Annales de la Fondation Louis de Broglie, Vol. 11, n° 4, 1986

A propos de deux mémoires d'Einstein sur la géométrie de l'espace de configuration en mécanique classique

## par Georges LOCHAK

Fondation Louis de Broglie 1, rue Montgolfier 75003 PARIS

Résumé: Les deux mémoires d'Einstein reproduits dans le présent numéro des Annales de la Fondation Louis de Broglie sont replacés dans la perspective du développement de la mécanique classique et de la mécanique ondulatoire, ainsi que de l'usage des espaces abstraits en physique, qui n'a cessé de s'affirmer depuis.

Des deux mémoires que nous reproduisons ici, le plus important est évidemment celui qui concerne les conditions de quantification de Sommerfeld-Epstein, c. à d. les bases de l'ancienne théorie des quanta. Le mémoire sur le théorème de Jacobi, quoique intéressant en lui-même, a surtout été reproduit parce qu'il est utile à une meilleure lecture de l'autre mémoire.

On aurait tort de croire que, du fait que le mémoire sur la méthode de Sommerfeld-Epstein concernait une théorie aujourd'hui abandonnée, il n'a pu jouer qu'un rôle mineur
dans la physique de notre siècle. Bien au contraire, ce rôle
fut éminent, mais il faut pour le comprendre, faire l'effort
de le replacer dans sa perspective historique. Revenons donc
à l'époque où ce mémoire fut écrit.

Nous devons, pour cela, rappeler d'abord un point technique important : à cette époque, différents physiciens (Bohr, Sommerfeld, Epstein, etc.) avaient tenté de généraliser à l'ensemble de la dynamique analytique les règles quantiques que Bohr avait introduites dans sa fameuse théorie de l'atome. C'est cet ensemble de règles qu'on appelle aujourd'hui l'"ancienne théorie des quanta". Elles consistaient essentiellement à "quantifier" ce qu'on appelle, en dynamique analytique, les intégrales d'action. Ce sont là des grandeurs définies sur des systèmes dits "intégrables" et on les calcule en représentant le système grâce à des variables particulières dites "séparables" ; la règle de quantification stipulait que l'on devait identifier chaque intégrale d'action à un multiple entier de la constante de Planck. L'expérience a donné raison à cette règle dans plusieurs cas physiques importants mais, dans l'unique article qu'il ait écrit sur cette question (celui-là même que nous reproduisons), Einstein s'est élevé contre cette manière de faire en objectant qu'elle est fondée sur l'usage de variables très particulières, les variables séparables, et que cette propriété de séparabilité n'est pas covariante. Le mot "covariante" n'est pas pris ici dans le sens qu'on lui donne en relativité, en se référant aux transformations de Lorentz; Einstein invoquait ici une autre loi d'invariance (ou, si l'on veut, de symétrie) et se référait au groupe des transformations canoniques qui sont celles qui ont la propriété de conserver la forme dite "hamiltonienne" des équations de la dynamique classique, dont la théorie quantique faisait usage.

Einstein considérait qu'il n'était pas admissible que la quantification reposât sur un simple artifice de calcul et il proposa une méthode générale et invariante. Il est curieux de noter que cette méthode, en tant que telle, n'apporta rien de nouveau à la théorie des quanta et elle fut, du reste, éphémère puisque la théorie tout entière devait se voir supplanter quelques années plus tard par la "nouvelle théorie des quanta", c'est-à-dire par la mécanique ondulatoire et quantique, telle que nous la connaissons aujourd'hui. Et pourtant ! Ce mémoire n'en a pas moins marqué de façon profonde et indélébile toute la physique de notre siècle. Mais que proposait-il ? Il proposait non pas de quantifier les intégrales d'action prises séparément, ce qui ne pouvait se faire qu'en choisissant des variables particulières, mais de quantifier leur somme, c'est-

à-dire l'action maupertuisienne du système qui, elle, est un invariant canonique, c'est-à-dire qui ne dépend pas des variables choisies pour représenter le système. Mais on pourrait croire que, ce faisant, Einstein remplaçait n conditions (puisqu'il y a autant d'intégrales d'action que le système possède de degrés de liberté (1)), par une seule ; et donc qu'il devrait lui manquer des nombres quantiques. Or, Einstein montra qu'il n'en était rien, pourvu que l'on s'impose de calculer l'intégrale de Maupertuis sur tous les chemins fermés possibles de l'espace de configuration. Il montra que l'ensemble de ces chemins se partage en classes d'homotopie qui sont en même nombre que les intégrales d'action et que si l'on choisit un échantillon dans chaque classe, on retrouve bien les anciens résultats, mais par un raisonnement qui reste invariant par rapport au groupe canonique.

Mais où était donc l'idée révolutionnaire dans tout cela ? Elle résidait en ce que le raisonnement d'Einstein était sans doute le premier raisonnement physique qui reposait entièrement sur la géométrie d'un espace abstrait, en l'occurence l'espace de configuration, qui n'est aucunement celui dans lequel se déroulent les phénomènes, mais un espace représentatif à 3n dimensions (donc le triple du nombre de particules qui constituent le système physique). C'est dans cet espace là qu'il déformait des chemins, considérait des tubes de trajectoires, constuisait des feuillets de Riemann.

Or il faut se rappeler que cette façon de faire, qui parait presque banale aujourd'hui, était extrêmement nouvelle et audacieuse à l'époque, non seulement pour un physicien, mais même pour un mathématicien : la géométrie dans un espace à un nombre quelconque de dimensions n'était absolument pas chose courante en 1917, contrairement à ce qu'on pourrait croire. Il est intéressant d'éclairer ce point de vue par quelques faits historiques qui sont importants à connaître pour évaluer la révolution qui s'est produite, au cours de notre siècle, dans les rapports entre la géométrie et la physique.

Disons d'abord qu'il ne suffit pas qu'une théorie mette en jeu un grand nombre de paramètres pour qu'on puisse  $\overline{(1)}_{\text{Je}}$  fais abstraction des dégénérescences qui nous importent peu ici.

dire qu'elle repose sur une géométrie à un grand nombre de dimensions : encore faut-il, pour cela, avoir conscience que ces paramètres constituent un espace, il faut doter celui-ci de propriétés géométriques et les utiliser réellement. Je crois qu'on peut dire que les premiers raisonnements géométriques dans un espace de configuration à un grand nombre de dimensions ne remontent pas plus loin qu'à Riemann. Le premier physicien à avoir fait de la mécanique en raisonnant dans un tel espace fut, semble-t-il, Heinrich Hertz.

Il est important de noter, à ce sujet, que Lagrange, le fondateur de la mécanique analytique, étudiait certes des systèmes à un grand nombre de paramètres (les  $q_i$  et les  $\dot{q}_i$ ), mais à aucun moment il ne les considérait comme les coordonnées d'un espace dans lequel existerait une géométrie. De même, Hamilton a établi son célèbre principe dans l'espace à trois dimensions et c'est également dans R³ que Jacobi a développé sa théorie et non pas dans un espace de configuration plus général. Mais on peut indiquer également des détails révélateurs beaucoup plus récents. Par exemple : Poincaré dans "Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste" (1899), établit son théorème du retour en commençant par un véritable liquide dans l'espace habituel, puis il l'étend à un nombre quelconque de dimensions, mais s'il parle encore de points et de domaines, il ne parle plus de courbes, de trajectoires, ou de vitesses, encore moins de tubes. On trouve déjà cette démarche dans son chapitre sur les invariants intégraux, où il commence aussi par un liquide dans R3 et ne généralise son raisonnement qu'en s'entourant de précautions de style qui nous révèlent combien la chose était peu courante ; il dit, par exemple : "Nous pouvons, pour conserver le même language, appeler point M le système de valeurs  $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ; et, parlant d'un domaine v dans lequel le point  $x_1, x_2, \ldots, x_n$  reste enfermé, il prend soin de dire que v "joue le même rôle que jouait tout à l'heure le vase où le liquide est enfermé". Certes, après cela, Poincaré se meut avec virtuosité dans la géométrie des variétés dans R<sup>n</sup>, tout au long de ce célèbre chapitre sur les invariants intégraux, mais ses précautions pédagogiques de départ montrent que son lecteur n'était pas censé y être habitué : par contre, vingt ans plus tard, en 1921, l'idée était entrée dans les moeurs comme le montre le fameux livre d'Elie Cartan, sur le même sujet, où plus aucune précaution de langage n'est prise.

Il est intéressant de citer encore l'"introduction géométrique à quelques théories physiques" de Borel (1913) où l'auteur, pour expliquer à son lecteur physicien l'espace de Minkowski, étudie d'abord les déplacements dans  $\mathbb{R}^3$ , puis dans  $\mathbb{R}^4$  (avec un luxe de détails), puis dans  $\mathbb{R}_2^{+-}$ , puis dans  $\mathbb{R}_3^{+-}$  et enfin dans  $\mathbb{R}_4^{+-}$ , après des pages et des pages pour aider le lecteur à surmonter ces deux obstacles que représentaient à la fois la quadridimensionnalité et la signature non euclidienne de l'espace-temps.

Signalons encore que chez Gibbs, il n'y a pas de géométrie dans l'extension en phase : ce n'est pas, pour lui, un espace, mais un simple ensemble de 2n paramètres. Il en est de même pour Boltzmann, dans son fameux traité sur la "Théorie des Gaz", où le langage géométrique est strictement limité à  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$ : lorsqu'il démontre le théorème de Liouville il lui faut plusieurs pages pour exprimer à son lecteur le changement de variables dans une intégrale multiple, et il note au passage que l'interprétation géométrique en serait simple dans  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ , mais il ne la généralise pas.

Enfin, last but not least, il n'y a pas de géométrie chez Liapounov ! Même pour expliquer la fonction V. La notion de voisinage s'y réduit à des inégalités portant sur des différences  $|\mathbf{q}_k - \mathbf{Q}_k|$  ou des formes quadratiques sur ces différences, mais on ne parle ni d'espace de phase ni, encore moins, de trajectoires.

On peut donc mesurer, maintenant, le caractère révolutionnaire du langage géométrique qu'Einstein tenait aux physiciens.

L'influence de l'article d'Einstein de 1917 sur l'évolution de la mécanique quantique s'exerça, ainsi que je le disais, non pas à travers la théorie de Bohr-Sommerfeld à laquelle il était consacré, mais principalement à travers la mécanique ondulatoire dont il constitue l'une des sources essentielles (les deux autres sources étant la théorie de la relativité et celle du photon).

En effet, dès la thèse de Louis de Broglie, dans

laquelle celui-ci identifiait l'un à l'autre les principes de Maupertuis et de Fermat, l'auteur remarquait aussitôt que la condition de quantification de l'intégrale d'action de Maupertuis, proposée par Einstein, revenait, dans sa nouvelle théorie, à imposer une condition de résonance sur la phase de l'onde associée à un corpuscule.

Mais cette idée que de Broglie appliquait dans l'espace physique (c'est-à-dire dans R3), Schrödinger allait bientôt la transformer d'une manière radicale qui correspondait bien à l'état d'esprit qui était en train de triompher en physique. En effet, relativiste avant d'avoir été quantiste, familier des travaux de Riemann et de Hertz (en mécanique), il avait fait un cours dans lequel il exposait la théorie de Hamilton-Jacobi en termes de propagation d'ondes dans l'espace de configuration (donc dans Rn), muni d'une métrique riemanienne définie par l'énergie cinétique. Si bien que lorsqu'il eut connaissance des travaux de de Broglie, Schrödinger les transposa directement à l'espace de configuration. Et on vit donc ces ondes de de Broglie qui venaient à peine de naître dans l'espace physique (où Davisson et Germer devaient bientôt observer leurs effets en 1927) devenir en fait des êtres mathématiques abstraits qui se propageaient dans un espace à 3n dimensions et auxquels Schrödinger généralisait l'analogie entre les principes de Maupertuis et de Fermat, ou leur appliquait sans sourciller le principe de Huygens comme s'il se fût agi d'ondes physiques.

C'est cette étonnante audace qui a abouti à l'équation de Schrödinger pour les systèmes de particules, laquelle a donc été écrite directement en termes de propagation d'ondes dans l'espace de configuration. Remarquable dans tout le domaine de la physique atomique, établie de façon formelle à partir d'une géométrie abstraite, comme devait l'être, un peu plus tard, l'équation de Dirac, elle a résisté comme celle-ci à tous les efforts d'interprétation physique intuitive dans l'espace ordinaire; notamment, elle a résisté aux efforts de de Broglie, et de Schrödinger lui-même, insatisfaits l'un comme l'autre de ne pouvoir sortir de cet espace de configuration. La situation ne s'est plus modifiée par la suite et, dans toutes les interactions, les amplitudes de transition revêtent cette forme globale et abstraite. Or, n'oublions pas que l'une des plus fameuses

disputes de la mécanique quantique, le paradoxe d'Einstein, Podolsky et Rosen, vient de là : le paradoxe n'exprime rien d'autre que notre incapacité à retrouver une description individuelle intelligible pour les éléments d'un couple de deux particules qui ont interagi une fois dans le passé, mais qui peuvent se trouver aussi loin qu'on le veut l'une de l'autre à l'instant où on les observe (1). Mais il faut bien souligner que même si le manque de qualités descriptives de la théorie provoque chez presque tout le monde un sentiment de gêne et d'insuffisance, l'exactitude de ses prévisions n'en est que plus étonnante, ainsi qu'en atteste l'expérience d'Aspect dans laquelle la corrélation prévue par la théorie a été vérifiée sur des photons ayant "jadis" interagi mais qui étaient distants de 12 mètres au moment de leur observation.

C'est là un bel exemple des miracles et des faiblesses de la géométrisation de la physique, qui nous fournit de puissants moyens de prévision, lesquels attestent des qualités heuristiques encore inépuisées des principes relativistes et quantiques sur lesquels cette géométrisation est fondée, en même temps qu'elle nous fait abandonner chaque jour davantage toute description causale des phénomènes individuels dans l'espace et dans le temps.

On voit donc que reproduire aujourd'hui ce vieux mémoire d'Einstein, ce n'est pas seulement exhumer dans un but esthétique une vieille relique, mais se donner l'occasion de réfléchir encore une fois à partir d'un texte fondamental, sur l'un des plus difficiles problèmes de la physique contemporaine (2).

- (1) Voir G. Lochak in : Einstein. Colloque du Centenaire. (CNRS 1979).
- (2) Le présent texte emprunte largement à un exposé fait par l'auteur au Colloque sur l'oeuvre de René Thom réuni en 1982 au Centre Culturel International de Cerisy-la-Salle.