Une démonstration du théorème de Jacobi

par Albert EINSTEIN

(Eine Ableitung des Theorems von Jacobi, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss, 1917, pt. 2, 606-608)

Soient les équations canoniques de la dynamique :

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{1}$$

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{2}$$

où H désigne, dans le cas général, une fonction des coordonnées q_i, des impulsions p_i et du temps t. On sait que ces équations peuvent s'intégrer grâce à l'existence, d'après Hamilton et Jacobi, d'une fonction J des coordonnées q_i et du temps t, définie comme solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial J}{\partial t} + \vec{H} = 0, \tag{3}$$

où $\vec{H}$ s'obtient à partir de H, en y substituant aux impulsions p_i les dérivéees $\partial J/\partial q_i$. Si J est une intégrale complète de cette équation, avec des constantes d'intégration α_i, le système des équations canoniques (1) et (2) s'intègre à l'aide des équations :

$$\frac{\partial J}{\partial q_i} = p_i, \tag{4}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_i} = \beta_i. \tag{5}$$

Dans tous les bons manuels de dynamique, on établit, par vérification directe, que les équations (3), (4) et (5) suffisent bien à obtenir les équations canoniques (1) et (2). Mais en revanche, je ne connais aucun procédé naturel, exempt de suppositions ad hoc, qui permettrait de passer des équations canoniques au système (3), (4), (5) des équations de Hamilton-Jacobi. Un tel procédé pourrait être le suivant.

Si, à un certain instant t_0, nous choisissons les coordonnées q_i^0 et les impulsions p_i^0 correspondantes du système, le mouvement de celui-ci sera déterminé par les équations (1) et (2). Je représente ce mouvement comme étant celui d'un point dans l'espace à n dimensions des coordonnées q_i. Nous considérerons, par exemple, qu'à l'instant t_0, en tout point (q_i^0) de l'espace de coordonnées, on se donne des impulsions p_i, satisfaisant aux équations (1) et (2) pour les systèmes correspondants, si bien que les p_i^0 seront des fonctions continues des coordonnées q_i ; alors ces conditions initiales, d'après les équations (1), (2), détermineront le mouvement de tous ces points. Nous appellerons "champ de courant" l'ensemble de tous ces mouvements.

Maintenant, au lieu de décrire ce champ de façon telle que les coordonnées et les impulsions de chaque point du système soient considérées comme des fonctions du temps, d'après les équations (1) et (2), je puis aussi regarder les grandeurs p_i, définissant l'état de mouvement, comme données en chaque point (q_i) et fonctions du temps. Ces deux modes de représentation correspondent exactement aux deux modes de représentation d'un liquide, en hydrodynamique, mis à la base des équations respectivement lagrangiennes et eulériennes du mouvement d'un liquide.

Ayant en vue le second procédé de représentation, je dois remplacer le membre de gauche de l'équation (1) par l'expression

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} + \sum_\nu \frac{\partial p_i}{\partial q_\nu}\frac{dq_\nu}{dt},$$

qui, d'après les équations (2) peuvent s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} + \sum_\nu \frac{\partial H}{\partial p_\nu}\frac{\partial p_i}{\partial q_\nu}.$$

Par conséquent, correspondant à l'équation (1), nous obtenons le système d'équations :

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_\nu \frac{\partial H}{\partial p_\nu}\frac{\partial p_i}{\partial q_\nu} = 0 \tag{6}$$

Les grandeurs $\partial H/\partial q_i$ et $\partial H/\partial p_i$ sont certaines fonctions des coordonnées q_i, des impulsions p_i et du temps t. Ainsi, le système d'équations (6) constitue un système d'équations aux dérivées partielles pour les composantes p_i des vecteurs impulsions décrivant le champ de courant.

La question se pose maintenant de savoir s'il existe un champ de courant pour lequel le vecteur impulsion dérive d'un potentiel, si bien qu'on aura les conditions suivantes :

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_k} - \frac{\partial p_k}{\partial q_i} = 0 \tag{7}$$

$$p_i = \frac{\partial J}{\partial q_i}. \tag{7a}$$

Si la condition (7) est satisfaite l'équation (6) prend la forme :

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} + \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_\nu \frac{\partial H}{\partial p_\nu}\frac{\partial p_\nu}{\partial q_i}\right) = 0.$$

Le second terme du membre de gauche de cette équation représente la dérivée totale de H par rapport à la coordonnée q_i. En désignant par $\overline{H}$ la fonction des coordonnées q_i et du temps t qu'on obtient à partir de H en exprimant les impulsions p_i en fonction de q_i et t, on aura :

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{\partial \overline{H}}{\partial q_i} = 0,$$

ou, en introduisant, à l'aide de l'égalité (7a), le potentiel J,

$$\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial J}{\partial t} + \overline{H}\right) = 0.$$

On pourra satisfaire à ces équations en imposant à J de satisfaire à l'équation :

$$\frac{\partial J}{\partial t} + \overline{H} = 0,$$

qui n'est autre que l'équation hamiltonienne (3). Jointe à la relation (7a), elle détermine la solution de l'équation (6) du champ de courant.

Nous parviendrons aux équations (5) de la manière suivante. Si J est une intégrale complète avec une constante arbitraire α_i, l'équation (3) doit rester valable quand on change α_i en $\alpha_i + d\alpha_i$ dans l'expression de J. On doit donc avoir la relation :

$$\frac{\partial^2 J}{\partial t \partial \alpha_i} + \sum_\nu \frac{\partial H}{\partial p_\nu} \frac{\partial^2 J}{\partial q_\nu \partial \alpha_i} = 0.$$

En vertu de l'équation (1) on peut écrire au lieu de cela :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_\nu \frac{dq_\nu}{dt} \frac{\partial}{\partial q_\nu}\right)\left(\frac{\partial J}{\partial \alpha_i}\right) = 0.$$

Cependant, l'opérateur entre parenthèses coïncide avec l'opérateur (d/dt) de dérivation par rapport au temps dans la représentation de Lagrange. Donc la grandeur $(\partial J/\partial \alpha_i)$ pour *un* système restera constante au cours du temps d'où découle le système d'équations (5) pour la description du mouvement d'un système de points matériels.