Annales de la Fondation Louis de Broglie,
Vol. 11, n° 4, 1986

Sur le prolongement de l'analogie entre l'optique et la mécanique*

par N.G. TCHETAIEV

Nicolas Tchetaïev (1902-1959) dont nous publions ci-dessous un travail sur l'analogie entre l'optique et la mécanique était un éminent mécanicien, successivement professeur aux universités de Kazan et de Moscou. Aérodynamicien d'origine, ses principaux travaux ont, toutefois, porté sur la dynamique analytique et sur la théorie de la stabilité du mouvement. L'importance fondamentale et le rôle -à son avis non encore élucidé- de la stabilité du mouvement dans les lois naturelles était le credo de Tchetaïev. Il l'avait pris pour but de son programme de recherche personnel qu'il a toujours gardé (plus ou moins secret !) sous le nom de "Programme de Kazan", dans des carnets qui n'ont été publiés qu'après sa mort. En particulier, il était persuadé que les analogies optique-mécanique et la mécanique ondulatoire elle-même devaient pouvoir s'expliquer à partir de telles considérations et que l'équation de Schrödinger devait en être l'expression. Tchetaïev a tenté de développer cette idée dans bon nombre de travaux, dont certains sont restés longtemps impubliés et qui restent, encore aujourd'hui, tout à fait méconnus. Ils nous paraissent pourtant présenter un incontestable intérêt et c'est pourquoi nous souhaitons attirer sur eux l'attention.

---

*Ce travail a été publié en russe dans : Prikladnaïa Matematika i Mekhanika, 22, p. 487, 1958, puis dans les oeuvres choisies de Techtaïev publiées à Moscou en 1962 sous le titre: "Stabilité du mouvement. Travaux sur la dynamique analytique". Traduction G. Lochak.

On remarquera que les idées de Tchetaïev, bien qu'exprimées sous une forme différente, vont dans le même sens que des conceptions défendues jadis par G.D. Birkhoff à partir de sa théorie des mouvements centraux et, plus tard, dans l'équipe de Louis de Broglie, sur la base de la théorie des systèmes auto-oscillants. On pourra consulter, sur ces problèmes :

F. Fer, L'irréversibilité, fondement de la stabilité du monde physique, Gauthier-Villars, Paris, 1977.

G. Lochak, Irreversibility in Physics : Reflexions on the Evolution of Ideas in Mechanics and on the Actual Crisis in Physics, Found. of Physics, vol. 11, p. 593, 1981.

G. Lochak

HAMILTON a découvert l'analogie qui existe entre l'optique ondulatoire de HUYGENS et les mouvements d'un système mécanique restreint par des liaisons holonomes et soumis à des forces dérivant d'un potentiel. Cette célèbre découverte a déterminé pour un siècle les progrès de la dynamique analytique. La théorie de la lumière a évolué et CAUCHY a été le premier à poser le problème du prolongement correspondant de l'analogie entre l'optique et la mécanique.

On établit dans le présent article l'analogie entre la théorie mathématique de la lumière de CAUCHY et les mouvements stables des systèmes mécaniques holonomes et conservatifs[1].

Considérons un système mécanique soumis à des liaisons holonomes. Désignons par $q_1,\ldots,q_n$ les coordonnées qui le définissent ; par n le nombre de ses degrés de liberté ; par $p_1,\ldots,p_n$ les moments conjugués aux différentes coordonnées. Nous supposerons pour plus de simplicité que les liaisons holonomes sont indépendantes du temps et que les forces qui agissent sur le système dérivent d'une fonction $U(q_1,\ldots,q_n)$ ne dépendant pas du temps.

Soit :

$$2T = \sum_{i,j} g_{ij}\, p_i\, p_j$$

le double de l'énergie cinétique du système matériel considéré. En vertu des hypothèses faites, les fonctions $g_{ij} = g_{ji}$ ne dépendent pas du temps t et peuvent dépendre des coordonnées q_s. L'équation aux dérivées partielles de HAMILTON s'écrit alors

$$(1) \qquad \sum_{ij} g_{ij} \frac{\partial V}{\partial q_i} \frac{\partial V}{\partial q_j} = 2(U + h)$$

où h désigne la constante des forces vives. Une intégrale complète de l'équation de HAMILTON sera une fonction

$$V(q_1,\ldots,q_n\ ;\ \alpha_1,\ldots,\alpha_n) + C^{nte}$$

satisfaisant à l'équation (1), dépendant de constantes α_1, $\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ et telle que

$$\left\| \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial \alpha_j} \right\| \neq 0$$

La constante des forces vives sera alors une certaine fonction des constantes α_s

$$h = h(\alpha_1,\ldots,\alpha_n).$$

D'après le théorème bien connu de HAMILTON-JACOBI la solution générale des équations du mouvement sera définie par les formules

$$(2) \qquad p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}\ ,\quad \beta_i = -t\,\frac{\partial h}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial V}{\partial \alpha_i} \qquad (i = 1,2,\ldots,n)$$

où les β_i sont certaines constantes. Les mouvements perturbés du système mécanique sont définis par les diverses valeurs des constantes α_i et β_i.

Pour déterminer parmi tous les mouvements possibles du système mécanique, les mouvements qui sont stables par rapport aux perturbations des seules données initiales, considérons les équations différentielles aux variations de POINCARE

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{d\xi_i}{dt} = \sum\limits_j \left(\dfrac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_i}\, \xi_j + \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_i}\, \eta_j \right) \\[2ex] \dfrac{d\eta_i}{dt} = -\sum\limits_j \left(\dfrac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial q_i}\, \xi_j + \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial q_i}\, \eta_j \right) \end{cases}$$

où ξ_i et η_i sont les variations des coordonnées q_i et des impulsions p_i et

$$H = T - U.$$

Pour un mouvement stable non perturbé, les équations aux variations de POINCARE constituent un système d'équations différentielles linéaires que l'on peut ramener à un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants à l'aide d'une transformation linéaire non singulière. Les nombres caractéristiques d'un système de solutions indépendantes doivent absolument être égaux à zéro. Par là-même, les variations des coordonnées et des impulsions des mouvements perturbés, qui sont définis par le changement des seules variables β_i pour des valeurs données des α_i auront des nombres caractéristiques nuls si le mouvement non perturbé est stable. Pour de tels mouvements perturbés nous aurons en vertu de (2)

$$\eta_i = \sum_j \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\, \xi_j \qquad (i = 1,2,\ldots,n)$$

Il s'ensuit que si l'on tient compte de la valeur explicite de la fonction H nous aurons

$$(4)\qquad \frac{d\xi_i}{dt} = \sum_{j,s} \xi_s \frac{\partial}{\partial q_s}\left(g_{ij} \frac{\partial V}{\partial q_j} \right) \qquad (i = 1,2,\ldots,n)$$

les variables q_i et les constantes α qui se trouvent dans le membre de droite des formules (4) doivent avoir les valeurs correspondant au mouvement non perturbé. Supposons que pour un mouvement stable non perturbé les équations (4) soient réductibles à l'aide d'une transformation linéaire

$$x_i = \sum_j \gamma_{ij}\, \xi_j$$

avec un déterminant constant $\Gamma = ||\gamma_{ij}||$. Si

$$\xi_{1r},\ldots,\xi_{nr} \qquad (r = 1,2,\ldots,n)$$

représente un système normal de solutions indépendantes des équations (4) alors,

$$x_{ir} = \sum_j \gamma_{ij}\, \xi_{jr}$$

seront solutions du système réduit. Pour un mouvement non perturbé stable tous les nombres caractéristiques des solutions $(x_{1r},\ldots,x_{nr})$ sont, ainsi que nous l'avons vu, égaux à zéro et donc

$$||x_{sr}|| = C^* = ||\gamma_{sj}||\,||\xi_{jr}|| = \Gamma C \exp\left[\sum_{ij} \frac{\partial}{\partial q_i}\left(g_{ij} \frac{\partial V}{\partial q_j} \right) dt \right.$$

où C^* et C sont certaines constantes non nulles.

De cette dernière relation il résulte alors que pour le mouvement non perturbé

$$(5)\qquad \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial q_i}\left(g_{ij} \frac{\partial V}{\partial q_j} \right) = 0.$$

Etant donné que les fonctions g_{ij} sont définies par l'expression de la force vive

$$2T = \sum g_{ij}\, p_i\, p_j$$

les mineurs principaux diagonaux du discriminant $||g_{ij}||$ doivent être tous positifs en vertu du théorème de SILVESTER. Il s'ensuit que l'équation (5) est elliptique.

Soit maintenant une fonction

$$\phi(-ht + V)$$

deux fois dérivable et dépendant de l'intégrale complète $-ht + V$ de l'équation aux dérivées partielles de HAMILTON-JACOBI. Pour un mouvement non perturbé nous aurons en vertu de (5), (1) et (2)

$$\sum \frac{\partial}{\partial q_i}\left(g_{ij}\frac{\partial \phi}{\partial q_j}\right) = \phi' \sum \frac{\partial}{\partial q_i}\left(g_{ij}\frac{\partial V}{\partial q_j}\right) + \phi'' \sum g_{ij}\frac{\partial V}{\partial q_i}\frac{\partial V}{\partial q_j} = \frac{2(U+h)}{h^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

et donc

$$\frac{2(U+h)}{h^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \sum \frac{\partial}{\partial q_i}\left(g_{ij}\frac{\partial \phi}{\partial q_j}\right)$$

Cette équation d'onde établit l'analogie entre la théorie mathématique de la lumière de CAUCHY et les mouvements stables des systèmes conservatifs holonomes. S'il se trouve que l'on peut séparer les variables dans l'équation de HAMILTON (1) les conditions de stabilité analogues à (5) peuvent être écrites une par une dans chacun des groupes de variables séparées.

BIBLIOGRAPHIE

(1) TCHETAIEV N.G. : Sur quelques problèmes de stabilité du mouvement en mécanique, Prikladnaïa Matematika i Mekhanika, Tome 20, n° 3, 1956.

N.D.T. : La vitesse $\frac{h}{\sqrt{2(h+U)}}$ qui apparaît dans l'équation d'ondes que Tchetaïev donne à la fin de cet article est bien la vitesse de propagation des ondes de Hamilton. Le lecteur le vérifiera par exemple dans les ouvrages suivants :

BRILLOUIN L., Les tenseurs en mécanique et en élasticité, Masson, Paris, 1960 (p. 174).

SCHRÖDINGER E., Mémoires sur la mécanique ondulatoire, Alcan, Paris, 1933 (p. 44).

On comparera avec intérêt le raisonnement de Schrödinger avec celui de Tchetaïev.