Propriétés thermodynamiques du plasma faiblement ionisé et mécanique dissipative

Jean SALMON

Conservatoire National des Arts et Métiers
292 rue Saint-Martin
75003 PARIS

RESUME. Les propriétés thermodynamiques d'un plasma faiblement ionisé soumis à un champ continu sont depuis longtemps établies par la méthode de Boltzmann. Il est possible de les retrouver très simplement dans le cadre d'une mécanique dissipative. On obtient en outre une inégalité qui met en jeu l'entropie.

1 INTRODUCTION

Un plasma faiblement ionisé immergé dans un champ électrique uniforme est un bon exemple d'un gaz en déséquilibre avec un thermostat. En effet le gaz de molécules neutres est en équilibre Maxwellien à la température T_0 tandis que le gaz d'électrons soumis au champ électrique $\vec{\varepsilon}$ possède une température T supérieure à T_0. Nous allons déterminer la vitesse moyenne et la température du gaz d'électrons à l'aide de la méthode de Boltzmann et les retrouver à l'aide de la mécanique dissipative. Celle-ci nous permettra d'établir une importante propriété thermodynamique du gaz d'électrons.

2 NOTATIONS

Nous désignons par m_0 la masse de la molécule neutre, par m celle de l'électron et par $-e$ sa charge. Le gaz de molécules est en équilibre Maxwellien à la température T_0. Sa densité particulaire est n_0. Le gaz d'électrons possède une température T et un vecteur vitesse moyenne $\vec{v}$ uniformes. Le champ électrique $\vec{\varepsilon}$ est uniforme mais peut dépendre du temps t. Le vecteur vitesse d'un électron est $\vec{w}$. L'axe Ow_1 est parallèle à $\vec{v}$ lui même parallèle à $\vec{\epsilon}$ mais de sens opposé. La fonction de distribution des électrons F dépend des variables t, w et w_1. Elle est solution de l'équation cinétique.

$$\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{e\,\epsilon}{m}\frac{\partial F}{\partial w_1} = C(F) \tag{1}$$

dans laquelle $C(F)$ est le terme de collision des électrons avec les molécules. Nous allons expliciter F dans le cadre de la méthode de Boltzmann et dans celui de la mécanique dissipative.

3 METHODE DE BOLTZMANN

Dans cette méthode on considère une collision électron-molécule dans laquelle $\vec{w}$ et $\vec{w}_M$ désignent les vecteurs vitesse de l'électron et de la molécule à l'entrée de la collision et une collision dans laquelle l'entrée se fait avec $\vec{w}\,'$ et $\vec{w}_M\,'$ tandis que la sortie conduit à $\vec{w}$ et $\vec{w}_M$. Les fonctions de distribution sont respectivement F et F' pour les électrons, F_M et F'_M pour les molécules. Les vecteurs vitesse relative $\vec{g}$ et $\vec{g}\,'$ ont un module commun g. Les angles de déviation sont θ et η. La section efficace différentielle élastique σ dépend de θ et de g. L'équation cinétique (1) devient dans cette méthode

$$\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{e\,\epsilon}{m}\frac{\partial F}{\partial w_1} = \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int [F' F'_M - FF_M]\; g\,\sigma(g,\theta)\sin\theta\, d\theta\, d\eta\; \underline{dw}_M \tag{2}$$

La méthode de résolution est celle de Bayet, Delcroix et Denisse [1][2][3][4]. Dans le cas où le champ électrique n'est pas trop élevé le développement en Harmoniques sphériques peut être limité aux deux premiers termes. L'expression de F est :

$$F = F_0(t,w) + \frac{w_1}{w}F_1(t,w) \tag{3}$$

Il en résulte que $\underline{dw}$ désignant l'élément de volume de l'espace des vitesses on a :

$$n = \int F_0\, dw \tag{4}$$

$$n\;v = \int \frac{w_1^{\,2}}{w} F_1\, dw \tag{5}$$

$$n\,[\frac{1}{2}\,m\,v^2 + \frac{3}{2}K_0 T] = \int \frac{1}{2}\,m\,w^2 F_0\,\underline{dw} \tag{6}$$

La méthode introduit la fréquence de collision dite du transport $\nu_1(w)$

$$\nu_1(w) = 2\pi\, n_0 \int_0^{\pi} (1-\cos\theta)\sigma(w,\theta)\sin\theta\, d\theta \tag{7}$$

Il vient ensuite

$$C\,(\frac{w_1}{w}F_1) = -\nu_1\frac{w_1}{w}F_1 \tag{8}$$

et en reprenant la formule de Chapman et Cowling [5]

$$C\,(F_0) = \frac{m}{m_0 w^2}\frac{\partial}{\partial w}(\nu_1 w^2)[w\,F_0 + \frac{K_0 T}{m}\frac{\partial F_0}{\partial w}] \tag{9}$$

Il vient ainsi :

$$[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{e\,\epsilon}{m}\frac{\partial}{\partial w_1}][F_0 + \frac{w_1}{w}F_1] = \frac{m}{m_0 w^2}\frac{\partial}{\partial w}[\nu_1 w^2[wF_0 + \frac{K_0 T}{m}\frac{\partial F_0}{\partial w}]] - \nu_1\frac{w_1}{w}F_1 \tag{10}$$

Examinons d'abord le cas où ν_1 ne dépend pas de w. Multiplions par $m\,w_1\,\underline{dw}$ et par $\frac{m}{2}w^2\,\underline{dw}$ et intégrons. On peut alors obtenir v et T comme solutions d'un système différentiel sans expliciter F.

$$m\frac{dv}{dt} + e\,\epsilon = -\nu_1\, m\, v \tag{11}$$

$$mv\frac{dv}{dt} + \frac{3}{2}K_0\frac{dT}{dt} + e\,\epsilon v = -\frac{m}{m_0}\nu_1\,[mv^2 + 3K_0(T - T_0)] \tag{12}$$

Supposons ϵ nul à l'instant zéro et constant pour t positif. Il vient

$$v = -\frac{e\;\epsilon}{m\;\nu_1}[1 - e^{-\nu_1 t}] \tag{13}$$

$$T = T_0 + \frac{e^2\epsilon^2}{3K_0 m\,\nu_1^2}(1 - \frac{m}{m_0})\left[\frac{m_0}{m}[1 - e^{-2\frac{m}{m_0}\nu_1 t}]\right.$$

$$+ \frac{4}{1 - \frac{2m}{m_0}} [e^{-\nu_1 t} - e^{-2 \frac{m}{m_0} \nu_1 t}] \tag{14}$$

$$\left. + \frac{1}{1 - \frac{m}{m_0}} [e^{-2 \frac{m}{m_0} \nu_1 t} - e^{-2 \nu_{1t}}] \right]$$

Lorsque ν_1 dépend de w on établit la formule de Marguenau [6]

$$F_0 = A \ \exp[- \int_0^w \frac{m \ w' \ \ dw'}{K_0 \, T_0 + \frac{e^2 \epsilon^2 m_0}{3m^2 \nu_1^2}} \tag{15}$$

A désignant une constante de normalisation.

4 MECANIQUE DISSIPATIVE

Cette mécanique repose sur l'introduction du concept de force dissipative. A la force Hamiltonienne $\vec{X}$ on superpose une force dissipative $\vec{Y}$ qui dépend du vecteur $\vec{w}$ et de la fonction de distribution F.

A l'équation habituelle du mouvement d'une particule de masse m soumise à $\vec{X}$

$$m \ \frac{d\vec{w}}{dt} = \vec{X} \tag{16}$$

on substitue l'équation [7][8]

$$m \ \frac{d\vec{w}}{dt} = \vec{X} + \vec{Y}(\vec{w}, F) \tag{17}$$

L'équation cinétique déduite de cette équation du mouvement est

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \vec{w} \ . \ \frac{\partial F}{\partial \vec{x}} + \frac{\partial}{\partial \vec{w}} \ . \ (\vec{X} + \vec{Y}) \, F = 0 \tag{18}$$

Dans un gaz neutre caractérisé par une température T et une fréquence de collision ν une expression de $\vec{Y}$ compatible avec les principes de la thermodynamique est en désignant par F_M la distribution Maxwellienne locale [9]

$$\vec{Y} = - \nu \, K_0 \, T \ \frac{\partial}{\partial \vec{w}} \log \frac{F}{F_M} \tag{19}$$

Elle conduit à l'équation cinétique

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \vec{w} \ . \ \frac{\partial F}{\partial \vec{x}} + \frac{\vec{X}}{m} \ . \ \frac{\partial F}{\partial \vec{w}} = \nu \ \frac{\partial}{\partial \vec{w}} \ . \ [(\vec{w} - \vec{v}\,) \, F + \frac{K_0 \, T}{m} \ \frac{\partial F}{\partial \vec{w}}] \tag{20}$$

tandis que l'équation du mouvement de la particule s'écrit :

$$m \ \frac{d\vec{w}}{dt} = \vec{X} - \nu \, m \, (\vec{w} - \vec{v}\,) - \nu \, K_0 \, T \ \frac{\partial}{\partial \vec{w}} \ [\ \log F \ ] \tag{21}$$

La force $\vec{Y}$ se décompose en une force de freinage et une force de restauration comme dans le mouvement Brownien [10].

Pour un gaz de sphères dures l'équation cinétique (20) conduit à une expression du coefficient de viscosité qui varie avec la température en $T^{1/2}$. Pour un gaz isolé soit X nul multiplions l'équation (20) par $- K_0 \log F \ \underline{dw} \ \underline{dx}$ et intégrons il vient en définissant l'entropie S par :

$$S = - K_0 \int \log F \ \ F \ \ \underline{dx} \ \ \underline{dw} \tag{22}$$

et en posant

$$h = \frac{F}{F_M} \tag{23}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{K_0^2 \ \ T \ \ \nu}{m} \ \int \frac{1}{h} \ (\frac{\partial h}{\partial \vec{w}})^2 \, F_M \ \ \underline{dw} \ \ \underline{dx} \ > 0 \tag{24}$$

L'entropie est bien croissante hors d'équilibre.

Considérons maintenant le cas d'un plasma faiblement ionisé. Il est intéressant de rechercher une expression du genre (19) mais une difficulté surgit. On est en présence d'un mélange de gaz dont les températures sont différentes. Le gaz de molécules neutres est à la température T_0 et le gaz d'électrons à la température T. Le gaz d'électrons n'est pas isolé. Il est soumis à l'action d'un champ électrique extérieur qui l'échauffe et il se refroidit au contact avec le gaz de molécules neutres. Pour utiliser une expression du genre (19) il faut définir une température de mélange T_m.

L'analyse d'une collision conduit à introduire la masse réduite et la vitesse relative. L'énergie cinétique correspondante est E_{CR} avec :

$$E_{CR} = \frac{1}{2}\,\frac{m\ m_0}{m + m_0}\,(\vec{w} - \vec{w}_M)^2 \qquad (25)$$

La température de mélange T_m sera définie à partir de la valeur moyenne de E_{CR}

$$\frac{3}{2}\,K_0\,T_m = \overline{E_{CR}} = \frac{1}{2}\,\frac{m\ m_0}{m + m_0}\,\overline{(\vec{w} - \vec{w}_M)^2} \qquad (26)$$

Désignons par $\vec{V}$ la vitesse relative d'un électron vis-à-vis de la vitesse moyenne $\vec{v}$ soit

$$\vec{V} = \vec{w} - \vec{v} \qquad (27)$$

On a

$$\overline{(\vec{w} - \vec{w}_M)^2} = \overline{[\vec{v} + \vec{V} - \vec{w}_M]^2} \qquad (28)$$

$$= v^2 + \overline{V^2} + \overline{w_M^2} - 2\,\overline{\vec{w}_M}\,.\,(\vec{v} + \overline{\vec{V}}) - 2\vec{v}\ .\ \overline{\vec{V}}$$

Or

$$\overline{\vec{w}_M} = \overline{\vec{V}} = 0 \qquad (29)$$

$$\overline{V^2} = \frac{3\,K_0\,T}{m} \qquad (30)$$

$$\overline{w_M^2} = \frac{3\,K_0\,T_0}{m_0} \qquad (31)$$

L'expression de T_m est [11]

$$T_m = \frac{m\ T_0 + m_0\ T}{m + m_0} + \left(\frac{m\ m_0}{m + m_0}\right)\frac{v^2}{3\,K_0} \qquad (32)$$

Désignons par F_m la fonction

$$F_m = n\ \left(\frac{m}{2\,K_0\,T_m}\right)^{3/2} e^{-\frac{m\ v^2}{2\,K_0\,T_m}} \qquad (33)$$

et choisissons ν_1 comme fréquence de collision. Il est alors possible d'adopter comme expression de la force dissipative subie par les électrons :

$$\vec{Y} = -\,\nu_1\,K_0\,T\,\frac{\partial}{\partial \vec{w}}\,\log\frac{F}{F_m} \qquad (34)$$

et de retrouver ainsi les résultats de la méthode de Boltzmann.

L'équation du mouvement d'un électron est

$$m\,\frac{d\vec{w}}{dt} = -e\vec{\epsilon} - \nu_1 m\vec{w} - \nu_1 K_0 t\,\frac{\partial}{\partial \vec{w}}\log F \qquad (35)$$

L'équation cinétique associée s'écrit

$$\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{e\,\vec{\epsilon}}{m}\,\frac{\partial F}{\partial \vec{w}} = \nu_1\frac{\partial}{\partial \vec{w}}\left[\vec{w}F + \frac{K_0 T_m}{m}\,\frac{\partial F}{\partial \vec{w}}\right] \qquad (36)$$

Multiplions par $m\ \ w^2\ dw_1$ et intégrons. Il vient

$$mv\,\frac{dv}{dt} + \frac{3}{2}K_0\frac{dT}{dt} + e\,\epsilon v = -\,\nu_1[mv^2 + \frac{3}{2}K_0\,(T - T_m\,)] \qquad (38)$$

$$= -\,\nu_1\,\frac{m}{m + m_0}\,[mv^2 + 3K_0\,(T - T_0)] \qquad (39)$$

La différence des masses permet de confondre $m\ +\ m_0$ avec m_0 d'où

$$m\ \ v\ \frac{dv}{dt} + \frac{3}{2}\ K_0\ \frac{dT}{dt} + e\ \ \epsilon\ \ v = -\,\nu_1\ \frac{m}{m_0}\ [m\ \ v^2 + 3K_0\,(T\ -\ T_0)] \qquad (40)$$

On retrouve l'équation (12) de la méthode de Boltzmann. Ainsi les deux méthodes conduisent à des résultats identiques.

En outre la mécanique dissipative permet d'établir une inégalité contenant l'entropie du gaz d'électrons. Celle-ci est définie par la formule usuelle dans laquelle V_0 désigne le volume de l'enceinte.

$$S = -\,K_0\ V_0 \int [\log F\,]\ F\ \ \underline{dw} \qquad (41)$$

Multiplions l'équation (36) par $-\,K_0 \log F$ et intégrons sur l'espace des vitesses en utilisant les relations

$$\int\ [\log F\,]\ \frac{\partial F}{\partial t}\ \underline{dw} = \frac{\partial}{\partial t}\int\ [\log F\ -\ 1]\ F\ \ \underline{dw} = \frac{\partial}{\partial t}\int\ [\log F\,]F\ \ \underline{dw}\ -\ \frac{\partial n}{\partial t}$$

Or nous avons supposé que $\frac{\partial n}{\partial t}$ était nul. De même

$$\int [\log F] \frac{\partial F}{\partial w_1} \underline{dw} = - \int \frac{\partial F}{\partial w_1} \underline{dw} = 0 \tag{43}$$

En outre en intégrant par parties on a :

$$- K_0 V_0 \int [\log F] \frac{\partial}{\partial w_j} [w_j F + \frac{K_0 T_m}{m} \frac{\partial F}{\partial w_j}] \underline{dw} =$$

$$K_0 V_0 [\int w_j \frac{\partial F}{\partial w_j} \underline{dw} + \frac{K_0 T_m}{m} \int \frac{1}{F} (\frac{\partial F}{\partial w_j})^2 \underline{dw}] = \tag{44}$$

$$= K_0 V_0 [-3n + C^2] \tag{45}$$

En effet la seconde intégrale toujours positive, peut être désignée par C^2. On a donc

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -3n \ \nu K_0 V_0 + K_0 V_0 C^2. \tag{46}$$

d'où l'inégalité

$$\frac{\partial}{\partial t} [S + 3n \ \nu K_0 V_0 t] > 0 \tag{47}$$

Le gaz d'électrons n'est pas isolé puisque le champ électrique l'échauffe tandis que les collisions le refroidissent. Il existe néanmoins une inégalité fondamentale en régime transitoire. Cette inégalité concerne la somme de l'entropie et d'un terme contenant la densité électronique.

CONCLUSION

La mécanique dissipative permet de retrouver les résultats issus de l'équation de Boltzmann à partir de concepts nouveaux.

Je remercie Mlle SANTI pour d'utiles discussions.

Références

[1] M. Bayet, J.L. Delcroix, J.F. Denisse, J. Phys.Rad. 15-795 (1954).
[2] M. Bayet, J.L. Delcroix, J.F. Denisse, J. Phys.Rad. 16-274 (1955).
[3] M. Bayet, J.L. Delcroix, J.F. Denisse, J. Phys.Rad. 17-923 (1956).
[4] J.L. Delcroix, Physique des Plasmas, T2 Dunod (1966).
[5] E. Moreau, J. Salmon, J. Phys. Rad. 21-217 (1966).
[6] H. Marguenau, Phys. Rev. 69-508 (1946).
[7] J. Salmon, C.R.A.S. Paris 280. Série A-1559 (1975).
[8] Ann. Inst. Henri Poincaré, 27 n.1, 73 (1977).
[9] Ann. Inst. Henri Poincaré, 37 n.3, 271 (1982).
[10] C.I.S.M. Springer Verlag, Wien n.261 (1980).

(Manuscrit reçu le 20 juin 1986)