Dirac obtenue avec un autre système de matrices Y'_μ nous donne les mêmes grandeurs physiques, et en particulier le même vecteur flux-densité.

2-A : Covariance relativiste

Faisons un changement de repère dans l'espace-temps à 5 dimensions,

(2.21) $x'^\mu = \Omega^\mu_\nu x^\nu$ conservant la métrique d'espace-temps à 5 dimensions :

(2.22) $\psi'(x') = \Lambda \psi(x)$ avec $\Omega^\mu_\nu Y_\nu = \Lambda^{-1} Y_\mu \Lambda$ vérifie l'équation :

(2.23) $(P'_\mu Y_\mu) \psi' = 0$ avec $P_\mu = P'_\nu \Omega^\nu_\mu$, donc l'équation est formellement invariante.

De plus on sait que $\bar{\psi}' = \bar{\psi} \Lambda^{-1}$.

On sait aussi que la "rotation" d'un angle ϕ dans le plan $x_\alpha x_\beta$ est donnée par :

(2.24) $\Lambda = \cos\frac{\phi}{2} + i\sigma_{\alpha\beta}\sin\frac{\phi}{2}$; $\sigma_{\alpha\beta} = iY_\alpha Y_\beta$

Ceci est valable non seulement pour $\alpha,\beta = 1,2,3,4$ mais aussi pour α,β allant de 1 à 5. Il y a non plus 6 mais 10 matrices $\sigma_{\alpha\beta}$. On sait aussi que l'on a :

(2.25) $\Lambda^{-1} = Y_4\Lambda^+Y_4$

Les 16 matrices formées à partir des Y_μ permettaient de former 16 densités qui étaient réparties en 5 groupes :

- un scalaire, $\bar\psi\psi$, invariant dans les transformations de Lorentz,
- un vecteur, $\bar\psi Y_\mu\psi$, vecteur flux-densité,
- un tenseur antisymétrique $\bar\psi\sigma_{\mu\nu}\psi$, dont les 6 composantes sont les densités de moment magnétique et de moment électrique,
- un pseudo-vecteur $\bar\psi\sigma_{5\mu}\psi$, lié à la densité de moment cinétique,
- un pseudo-scalaire, $\bar\Omega = \bar\psi Y_5\psi$

Avant la relativité restreinte, l'électromagnétisme utilisait un vecteur, le champ électrique, et un pseudo-vecteur, le champ magnétique. Ces deux grandeurs ont fusionné, en électromagnétisme relativiste, et forment les 6 composantes d'un tenseur antisymétrique. De la même manière, lorsqu'on passe de 4 à 5 dimensions, les 16 densités de la théorie de Dirac se regroupent en :

- un scalaire, $\bar\psi\psi = \Omega$, invariant dans toutes les transformations du groupe complet,
- un vecteur, $j_\mu = \bar\psi Y_\mu\psi$, dont la cinquième composante est le pseudo-scalaire précédent,
- un tenseur antisymétrique, $f_{\mu\nu} = \bar\psi\sigma_{\mu\nu}\psi$, dont les 10 composantes sont les 6 du tenseur et les 4 du pseudo-vecteur de la théorie de Dirac. Les densités de moment électrique, magnétique, cinétique, fusionnent en une seule grandeur.

Bien entendu, dans tout changement de système de référence lié à un mouvement réel dans l'espace physique à 3 dimensions, la quatrième coordonnée d'espace est invariante, donc $\bar\psi\sigma_{5\mu}\psi$ se comporte comme un vecteur, l'équation de Dirac est rigoureusement l'équation classique, et l'on retrouve tous les résultats de cette théorie, en particulier, comme nous le verrons plus loin, les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène.

Posons : $f_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma\rho\sigma}\,f^{\rho\sigma}$, ϵ tenseur antisymétrique tel que $\epsilon_{12345} = +1$.

M. Petiau a établi (10) que les 11 relations de Pauli qui découlent de l'identité reliant deux systèmes de matrices γ se rassemblent en 6 relations, dans l'espace à 5 dimensions :

(a) $j_\alpha\, j^\alpha = \Omega^2$

(b) $f_{\alpha\gamma}\, f^{\beta\gamma} = \Omega^2\, g^\beta_\alpha - j_\alpha\, j^\beta$

(c) $f^{\alpha\beta}\, j_\beta = 0$

(d) $f_{\alpha\beta\gamma}\, f^{\gamma\delta} = \Omega(g^\delta_\alpha\, j_\beta - g^\delta_\beta\, j_\alpha)$

(e) $f_{\alpha\beta\gamma}\, j^\gamma = \Omega\, f_{\alpha\beta}$

(f) $f_{\alpha\beta}\, j_\gamma + f_{\beta\gamma}\, j_\alpha + f_{\gamma\alpha}\, j_\beta = \Omega\, f_{\alpha\beta\gamma}$

M. Petiau a également établi que ces 6 relations peuvent se déduire des deux seules relations indépendantes (d) et (e).

Nous pouvons remarquer la relation (a) qui permet d'interpréter Ω^2 comme étant le carré de j.

Nous pouvons espérer que la disparition des équations du pseudoinvariant $\bar\psi\gamma_5\psi$ permettra une interprétation hydrodynamique plus aisée de l'équation de Dirac.

2-B : Equation du second ordre

Si $Y_\mu P_\mu \psi = 0$ alors

(2.26) $(Y_\mu P_\mu)(Y_\nu P_\nu)\psi = 0$

Or on a : $Y_1P_1Y_2P_2 + Y_2P_2Y_1P_1 = ie\hbar(\partial_2 A_1 - \partial_1 A_2)Y_1Y_2$

(2.27) $(Y_1P_1Y_2P_2 + Y_2P_2Y_1P_1)\psi = e\hbar\, F_{12}\, \sigma_{12}\, \psi$

$= e\hbar\, B_3\, \sigma'_3\, \psi$

avec $\vec{\sigma} = (\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)$; $\sigma'_3 = \sigma_{12}$; $\sigma'_1 = \sigma_{23}$; $\sigma'_2 = \sigma_{31}$

(2.28) $(Y_1P_1Y_4P_4 + Y_4P_4Y_1P_1)\psi = -\frac{e\hbar}{c} E_1 Y_1 Y_4 \psi = -\frac{e\hbar}{c} E_1 \rho_1 \psi$

avec $\vec{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \rho_3)$; $\rho_1 = Y_1Y_4$; $\rho_2 = Y_2Y_4$; $\rho_3 = Y_3Y_4$

(2.29) $(Y_1P_1Y_5P_5 + Y_5P_5Y_1P_1)\psi = e\hbar(\partial_5 A_1 - \partial_1 A_5) iY_1Y_5\psi$

$= e\hbar(iaA_1 - 0)iY_1Y_5\psi$

$= -ea\hbar\, A_1 Y_1 Y_5 \psi$

$= -em'c\, A_1 \tau_1 \psi$

(m' désigne la masse du photon)

avec $\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$; $\tau_1 = Y_1Y_5$; $\tau_2 = Y_2Y_5$; $\tau_3 = Y_3Y_5$

(2.30) $(Y_4P_4Y_5P_5 + Y_5P_5Y_4P_4) = ie\hbar(\partial_5 A_4 - \partial_4 A_5)Y_4Y_5$

$= ie\hbar(iaA_4 - 0)Y_4Y_5$

$= -e\hbar a\, iV\, Y_4Y_5$

$= -em'c\, V\tau$

où $\tau = iY_4Y_5$

On obtient l'équation du second ordre :

(2.31) $[(\sum_{\mu=1}^{5} P_\mu P_\mu) + e\hbar\, \vec{B}.\vec{\sigma} - e\frac{\hbar}{c}\, \vec{E}.\vec{\rho} - em'c^2(\vec{A}.\vec{\tau} + \frac{V}{c}\tau)]\psi = 0$

En plus du terme de masse P_5^2 et des termes de couplage de la théorie de Dirac, $\vec{B}.\vec{\sigma}$ et $\vec{E}.\vec{\rho}$ on obtient ici deux termes supplémentaires, mais négligeables à cause de la petitesse de la masse du photon :

$em'c^2(\vec{A}.\vec{\tau} + \frac{V}{c}\tau)$.

Les théories à 5 dimensions ou plus qui sont étudiées activement aujourd'hui expliquent habituellement l'inobservabilité des dimensions supplémentaires de la façon suivante : la petitesse de variation des coordonnées dans les dimensions supplémentaires entraîne l'existence de particules super-massives, inobservables dans les accélérateurs de particules. Au contraire ici, le domaine de variation de x_5 peut être très grand. L'inobservabilité est due à la très petite masse du photon. Rappelons l'hypothèse que nous avons faite en (4) : dans un modèle cosmologique relativiste à courbure positive, l'espace physique à un instant donné est un hypersphère à 3 dimensions dans un espace euclidien à 4 dimensions. On peut alors interpréter cette quatrième dimension d'espace comme étant le paramètre x_5 utilisé ici.

2.C : Tensorialité des grandeurs de la théorie de Dirac

Soit $j_\mu = \bar{\psi} Y_\mu \psi$ et $f_{\mu\nu} = \bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi = i\bar{\psi} Y_\mu Y_\nu \psi$

Par un changement de repère tel que $x'^\mu = \Omega^\mu_\nu x^\nu$, on a :

(2.32) $\psi'(x') = \Lambda\psi(x)$ et $\bar{\psi}' = \bar{\psi}\Lambda^{-1}$ avec $\Omega^\mu_\nu Y_\mu = \Lambda^{-1} Y_\nu \Lambda$

(2.33) $j'_\nu = \bar{\psi}' Y_\nu \psi = \bar{\psi}\Lambda^{-1} Y_\nu \Lambda\psi = \bar{\psi}\Omega^\mu_\nu Y_\mu \psi = \Omega^\mu_\nu \bar{\psi} Y_\mu \psi = \Omega^\mu_\nu j_\mu$

(2.34) $f'_{\rho\sigma} = i\bar{\psi}' Y_\rho Y_\sigma \psi' = i\bar{\psi}\Lambda^{-1} Y_\rho \Lambda\Lambda^{-1} Y_\sigma \Lambda\psi = i\bar{\psi}\Omega^\mu_\rho Y_\mu \Omega^\nu_\sigma Y_\nu \psi$

$= \Omega^\mu_\rho \Omega^\nu_\sigma f_{\mu\nu}$

Donc les grandeurs de la théorie de Dirac se comportent comme les composantes de tenseurs lors d'un changement de repère.

3 - ETATS STATIONNAIRES

Multipliant l'équation $Y_\mu P_\mu \psi$ par $-iY_4$ à gauche, nous obtenons:

(3.1) $(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 + \pi_0 + \alpha_5 P_5)\psi = 0$ avec $\pi_0 = \frac{1}{i} P_4$

et $\alpha_5 = -iY_4 Y_5$

Le choix précédent des Y_i donne $\alpha_5 = \begin{pmatrix} 0 & -i1 \\ i1 & 0 \end{pmatrix}$

Posons $\vec{\pi} = (P_1, P_2, P_3)$; $\vec{s} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$; $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$; nous obtenons :

$$(3.2) \quad \begin{cases} \pi_0 \psi_1 + \vec{s}.\vec{\pi}\ \psi_2 - i m_0 c\ \psi_2 = 0 \\ \pi_0 \psi_2 + \vec{s}.\vec{\pi}\ \psi_1 + i m_0 c\ \psi_1 = 0 \end{cases}$$

Posons :

$$(3.3) \quad \begin{cases} A = \pi_0 \psi_1 + \vec{s}.\vec{\pi}\ \psi_2 - i m_0 c \psi_2 & \phi_1 = (-1+i)\psi_1 - (1+i)\psi_2 \\ B = \pi_0 \psi_2 + \vec{s}.\vec{\pi}\ \psi_1 + i m_0 c \psi_1 & \phi_2 = (1+i)\psi_1 + (1-i)\psi_2 \end{cases}$$

Soit : $C = -(A+B) + i(A-B)$

$$= (-1+i)A - (1+i)B$$

$$= (-1+i)[\pi_0 \psi_1 + \vec{s}.\vec{\pi}\ \psi_2 - i m_0 c \psi_2]$$

$$-(1+i)[\pi_0 \psi_2 + \vec{s}.\vec{\pi}\ \psi_1 + i m_0 c \psi_1]$$

$$= \pi_0[(-1+i)\psi_1 - (1+i)\psi_2] - \vec{s}.\vec{\pi}[(1-i)\psi_2 + (1+i)\psi_1]$$

$$+ m_0 c[(1+i)\psi_2 + (1-i)\psi_1]$$

Ainsi : $C = \pi_0 \phi_1 - \vec{s}.\vec{\pi}\ \phi_2 - m_0 c\ \phi_1$

Posons : $D = A + B + i(A - B)$

Alors : $D = \pi_0 \phi_2 - \vec{s}.\vec{\pi}\ \phi_1 + m_0 c\ \phi_2$

Le système (3.2) : $A = 0$; $B = 0$ est équivalent au système

$C = 0$; $D = 0$. Donc :

$$(3.4) \quad \begin{cases} \pi_0 \phi_1 - \vec{s}.\vec{\pi}\ \phi_2 = m_0 c\ \phi_1 \\ \pi_0 \phi_2 - \vec{s}.\vec{\pi}\ \phi_1 = -m_0 c\ \phi_2 \end{cases}$$

C'est-à-dire :

$$(\pi_0 - \vec{\alpha}.\vec{\pi} - m_0 c\ \alpha_4)\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = 0$$

Nous introduirons maintenant les coordonnées polaires :

$$x = r'\sin\theta \cos\phi \ ; \ r' = r\cos\chi \ ; \ \vec{r}' = (x,y,z)$$

$$\partial_x = \frac{\partial}{\partial x} \ ; \ \partial_y = \frac{\partial}{\partial y} \ ; \ \partial_z = \frac{\partial}{\partial z} \ ; \ \partial_{r'} = \frac{\partial}{\partial r'}$$

(3.5) $y = r'\sin\theta \sin\phi$; $u = r \sin\chi$; $n = \vec{r}'/r'$

$$z = r'\cos\theta \ ; \ r^2 = x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = r'^2 + u^2$$

Si l'on cherche une solution de la forme : $\phi_1 = F(r',u)f(\theta,\phi)$ $\phi_2 = G(r',u)g(\theta,\phi)$ la variable u disparait en nous donnant le terme de masse. La seule différence avec la théorie de Dirac concerne les opérateurs différentiels, qui sont légèrement modifiés.

La discussion du système (3.4), en dimension 5, est donc très proche de celle de Dirac. Si l'on cherche une solution du type : $\phi_1 = F(r,\chi)f(\theta,\phi)$ $\phi_2 = G(r,\chi)g(\theta,\phi)$ il n'y a pas séparation des variables r,χ, et ceci pour deux raisons: r et χ sont liés dans le terme de masse correspondant à ∂_u, avec $u = r \sin\chi$, et sont également liés dans le potentiel électrostatique en $1/r'$, $r' = r \cos\chi$.

On voit aisément que :

(3.6) $x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z = r'\partial_{r'}$

Comme en dimension 4, le hamiltonien de Dirac commute avec $\vec{N}$ tel que :

$$(3.7)\quad \vec{N} = \vec{r} \times \vec{p} + \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}' \qquad \sigma'_k = \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} \quad ; \; k = 1,2,3$$

On est donc amené à chercher les états propres de M_3 et de M^2, où :

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{p} + \frac{\hbar}{2}\vec{s} = \hbar\,\vec{J}$$

$\vec{J}$ obéit aux relations de commutation du moment cinétique. On introduit alors (8) les deux suites de spineurs sphériques :

$$(3.8)\quad \Omega^m_\ell(+) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\ell+m}{2\ell+1}}\; Y^{m-1}_\ell(\theta,\phi) \\ \sqrt{\frac{\ell-m+1}{2\ell+1}}\; Y^m_\ell(\theta,\phi) \end{pmatrix} \quad \text{où } j = \ell + \frac{1}{2} \; ; \; m_s = m + \frac{1}{2}$$

$$(3.9)\quad \Omega^m_\ell(-) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\ell-m+1}{2\ell+1}}\; Y^{m-1}_\ell(\theta,\phi) \\ -\sqrt{\frac{\ell+m}{2\ell+1}}\; Y^m_\ell(\theta,\phi) \end{pmatrix} \quad \text{où } j = \ell - \frac{1}{2} \; ; \; m_s = m - \frac{1}{2}$$

Nous avons alors :

$$(3.10)\quad \begin{cases} \vec{J}^2\Omega^m_\ell(+) = j(j+1)\Omega^m_\ell(+) \\ J^3\Omega^m_\ell(+) = (m+\frac{1}{2})\Omega^m_\ell(+) = m_s\Omega^m_\ell(+) \\ \vec{J}^2\Omega^m_\ell(-) = j(j+1)\Omega^m_\ell(+) \\ J_3\Omega^m_\ell(-) = (m-\frac{1}{2})\Omega^m_\ell(-) = m_s\Omega^m_\ell(-) \end{cases}$$

Nous avons également :

$$(3.11)\quad \begin{cases} \vec{s}.\vec{n}\;\Omega^m_\ell(+) = \Omega^m_{\ell+1}(-) \\ \vec{s}.\vec{n}\;\Omega^m_\ell(-) = \Omega^m_{\ell-1}(+) \end{cases}$$

Si nous posons : $\vec{\Lambda} = -i\,\vec{r}' \times \vec{\nabla}$, nous obtenons :

$$(3.12)\quad \vec{s}.\vec{\Lambda}\;\Omega^m_\ell(\pm) = -(\kappa+1)\Omega^m_\ell(\pm) \text{ avec } \kappa = \mp(j+\frac{1}{2}) \text{ et } j = \ell \pm \frac{1}{2}$$

De plus, nous avons :

$$(3.13)\quad (\vec{s}.\vec{n})(\vec{s}.\vec{p}) = -i\hbar(\partial_{r'} - \frac{1}{r'}\,\vec{s}.\vec{\Lambda})$$

Pour résoudre le système (3.4), on cherche l'intégrale générale comme combinaison linéaire des deux solutions de base :

$$(3.14)\quad \begin{cases} \phi_1 = F(r')\Omega^m_\ell(+) \\ \chi_1 = iG(r')\Omega^m_{\ell+1}(-) \end{cases} \quad \text{et :} \quad \begin{cases} \phi_2 = F(r')\Omega^m_\ell(-) \\ \chi_2 = iG(r')\Omega^m_{\ell-1}(+) \end{cases}$$

où F et G sont deux fonctions de r' à déterminer. Le système (3.4) devient donc :

$$(3.15)\quad \begin{cases} (E + \frac{e^2}{r'} - m_0c^2)\phi = c\;\vec{s}.\vec{p}\;\chi \\ (E + \frac{e^2}{r'} + m_0c^2)\chi = c\;\vec{s}.\vec{p}\;\phi \end{cases}$$

En multipliant par $\vec{s}.\vec{n}$ à gauche et en posant :

$$(3.16)\quad \phi = F(r')\Omega^m_\ell(\pm) \qquad \chi = iG(r')\Omega^m_{\ell\pm1}(\mp)$$

on obtient :

$$(3.17)\quad \begin{cases} (E + \frac{e^2}{r'} - m_0c^2)F(r')\vec{s}.\vec{n}\;\Omega^m_\ell(\pm) = ic(\vec{s}.\vec{n})(\vec{s}.\vec{p})G(r')\Omega^m_{\ell\pm1}(\mp) \\ (E + \frac{e^2}{r'} + m_0c^2)iG(r')\vec{s}.\vec{n}\;\Omega^m_{\ell\pm1}(\mp) = c(\vec{s}.\vec{n})(\vec{s}.\vec{p})F(r')\Omega^m_\ell(\pm) \end{cases}$$

Avec les relations (3.11) et (3.13), on obtient donc :

$$(3.18)\quad \begin{cases} (E + \frac{e^2}{r'} - m_0c^2)F(r')\Omega^m_{\ell\pm1}(\mp) = \hbar c(\partial_{r'} - \frac{1}{r'}\,\vec{s}.\vec{\Lambda})G(r')\,\Omega^m_{\ell\pm1}(\mp) \\ (E + \frac{e^2}{r'} + m_0c^2)G(r')\Omega^m_\ell(\pm) = -\hbar c(\partial_{r'} - \frac{1}{r'}\,\vec{s}.\vec{\Lambda})F(r')\Omega^m_\ell(\pm) \end{cases}$$

En posant : $K = \frac{E}{\hbar c}$

$$(3.19)\quad k_0 = \frac{m_0c}{\hbar} \quad ; \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$$

les parties angulaires en facteur disparaissent, et l'on obtient :

$$(3.20)\quad \begin{cases} \dfrac{dG}{dr'} + \dfrac{1-\kappa}{r'}G - (K - k_0 + \dfrac{\alpha}{r'})F = 0 \\[2ex] \dfrac{dF}{dr'} + \dfrac{1+\kappa}{r'}F + (K + k_0 + \dfrac{\alpha}{r'})G = 0 \end{cases}$$

On sait comment (7) (8) ces équations nous donnent les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène :

$$(3.21)\quad E_{nj} = m_0c^2 \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{n-(j+\frac{1}{2}) + \sqrt{(j+\frac{1}{2})^2 - \alpha^2}}}$$

CONCLUSION

Il n'y a donc aucune différence avec les résultats de la théorie de Dirac, aujourd'hui classique. Mais cette concordance n'est-elle pas remarquable ? L'utilisation d'une équation d'onde dans un univers à 5 dimensions d'espace-temps ne fournit immédiatement aucune différence par rapport à la théorie classique. Si la "bonne" équation était celle en dimension 5, le fait que les spineurs sont les mêmes en dimension 4 et 5 nous permettrait d'obtenir quand même les bons résultats, donc nous induirait à nous contenter d'une "mauvaise" théorie.

Tout d'abord les équations en dimensions 5 ont l'avantage de la simplicité : peut-on trouver plus simple que (2.13) ? Les grandeurs sont moins nombreuses, les équations se regroupent.

Une des grandeurs fondamentales en physique relativiste est le tenseur impulsion-énergie. La conservation de l'énergie est une loi bien assise. Or si l'on intègre une densité d'énergie, de dimension $ML^{-1}T^{-2}$, non plus dans l'espace tridimensionnel, mais dans l'espace quadridimensionnel, on obtient une grandeur de dimension ML^3T^{-2}, produit d'une action par une vitesse. Jean Ricard a publié dans cette revue (9) une théorie

des plancktons, où l'onde est une assemblée de "corpuscules" d'action quantifiée. Si les "corpuscules" d'un éventuel milieu subquantique sont dotés de la vitesse de la lumière, l'intégration de leur densité d'énergie aboutit naturellement à la quantification de l'action. Ce pourrait être un avantage important pour les théories à 5 dimensions.

Notre étude est partie (4) de l'étude du spin. La microphysique doit nécessairement utiliser les représentations du groupe SU(2), et non pas les représentations de SO(3), pour rendre compte des faits expérimentaux. Or cette question, profondément enfouie sous un habillage mathématique difficile, ne se simplifie pas lorsque l'on utilise l'équation de Dirac : les représentations utilisées sont en effet celle du groupe SL(2,C), et non pas celle du groupe de Lorentz. Simplement, il est encore plus malaisé de s'apercevoir que l'on change de groupe subrepticement.

Or l'utilisation d'une cinquième dimension d'espace nous offre une solution à cette difficulté. Rappelons tout d'abord que la cosmologie relativiste part d'hypothèses simples : le ciel n'offre pas de direction privilégiée, il est invariant sous le groupe SO(3). Il n'y a pas de centre de l'univers, tous les points à un instant donné sont équivalents, donc l'espace physique est invariant sous un groupe G plus vaste et contenant SO(3) comme sous-groupe.(11)(12)

Sous ces hypothèses très générales, les physiciens relativistes nous disent que trois modèles sont possibles pour la métrique d'espace-temps : le modèle hyperbolique, le modèle euclidient, le modèle sphérique, suivant que la courbure totale est négative, nulle ou positive. Dans le modèle sphérique, l'univers, à un instant donné, est une hypersphère à 3 dimensions de l'espace euclidien à 4 dimensions. Le groupe des déplacements G de l'hypersphère est le groupe SO(4) des rotations de l'espace euclidien à 4 dimensions. Pour le modèle hyperbolique, G est le groupe de Lorentz, tandis que pour le modèle euclidien, G est le groupe usuel des déplacements.

Or le groupe SO(4) contient non seulement SO(3), mais aussi SU(2) comme sous-groupe invariant. On peut donc avoir, pour espace physique, l'espace quotient SO(4)/SU(2), le

groupe des transformations laissant un point invariant étant alors réellement SU(2), ce qui explique l'existence de spins demi-entiers.

Ainsi, la raison de l'existence de représentations de SU(2) en mécanique quantique serait la structure à grande échelle de l'Univers, liée par la relativité générale à la densité moyenne de masse, à la gravitation. Inversement, l'existence de spin demi-entiers nous prouve que le groupe de transformations laissant un point invariant n'est pas SO(3) mais SU(2), et nous permet de choisir entre les trois modèles de la cosmologie. Il n'est pas nécessaire alors de compter les galaxies lointaines pour savoir si l'Univers est hyperbolique, euclidien ou sphérique ; la microphysique restreint considérablement le nombre des modèles possibles en cosmologie relativiste.

Il est sans doute temps de comprendre que la quatrième dimension d'espace utilisée en cosmologie n'est pas un simple artifice mathématique, mais qu'elle a autant de réalité physique que nos trois dimensions usuelles.

BIBLIOGRAPHIE

(1) J. Kaluza, Zum Unitätsproblem der Physik (Sitz. Preuss. Akad. Wiss. 1921 p. 966)

(2) E. Schmutzer, A new 5-dimensional projective unified field theory for gravitation, electromagnetism and scalarism, (Unified field theories of more than 4 dimensions - World Scientific, Singapore)

(3) A.F. Ranada et M. Soler, Elementary spinorial excitations in a model universe (J. Math. Phys., Vol. 13, N° 5, mai 1972)

(4) C. Daviau, Quelle est la dimension de l'espace-temps ? (Annales de la Fondation Louis de Broglie, vol. 8, n° 1, 1983)

(5) Louis de Broglie, Théorie générale des particules à spin (Paris, Gauthier-Villars 1954)

(7) J.J. Sakurai, Advanced Quantum Mechanics, Addison-Wesley, Reading, USA, 1980

(8) A.L. Akhiezer, V.B. Berestetsky, Quantum Electrodynamics, Interscience, N.Y., 1965

(9) Jean Ricard, Théorie des plancktons, Annales de la Fondation Louis de Broglie, Vol. 9, n° 3, 1984

(10) Gérard Petiau, Sur les relations entre densités de valeurs moyennes dans la théorie de l'électron relativiste de Dirac. (La Revue Scientifique 83, 37, 1945)

(11) Jean-Marie Souriau, Stratification de l'Univers in "Einstein 1879-1955" Colloque du Centenaire, Collège de France ; Edition du C.N.R.S.

(12) Jean-Marie Souriau, Les symétries de l'Univers, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, la Vie des Sciences, Tome 2, Série Générale n° 3, mai-juin 1985.