Annales de la Fondation Louis de Broglie,
Vol. 11, n° 2, 1986

Une explication relativiste de la catastrophe ultraviolette

par Jean PERDIJON

Le Rosat, 38330 Saint-Ismier

(manuscrit reçu le 2 Décembre 1985)

Résumé : On tente d'expliquer le spectre du rayonnement du corps noir en remplaçant l'hypothèse d'une répartition discontinue de l'énergie par la prise en compte des effets relativistes lorsque les oscillations sont très rapides.

I. Introduction

Un corps noir est une cavité aussi peu couplée avec l'extérieur que possible et dont les parois sont portées à une température (absolue) T. Les particules chargées, qui se trouvent sur les parois, sont accélérées sous le choc des molécules, en agitation thermique, du gaz contenu dans la cavité. Il en résulte l'émission d'un rayonnement[1], dont la répartition spectrale à l'équilibre a fait l'objet de nombreuses recherches il y a près d'un siècle[2].

On savait depuis Kirchhoff (1859) que ce rayonnement ne dépendait pas de la nature du corps noir mais uniquement de sa température. La relation entre cette température et l'énergie totale E rayonnée par unité de volume a été trouvée par Stefan (1879) puis démontrée par Boltzmann (1884) :

$$E = (4\sigma/c)T^4, \tag{1}$$

c désignant la vitesse de la lumière et σ une constante égale

à 5,67 10^{-8} W/(m²K⁴). Par analogie avec la distribution des vitesses entre les molécules d'un gaz, on a cherché quelle était la distribution des fréquences entre les diverses vibrations constituant le rayonnement. La fraction E_ν de l'énergie totale rayonnée dans chaque bande de fréquence fut étudiée expérimentalement. Les premières données précises ont été fournies par Lummer et Pringsheim (1899) mais on savait déjà qu'il s'agissait d'une répartition spectrale continue et Wien avait montré (1893) que l'énergie maximale rayonnée à une température donnée variait comme T^3 et que la fréquence correspondante était donnée par

(2) $$\nu_e = b\,T,$$

avec $b = 5{,}88\ 10^{10}$ Hz/K.

La densité d'énergie E_ν rayonnée par intervalle de fréquence $d\nu$ doit être telle que

(3) $$E = \int_0^\infty E_\nu\, d\nu.$$

Un premier calcul, proposé par Rayleigh en juin 1900 (et corrigé par Jeans en 1905), partait de la statistique de Boltzmann et attribuait à chaque mode de vibration l'énergie $W = kT$, k étant la constante de Boltzmann ; connaissant la densité de modes par unité de volume, on en déduisait

(4) $$E_\nu = (8\pi/c^3)\nu^2\, kT.$$

Si cette relation donne une excellente représentation des courbes expérimentales aux basses fréquences, , elle n'explique pas que ces courbes atteignent un maximum pour décroître ensuite très rapidement aux fréquences élevées ; c'est ce que Ehrenfest appela la "catastrophe de l'ultraviolet". Pour représenter correctement ces courbes, Planck fut amené six mois plus tard à proposer de prendre comme énergie moyenne d'un mode la quantité $\bar{W} = h\nu/[\exp(h\nu/kT) - 1]$, ce qui suppose que chaque oscillateur possède une énergie qui est multiple de $h\nu$, h désignant la constante de Planck. On en tire

(5) $$E_\nu = (8\pi h/c^3)\nu^3/[\exp(h\nu/kT) - 1].$$

On sait que cette hypothèse d'une répartition discontinue d'énergie par quantum $W_0 = h\nu$ est à la base de toute la physique quantique.

Mais il n'est pas facile d'abandonner ainsi la physique classique et de nombreuses tentatives ont été faites pour expliquer le spectre du corps noir sans introduire une nouvelle hypothèse. C'est ainsi que Boyer[3] et d'autres[4] ont montré, en s'appuyant sur des travaux d'Einstein, qu'il était possible de déduire ce spectre sans faire d'autre hypothèse non-classique que celle de l'existence d'un terme de point zéro, égal à $h\nu/2$ par mode, déjà introduit par Planck dans sa seconde théorie. Partant d'une idée de Boltzmann et d'une hypothèse de Nernst, Galgani[5] a distingué les oscillateurs stables, à l'origine de l'énergie de point zéro, des oscillateurs chaotiques, à l'origine de l'énergie thermodynamique ; en fixant comme seuil d'instabilité $W_0 = h\nu$, il a obtenu

(6) $$E_\nu = (8\pi\nu^2/c^3)(h\nu + kT)/\exp(h\nu/kT)$$

et montré que la précision des résultats expérimentaux ne permettait pas de choisir entre (5) et (6). Dans ces deux tentatives, il est cependant nécessaire d'introduire, de façon plus ou moins arbitraire, la constante h.

La présente étude part d'une remarque relative à la vitesse d'une vibration sinusoïdale. La vitesse maximale d'une telle vibration est égale au produit de l'amplitude A par la pulsation $\omega = 2\pi\nu$. L'amplitude des vibrations d'un électron dans un atome est de l'ordre des dimensions atomiques, soit environ 10^{-10} m, et la fréquence des vibrations ultraviolettes est de l'ordre de 10^{17} Hz. On en tire une vitesse maximale qui est voisine de 10^8 m/s, donc proche de celle de la lumière, et il semblait intéressant d'appliquer la théorie de la relativité restreinte à une telle vibration.

II. Etude d'oscillations relativistes

Tout d'abord on définit le mouvement étudié comme étant celui d'une particule ponctuelle de masse m, qui est écartée d'une distance x de sa position d'équilibre stable.

Il en résulte une force de rappel F, nulle au point d'équilibre, qui peut être considérée comme proportionnelle à x lorsque x est petit, soit $F = -Kx$. On néglige tout amortissement et le mouvement n'est pas entretenu. Puisque la force est égale à la dérivée de la quantité de mouvement par rapport au temps, et que la masse est donnée par $m = m_0/(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$ en fonction de la masse m_0 au repos, de la vitesse v de la particule et de celle c de la lumière, on en tire

$$(7) \qquad F = d[m_0\, v/(1-v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}]/dt = -Kx.$$

Après dérivation, l'équation différentielle du mouvement s'écrit

$$(8) \qquad \ddot{x} = -\omega^2 x(1 - \dot{x}^2/c^2)^{3/2},$$

en posant $\omega^2 = K/m_0$; cette équation se ramène bien à $\ddot{x}=-\omega^2 x$ pour les faibles vitesses.

L'intégration de (8) peut se faire par exemple en posant $\dot{x} = c \text{ th } \theta$. Si on considère que la vitesse est nulle pour $x = A$, on obtient

$$A^2 - x^2 = (2\, c^2/\omega^2)(\text{ch } \theta - 1),$$

équation à variables séparables d'où on tire :

$$(9) \qquad dt = [\omega^2(A^2-x^2) + 2c^2]\,dx/\{\omega c(A^2-x^2)^{\frac{1}{2}}[\omega^2(A^2-x^2) + 4c^2]^{\frac{1}{2}}\}.$$

Le mouvement reste périodique, d'amplitude A. Par intégration de (9) entre $x = 0$ et $x = A$, on obtient le quart de la période τ. En posant $x = A \cos\phi$ et $y = A\omega/c$, on a

$$\tau = (4/\omega) \int_0^{\pi/2} [(y^2\sin^2\phi + 2)/(y^2\sin^2\phi + 4)^{\frac{1}{2}}]d\phi.$$

La pulsation Ω, mesurée par l'observateur au repos, est donc liée à ω par

$$(10) \qquad \Omega = \pi\omega/(2I),$$

où I est une intégrale elliptique qui s'exprime en fonction des intégrales E et F de seconde et de première espèces :

$$I = (y^2 + 4)^{\frac{1}{2}}E[y/(y^2 + 4)^{\frac{1}{2}},\pi/2]-[2/(y^2 + 4)^{\frac{1}{2}}]F[y/(y^2+4)^{\frac{1}{2}},\pi/2].$$

La relation (10) montre que le produit $A\Omega$ ne dépend que du produit $A\omega$. Lorsque y est très inférieur à 1, on a $I \simeq \pi/2$ et Ω se confond avec ω : le mouvement est sinusoïdal. Par contre, lorsque y est très supérieur à 1, I tend vers y et Ω tend vers une limite $\Omega_m = \pi c/(2A)$. Cette limite correspond à une oscillation parcourue à la vitesse c : le mouvement est alors en dents de scie, avec un pic d'accélération à chaque demi-période. On peut remplacer les pulsations ω et Ω par les fréquences correspondantes $\nu = \omega/(2\pi)$ et $N = \Omega/(2\pi)$; la figure 1 donne la variation du produit AN en fonction du produit $A\nu$. La fréquence limite est alors donnée par

$$(11) \qquad N_m = c/(4A).$$

III. Application au corps noir

Dans la mesure où on néglige l'amortissement dû aux pertes par rayonnement, la fréquence du rayonnement émis par l'électron lors de sa vibration est donc égale à N. Pour obtenir l'énergie totale rayonnée par unité de volume, il suffit de remplacer ν par N dans (3) et, si on accepte l'expression (4) proposée par Rayleigh, on obtient

$$(12) \qquad E = (8\pi kT/c^3) \int_0^{N_m} N^2\, dN = (8\pi kT/c^3)(N_m^3/3).$$

Compte tenu de la relation (1), on en tire

$$(13) \qquad N_m(\text{Hz}) = (3\sigma c^2/2\pi k)^{1/3}\, T = 5{,}6\ 10^{10}\ T(\text{K}),$$

d'où, par comparaison avec (11),

$$(14) \qquad A(\text{m}) = (2\pi kc/3\sigma)^{1/3}/(4T) = 1{,}3\ 10^{-3}/T(\text{K}).$$

Par contre, lorsqu'on établit la répartition spectrale du rayonnement, c'est ν qu'on fait varier de 0 à l'infini

et il faut donc exprimer N et dN dans (12) en fonction de ν et de $d\nu$. La relation (10) permet d'écrire, en posant toujours $y = A\omega/c$,

$$E = (\pi kT/8A^3) \int_0^\infty (y^2 J/I^4) dy, \tag{15}$$

avec

$$J = \int_0^{\pi/2} [8/(y^2 \sin^2\phi + 4)^{3/2}] d\phi.$$

On en tire, par comparaison avec (3),

$$E_\nu = (\pi^2 kT/4c^3)\omega^2 J/I^4. \tag{16}$$

A basse fréquence, on a $I = J = \pi/2$ et on retrouve bien la relation (4). A haute fréquence, on obtient une décroissance rapide en $1/\nu^5$, qui est néanmoins différente de l'exponentielle donnée par (5). Les courbes en trait plein et en pointillé sur la figure 2 correspondent respectivement aux équations (5) et (16). Bien que représentant toutes deux correctement les résultats expérimentaux, elles sont néanmoins légèrement décalées en fréquence. Par dérivation de (16), on peut déterminer la fréquence pour laquelle l'énergie est maximale ; du fait que la quantité $(y^2 J/I^4)$ ne dépend que de $A\omega$, sa dérivée s'annule pour une certaine valeur $A\omega_e$ et, d'après (14), le rapport ω_e/T est donc égal à une constante. Le calcul numérique permet d'obtenir

$$\nu_e(\mathrm{Hz}) = 4{,}6\ 10^{10}\ T(\mathrm{K}), \tag{17}$$

qu'il faut rapprocher de (2). En reportant cette valeur dans (16), on voit que l'énergie pour cette fréquence est bien proportionnelle à T^3.

En résumé, la relation (10) permet de retrouver les lois de Stefan et de Wien et de représenter assez bien les données expérimentales. On en tire cependant une constante de Wien un peu faible et la décroissance à haute fréquence n'est pas exponentielle.

IV. Conclusion

La prise en compte des effets relativistes permet d'apporter au problème de la "catastrophe ultraviolette" une explication qui ne fait pas intervenir l'hypothèse d'une discontinuité de l'énergie ; il faudrait cependant vérifier que les approximations effectuées sont suffisantes pour expliquer les différences entre les spectres ainsi obtenus et la loi de Planck, dans la mesure toutefois où celle-ci est censée représenter parfaitement les données expérimentales[5].

REFERENCES

[1] Voir par exemple, M. Born, Atomic Physics (Blackie and Son, London, 1960), pp. 238-247.

[2] T.S. Kuhn, Black-body theory and the quantum discontinuity 1894-1912 (Clarendon Press, Oxford, 1978).

[3] T.H. Boyer, Phys. Rev. 182, 1374 (1969).

[4] J.L. Jiménez, L. de la Peña et T.A. Brody, Am. J. Phys. 48, 840 (1980).

[5] L. Galgani, Ann. Fond. Louis de Broglie 8, 19 (1983).

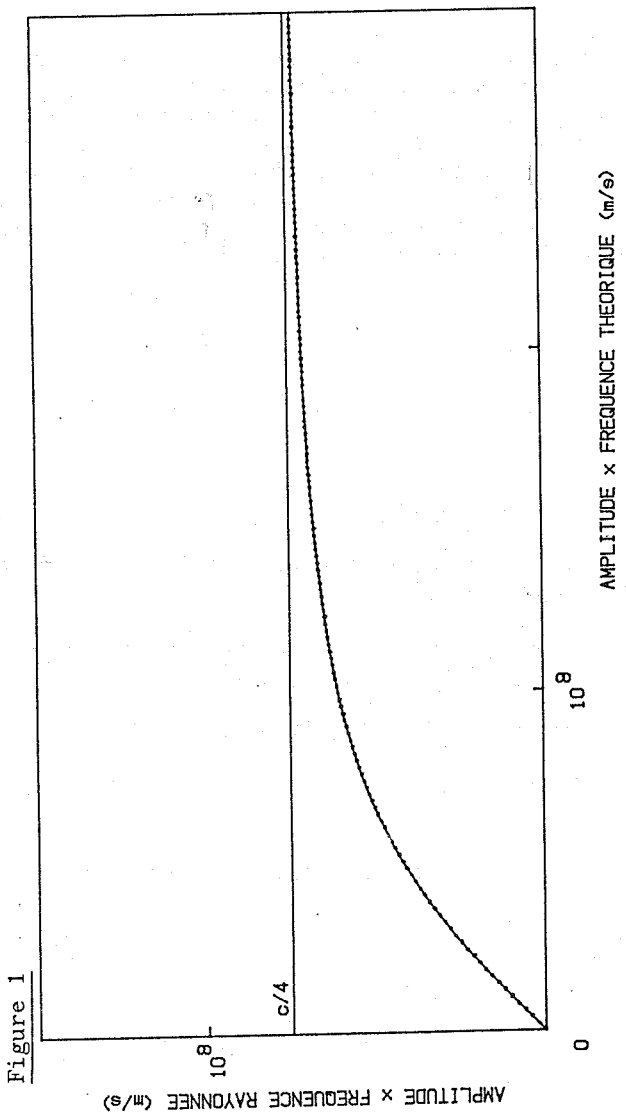

Figure 1

Produit amplitude × fréquence observée du rayonnement émis (AN), en fonction du produit amplitude × fréquence théorique de l'oscillateur (Aν).

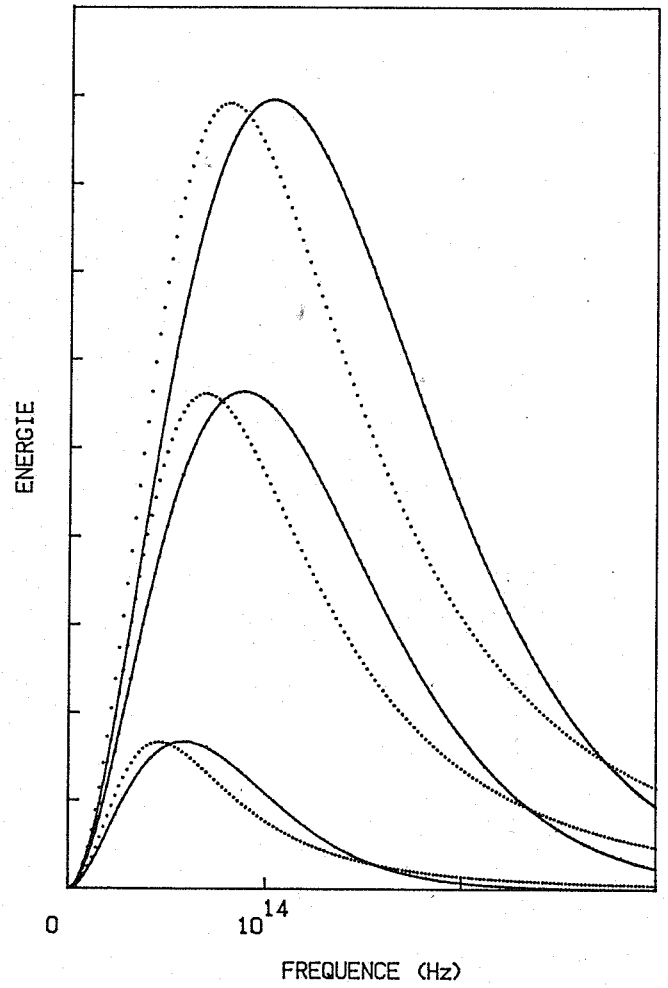

Figure 2 : Energie rayonnée par intervalle de fréquence à 1000K, 1500K et 1750K : (——) calcul avec (5), (....) calcul avec (16).