Une solution au problème de Jauch à une dimension

Pierre HUGUENIN et Jean-Pierre AMIET

Institut de Physique,
1 rue A.-L. Breguet,
CH-2000 Neuchâtel

RESUME. On construit une observable oui-non (projecteur) répondant à la question : Quelle est la probabilité qu'un détecteur réagisse dans le futur à une particule libre dont l'état quantique (fonction d'onde ou matrice densité) est donné au temps $t = 0$.

1. Introduction

Le problème de Jauch [1] consiste en ceci : Au temps $t = 0$, la fonction d'onde d'une particule est donnée. Quelque part dans l'espace se trouve un détecteur de géométrie donnée. On demande la probabilité que le détecteur fasse "clic", n'importe quand dans le futur.

Cette question fondamentale touche évidemment la problématique de la théorie de la diffusion. Elle a été posée par le regretté J.-M. Jauch dans le cadre de son "petit séminaire" destiné aux étudiants.

Contrairement aux apparences, ce problème est loin d'être trivial et nous ignorons si son auteur avait lui-même une solution à proposer.

Nous nous limiterons ici à proposer une solution pour le cas à 1 dimension laissant au lecteur le plaisir de la généralisation à 3 dimensions.

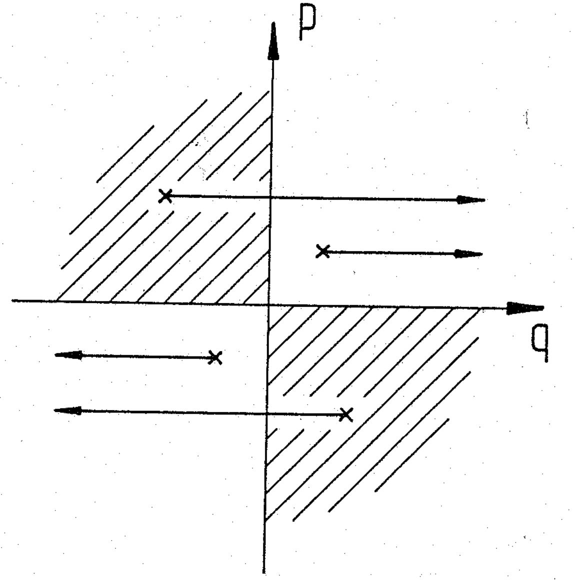

Fig 1. Les états de la particule situés dans les zônes hachurées sont tels qu'elle passera à travers le détecteur dans l'avenir. Pour le reste de l'espace de phase, elle a déjà passé.

2. Description classique

A une dimension, le détecteur idéal peut être pensé comme ponctuel. Il fera clic, à coup sûr, si la particule franchit ce point.

Ainsi, si la particule est à droite et va vers la droite, elle ne pourra pas franchir le détecteur. De même à gauche. En revanche, si la particule est à gauche et va vers la droite, le détecteur sera franchi et il fera clic. Sur l'espace de phase la fonction de détection vaudra donc (Voir fig. 1)

$$d(q\,,p\,) = \theta(-\,pq\,) = \begin{array}{ll} 0 & \text{si } qp\ > 0 \\ 1 & \text{si } qp\ < 0 \end{array} \tag{1}$$

Classiquement, cette fonction résoud complètement le problème posé pour un détecteur placé à l'origine et une particule soumise à aucune force.

3. Quantification de $\theta(-\,qp\,)$

Il s'agit de construire l'opérateur "détecteur de Jauch" correspondant à $\theta(-\,qp\,)$. A cause de la non-commutation de Q et P, il faut choisir un correspondant symétrique

$$qp\ \rightarrow \frac{1}{2}\,[QP\ +PQ\,] = \frac{1}{2}\,[Q\,,P\,]_+ \tag{2}$$

Du fait que cet opérateur commute avec la parité Π, on peut simultanément diagonaliser les 2 opérateurs. Soient donc $|\lambda,\,\pi >$ t.q.

$$\Pi\,|\lambda,\,\pi > = \pi|\lambda,\,\pi > \qquad \pi = \{\,+1,-1\,\} \tag{3}$$

$$\frac{1}{2}\,[Q\,,P\,]_+|\lambda,\,\pi > = \hbar\,\lambda\,|\lambda,\,\pi > \qquad \lambda\in\mathbf{R}\quad \text{sans dimension} \tag{4}$$

Mettons-nous dans l'espace des positions

$$<q\,|\Pi|\lambda,\pi> = <-\,q\,|\lambda,\pi> = \pi<q\,|\lambda,\pi> \tag{3'}$$

$$<q\,|\frac{1}{2}\,[Q\,,P\,]_+\,|\lambda,\pi> = (\frac{\hbar}{i}\,q\,\,\frac{\partial}{\partial q} + \frac{\hbar}{2i}) <q\,|\lambda,\pi> = \tag{4'}$$

$$\hbar\,\lambda <q\,|\lambda,\pi>$$

La solution générale de ce système est de la forme

$$<q\,|\lambda,\pi> = N(\lambda)\,\frac{1}{\sqrt{|q\,|}}\,e^{\,i\,\lambda\log|q|}\,\{\theta(q\,) + \pi\,\theta(-\,q\,)\,\} \tag{5}$$

Il reste à fixer $N(\lambda)$ par la normalisation que l'on veut choisir dans le continu :

$$<\lambda'\,,\pi'\,|\lambda,\pi> = \delta(\lambda-\lambda'\,)\,\delta_{\pi,\pi'} \tag{6}$$

Un calcul élémentaire montre que l'on peut choisir

$$N(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{4\,\pi}} \tag{7}$$

(Il reste, bien entendu, la liberté d'un choix de phase). Nous pouvons construire l'opérateur correspondant à $\theta(-qp)$ en sommant sur les valeurs négatives du spectre

$$D = \sum_{\pi} \int_{-\infty}^{0} |\lambda,\pi > d\lambda < \lambda\,\pi| \tag{8}$$

Et on peut calculer les éléments de matrice. Par exemple :

$$< q' \,|D|\, q > = \frac{1}{4\pi} \sum_{\pi} \int_{-\infty}^{0} \frac{d\lambda}{\sqrt{|q'|}}\, e^{i\lambda \log\frac{|q'|}{|q|}} \frac{1}{\sqrt{|q|}} \tag{9}$$

$$\Big(\theta(q') + \pi\,\theta(-q')\Big)\Big(\theta(q) + \pi\,\theta(-q)\Big)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \sum_{\pi} [\theta(q'q) + \pi\theta(-q'q)] \frac{1}{\sqrt{|qq'|}} \int_{-\infty}^{0} d\lambda . e^{i\lambda\log\frac{|q'|}{|q|}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{\theta(q'.q)}{\sqrt{q'.q}} \int_{-\infty}^{0} d\lambda\, e^{i\lambda\log\frac{|q'|}{|q|}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{qq'}}\, \theta(q'q)\, \delta_-\left(\log\frac{|q'|}{|q|}\right)$$

Par construction, nous avons ici un projecteur hermitien c'est-à-dire une observable oui-non présentable dans les cercles les plus sélects. La trace prise avec un opérateur densité donnera un nombre réel compris entre zéro et un comme il convient à un détecteur bien élevé.

Ces remarques peuvent paraître triviales mais notre toute première tentative donnait infini tout le temps. La deuxième pouvait donner des clics négatifs. C'est ici une troisième version que nous croyons bonne.

En dépit de ces qualités le noyau intégral $< q' \,|D|\, q >$ est de forme mathématique si éloignée de la fonction de départ $\theta(-qp)$ qu'il est difficile de juger sa signification physique. La fonction de Wigner correspondante nous paraît plus parlante. Appelons $d(q,p)$ la fonction de Wigner de D.

$$d(q,p) = Tr \int du\, |q + \frac{u}{2} > e^{i\frac{pu}{\hbar}} < q - \frac{u}{2}|\, D \tag{10}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} du < q - \frac{u}{2}|D|q + \frac{u}{2} > e^{i\frac{pu}{\hbar}}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} du \frac{\theta(q^2 - \frac{u^2}{4})}{\left[(q + \frac{u}{2})(q - \frac{u}{2})\right]^{1/2}}\, \delta_-\left(\log\frac{|q - \frac{u}{2}|}{|q + \frac{u}{2}|}\right) e^{i\frac{pu}{\hbar}}$$

$$= \int_{-2|q|}^{+2|q|} du \frac{\delta_-\left(\log\frac{|q - \frac{u}{2}|}{|q + \frac{u}{2}|}\right)}{\left[(q + \frac{u}{2})(q - \frac{u}{2})\right]^{1/2}} e^{i\frac{pu}{\hbar}}$$

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \delta_-\left(\log\frac{1 - \sin t}{1 + \sin t}\right) e^{2i\frac{qp}{\hbar}\sin t}\, dt$$

Cette équation montre que cette fonction ne dépend que de la variable sans dimension

$$x = \frac{2qp}{\hbar} \tag{11}$$

Donc

$$d(q,p) = f(x) = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \delta_-\left(\log\frac{1 - \sin t}{1 + \sin t}\right) e^{i\,x\sin t}\, dt \tag{12}$$

où

$$\delta_-(a) = \frac{1}{2}\,\delta(a) - \frac{i}{2\pi}\, P\,\frac{1}{a} \tag{13}$$

Pour calculer plus avant, posons

$$v = \log \frac{1 - \sin t}{1 + \sin t} \qquad \sin t = \frac{1 - e^{v}}{1 + e^{v}} = - \operatorname{th} \frac{v}{2} \qquad dv = - \frac{2dt}{\cos t}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\delta(v) - \frac{i}{p} P \frac{1}{v} \right) \exp\left(- ix \operatorname{th} \frac{v}{2}\right) \left(1 - \operatorname{th}^2 \frac{v}{2} \right)^{\frac{1}{2}} dv \qquad (14)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{i}{2\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv}{v \operatorname{ch} v/2} \exp\left(- ix \operatorname{th} \frac{v}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin\left(-x \operatorname{th} \frac{v}{2}\right)}{v \operatorname{ch} v/2} dv$$

Cette expression est difficile à intégrer analytiquement, mais rien n'interdit de la calculer numériquement. Posons

$$J(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\sin\left(-x \operatorname{th} \frac{v}{2}\right)}{v \operatorname{ch} v/2} \qquad (15)$$

Certaines propriétés sont évidentes :

$$J(x) = - J(-x) \qquad J(0) = 0 \qquad J(-+\infty) = \pm 1$$

Ainsi, à la limite $h \to 0$, on a

$$\lim_{h \to 0} d(q.p) = \theta(-q.p) \qquad (16)$$

Cette limite doit être comprise au sens des distributions ; $d(q,p)$ est une fonction qui oscille autour de sa limite classique comme c'est le plus souvent le cas. Les développements en puissance de h sont, au mieux, des développements asymptotiques.

Le calcul numérique de $f(x)$ est facile avec les moyens informatiques d'aujourd'hui. Le résultat est représenté sur la figure 2 .

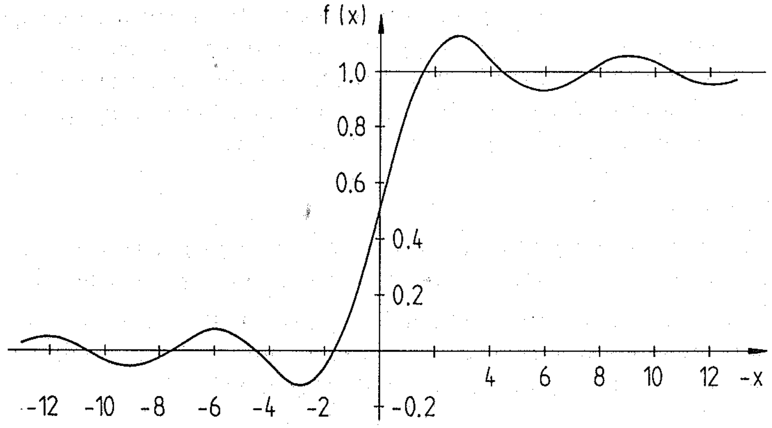

Fig 2. Valeur de la fonction (12) exprimée en fonction du paramètre sans dimension $x = 2qp/\hbar$.

Conclusions

Nous avons donc une solution au problème posé, mais nous ne savons pas si elle est unique. Proprement généralisée au cas à 3 dimensions, ce type de solutions permet de discuter des problèmes de diffusion avec détecteur placé à distance finie du diffuseur.

La détection d'un faisceau de particules sur un écran fait appel à des notions analogues. Il y a une veine encore inexploitée de problèmes de mécanique quantique très instructifs dans cette mine. Qu'il s'agisse de l'aspect mathématique : exemple simple d'opérateur symétrique non autoadjoint, choix d'extension. Ou bien que l'on focalise son attention sur le côté non local de l'opérateur de détection, les physiciens "quantiques" peuvent trouver quelque chose à apprendre. On reconnaît là le maître à penser qu'était J.M. Jauch.

En travaillant cette question nous avons, pour un temps, pensé que la question ne comportait pas de solution rigoureuse [2], c'est-à-dire conduisant à une observable oui-non. Nous nous sommes demandé s'il fallait faire appel à une théorie plus détaillée du mécanisme de détection prenant en compte l'irréversibilité du processus [3], par exemple avec des équations de Fokker-Planck. Mais ce n'est finalement pas nécessaire, le schéma quantique est un algorithme qui, décidément, ne cesse pas de nous étonner.

Remerciements

Nous remercions J.-F. Germond et C. Wilkin avec qui nous avons discuté diverses approximations de l'intégrale (15) avec enthousiasme et efficacité.

Nous exprimons notre gratitude à Madame I. Daubechies qui nous a signalé les erreurs de calculs à la page 205 de notre livre [2], ce qui nous a conduit à reprendre le problème sous la forme présentée ici.

Références

[1] J.-M. Jauch, Communication privée.

[2] J.-P. Amiet et P. Huguenin, "Mécaniques classique et quantique sur l'espace de phase". Neuchâtel 1981, chapitre V. (biffer s.v.p. la page 205 et le haut de la page 206 jusqu'au paragraphe iii).

[3] F. Fer, "L'irréversibilité, fondement de la stabilité du monde physique" (Gauthier-Villars, Paris, 1977).

(Manuscrit reçu le 15 juillet 1986)