

Remarques sur le rôle des conditions initiales en mécanique statistique hors d'équilibre.

Raymond JANCEL

Laboratoire de physique théorique et mathématique
Université Paris VII et F.R. CNRS 177
2 pl. Jussieu, 75251 Paris cedex 05

1. Introduction

La formulation du statut de la Mécanique statistique hors d'équilibre (MSHE) rencontre des difficultés de principe bien connues, dont la plus fondamentale est celle qui est liée au problème de l'irréversibilité. Ce problème, en effet, met directement en cause les concepts de base de la théorie, puisqu'il a son origine dans la contradiction, au moins apparente, entre le comportement irréversible d'un système à l'échelle macroscopique, s'exprimant par des équations asymétriques par renversement du temps, et les lois dynamiques réversibles qui gouvernent son évolution au niveau microscopique. Pour cette raison, divers auteurs ont soutenu l'idée qu'aucune solution satisfaisante à ce problème ne pouvait être obtenue dans le cadre de la dynamique hamiltonienne déterministe.

Cette remise en cause de la dynamique hamiltonienne et de l'évolution liouvillienne correspondante a donné lieu à de très nombreux travaux que l'on peut diviser en deux groupes d'inspiration très différente. Dans l'un de ceux-ci, on considère la description hamiltonienne comme valable pour les systèmes *isolés* finis, mais on constate qu'elle doit être en fait abandonnée puisqu'aucun système physique réel ne se trouve parfaitement isolé ; de ce point de vue, tout système est un système *ouvert*, qui peut être conçu comme un sous-système d'un système déterministe plus grand : son évolution est donc nécessairement non-liouvillienne et peut être décrite, sous certaines conditions, par un sous-groupe dynamique markovien possédant les propriétés requises d'irréversibilité [1]. On peut aussi ranger dans ce groupe les importants travaux consacrés à l'étude des systèmes dynamiques déterministes à caractères fortement stochastiques (K-systèmes,...), qui sont à l'origine d'un renouvellement profond de nos concepts en théorie des systèmes [2] ; les

trajectoires de tels systèmes étant d'une extrême instabilité par rapport aux conditions initiales, l'irréversibilité ne provient pas dans ce cas d'un couplage du système avec l'extérieur, mais apparaît comme une conséquence de la "perte d'information", due à cette instabilité, sur l'état du système au cours de son mouvement [3-4]. Dans l'autre groupe de travaux mentionnés ci-dessus, la critique de la dynamique hamiltonienne est liée aux difficultés actuelles de la théorie quantique et de la microphysique, et a de ce fait des motivations plus profondes. Elle s'appuie sur l'idée que les principes fondamentaux de la microphysique devraient être recherchés, non pas dans l'étude des états stationnaires comme c'est le cas en mécanique quantique, mais dans la description des processus de transition (irréversibles) entre ces états, en vue de comprendre leur existence et leur stabilité ; or, une telle description ne peut se concevoir que dans le cadre d'une certaine dynamique irréversible, ce qui entraîne l'abandon du formalisme hamiltonien essentiellement adapté à l'étude des phénomènes stationnaires [5-6]. Ce point de vue, qui est celui de l'école de Louis de Broglie, conduit à introduire l'irréversibilité directement au niveau microscopique, soit comme le résultat de l'interaction des particules avec un milieu subquantique régi par une Thermodynamique cachée [7], soit comme la conséquence d'une mécanique héréditaire telle que celle développée par F. Fer et D. Fargue [8-9].

Sans méconnaître l'intérêt majeur de ces travaux, il nous paraît cependant utile, voire même constructif en vue de l'élaboration de nouveaux concepts, d'approfondir le problème de l'irréversibilité en restant dans le cadre habituel de la MSHE, et donc de rechercher comment peuvent être effectivement conciliées dans ce cadre les descriptions microscopique et macroscopique d'un système dynamique considéré comme isolé. Il faut souligner que l'adoption de ce point de vue suppose en fait que les deux propositions suivantes sont bien fondées : 1) il existe des systèmes et des situations physiques réels pour lesquels les notions de système isolé et d'évolution liouvillienne sont applicables, au moins à une très bonne approximation ; 2) puisque les deux descriptions microscopique et macroscopique d'un même système sont l'une et l'autre valables, chacune dans leur domaine propre, il doit être possible de prouver leur compatibilité de telle manière que les équations du niveau macroscopique puissent être rigoureusement déduites des équations dynamiques exactes du niveau microscopique.

Si, à notre point de vue, la première de ces assertions ne soulève pas de difficultés de principe insurmontables, au moins pour une large classe de

conditions expérimentales* , il n'en est pas de même pour la seconde qui met directement en cause les problèmes fondamentaux de la MSHE, et particulièrement celui de l'irréversibilité. Comme nous l'avons vu dans un article précédent [10], désigné dans la suite par *I*, une solution satisfaisante de ces problèmes passe par l'introduction des notions conjuguées de "niveau de description" et de changement d'échelle, ainsi que de description réduite autonome et de processus limite. Celles-ci sont dues, pour l'essentiel, aux travaux de pionnier de H. Grad concernant l'équation de Boltzmann [11] et le comportement qualitatif des systèmes à un grand nombre de degrés de liberté [12], et elles permettent de concevoir une méthode générale d'approche des problèmes de la MSHE [10,13], dont un bon exemple nous est fourni par la mise en oeuvre de la limite de Boltzmann-Grad dans la déduction de l'équation de Boltzmann. Le premier résultat rigoureux ainsi obtenu porte sur le comportement limite d'un fluide de N sphères dures : c'est le théorème de Lanford [13], qui constitue un progrès essentiel pour notre propos. D'une part, en effet, il nous montre qu'il est possible d'établir l'existence d'un régime cinétique, décrit par l'équation (irréversible) de Boltzmann, à partir du comportement limite des solutions (réversibles) de la hiérarchie B.B.G.K.Y., sans autre hypothèse que celle portant sur l'état statistique initial. D'autre part, il met également en lumière le rôle central joué par les conditions initiales dans la démonstration des propriétés de convergence et dans l'élimination des paradoxes liés à la réversibilité des équations du mouvement. Ce théorème répond ainsi, dans le cas particulier de la théorie cinétique, à l'une des exigences fondamentales de la MSHE : à savoir que, pour être compatibles avec les lois dynamiques, les hypothèses de nature statistique ne doivent porter que sur l'état initial du système (cf. *I*, 3.1.d). Les rôles respectifs de la dynamique et de la statistique en MSHE se trouvent de ce fait clairement distingués : une fois fixé son état statistique initial, le système évolue bien suivant des lois déterministes, mais c'est le choix de conditions initiales particulières qui permet à la fois d'obtenir une description réduite autonome et d'introduire l'élément d'irréversibilité nécessaire à la théorie.

La démonstration et l'interprétation de tels résultats fait appel à des raisonnements délicats que nous avons déjà largement développés dans *I*,

*A ce propos, voir par exemple dans [18] les intéressantes remarques de Lebowitz concernant l'isolation d'un système ; on peut aussi s'appuyer sur des arguments fondés sur le théorème d'Anosov concernant la stabilité structurelle des C -systèmes [2].

mais qu'il vaut la peine d'approfondir sur certains points, notamment pour ce qui concerne le problème de l'irréversibilité. C'est ce que nous nous proposons de faire dans cet article, où nous nous attacherons à mettre en évidence l'articulation des divers arguments et à montrer comment le choix de conditions initiales particulières permet le passage de modèles dynamiques réversibles à des équations irréversibles. La présente étude porte, pour l'essentiel, sur l'examen de ce problème dans le cadre de la description cinétique des fluides, où l'on suppose, conformément aux remarques générales de *I* (cf. 3.2b β), l'existence d'un régime cinétique dans lequel l'état du fluide et son évolution peuvent être décrits à l'aide de la seule fonction de distribution à une particule, $\rho_1(\mathbf{x}_1; t)$. Celle-ci doit satisfaire à une certaine équation cinétique généralement irréversible, telle que l'équation de Boltzmann pour les gaz dilués, dont les solutions définissent une description réduite autonome de l'état du fluide au niveau cinétique. Dans ce cas, notre problème fondamental revient à déterminer sous quelles conditions une telle équation cinétique irréversible peut être déduite des équations de la hiérarchie B.B.G.K.Y. qui résultent du formalisme général de la Mécanique statistique.

Dans le cas particulier de l'équation de Boltzmann où l'évolution est déterminée par les collisions binaires, on sait que ce résultat est obtenu formellement grâce à l'hypothèse du chaos moléculaire, qui consiste à postuler, à *chaque* instant t , l'absence de corrélations entre deux particules quelconques *sur le point* d'entrer en collision. Ainsi que nous l'avons souligné dans *I*, cette hypothèse présente deux particularités capitales pour notre propos. D'une part, elle introduit manifestement la distinction entre le passé et l'avenir, puisque l'indépendance statistique entre les particules concernées est postulée *avant* la collision et non après (auquel cas le signe du terme de collisions et le sens de l'évolution seraient inversés) ; il s'ensuit que l'hypothèse du chaos moléculaire n'est pas invariante par renversement du temps, comme l'ont déjà remarqué de nombreux auteurs [11, 14, 16], et qu'elle est de ce fait à l'origine de l'irréversibilité de l'équation de Boltzmann. D'autre part, comme elle doit être valable à tout instant t , cette hypothèse n'est pas compatible avec les lois dynamiques et l'équation de Liouville, au moins pour les systèmes finis (on remarquera, par exemple, que deux particules sont nécessairement corrélées *après* une collision, et que cette corrélation doit être prise en compte lorsqu'intervient une "recollision" due à l'effet des autres particules) ; on peut donc s'attendre à l'existence de contradictions entre le comportement irréversible du système au niveau cinétique et son évolution microscopique

réversible, contradictions qui sont illustrées par les paradoxes bien connus de Loschmidt et de Zermelo.

Pour concilier irréversibilité macroscopique et réversibilité dynamique dans le cadre de la description cinétique, on est ainsi amené à rechercher sous quelles conditions une hypothèse du type "chaos moléculaire" peut être rendue compatible avec les lois de l'évolution dynamique. Comme nous l'avons montré dans *I*, ceci n'est réalisable en toute rigueur que pour certains passages à la limite, comme la limite de Boltzmann-Grad, et conduit à la mise en oeuvre de théorèmes limites, dont l'une des conséquences essentielles est d'assurer la "propagation du chaos moléculaire", sauf sur un ensemble de trajectoires exceptionnelles dont la mesure dans l'espace des phases est évanescence à la limite considérée. Depuis une dizaine d'années, plusieurs théorèmes de ce type ont été démontrés, dont le théorème de Lanford, qui peuvent être considérés comme les premiers résultats rigoureux de la MSHE. En effet, pour tous les systèmes auxquels une telle démarche s'applique, et à condition que soit *postulé* le chaos moléculaire à un certain *instant initial*, on est alors en mesure de prouver l'existence d'un régime cinétique et de déduire de la hiérarchie B.B.G.K.Y. l'équation cinétique correspondante, qui devient de ce fait compatible, à la limite considérée, avec l'évolution dynamique sous-jacente.

Mais, s'il est ainsi possible de concilier les descriptions de l'état du système aux niveaux cinétique et microscopique, il reste cependant à comprendre comment les solutions des équations réversibles de la hiérarchie B.B.G.K.Y. peuvent tendre vers les solutions d'équations irréversibles, comme celle de la hiérarchie de Boltzmann par exemple. La possibilité de lever cette apparente contradiction tient, comme l'on peut s'y attendre, à ce que les conclusions des théorèmes limites en question ne sont valables que pour certaines classes de conditions initiales. Celles-ci doivent être en fait choisies de telle manière qu'une certaine dissymétrie se trouve introduite dans l'évolution temporelle du système ; c'est ce que nous avons déjà remarqué dans *I* à propos du théorème de Lanford, où cette dissymétrie temporelle résulte de la différence entre les modes de convergence à l'instant initial et à un instant t postérieur. Le fait important sur lequel nous nous proposons d'insister dans cet article, est que cette dissymétrie peut être introduite d'une manière plus systématique, grâce à la définition de conditions initiales *asymétriques* par renversement du temps, qui permettent en particulier d'affiner l'énoncé initial du théorème de Lanford. Comme dans le cas de l'hypothèse du chaos

moléculaire, on retrouve ainsi la nécessité de faire intervenir explicitement la distinction entre le passé et l'avenir dans l'évolution dynamique afin d'obtenir l'irréversibilité macroscopique. De ce point de vue, la démonstration de théorèmes limites nous permet seulement de ramener le problème d'un instant t quelconque à un certain instant initial où l'on doit postuler l'existence de corrélations singulières par rapport au renversement du temps. Il est clair cependant qu'un tel résultat constitue en lui-même un progrès important, puisque le choix de conditions initiales particulières est évidemment indépendant des équations du mouvement, et que les propriétés ainsi postulées à l'instant initial sont conservées au cours de l'évolution ultérieure, à la limite considérée. Nous verrons également que ces résultats sont en complet accord avec les conclusions de O. Penrose concernant la définition des ensembles statistiques hors d'équilibre, d'après lesquelles les états statistiques physiquement possibles sont en général asymétriques par renversement du temps en vertu de l'application du principe de causalité [14].

C'est le thème central développé dans ce mémoire qui constitue ainsi un complément naturel de I , où le rôle des conditions initiales dans le problème de l'irréversibilité n'avait été que brièvement évoqué. La plus grande partie de ce travail est consacrée à l'examen de ces problèmes dans le cadre de la description cinétique et de la limite de Boltzmann-Grad : c'est l'objet de la section 2, dont l'argumentation s'appuie essentiellement sur quelques exposés récents consacrés à diverses implications du théorème de Lanford [17,18]. Les problèmes posés par l'extension de cette démarche au cas de fluides plus denses sont ensuite examinés dans la section 3, où nous montrons comment l'introduction de la notion de limite hydrodynamique permet de concevoir une théorie rigoureuse des phénomènes de transport suivant les idées développées par J.L. Lebowitz et H. Spohn [19,20].

En conclusion de ces analyses, on voit que la formulation du statut de la MSHE conduit à poser deux questions fondamentales bien distinctes : (A) Pour quelles classes d'ensembles statistiques initiaux est-il possible de *déduire*, à partir de la description microscopique, les équations bien connues qui gouvernent l'évolution macroscopique irréversible (équation de Boltzmann, de la diffusion, ...)? (B) Pour quelle(s) raison(s) ces "bonnes" conditions initiales sont-elles toujours pratiquement réalisées dans la nature, où l'irréversibilité apparaît comme une propriété universelle des phénomènes de transport? Il est clair que les arguments développés dans les sections 2 et 3 apportent des éléments de réponse à la question (A). La question (B), par

contre, soulève des problèmes de fond qui restent largement ouverts, et dont nous évoquerons brièvement quelques aspects dans la section 4.

2. Irréversibilité et théorème de Lanford

Cette section est consacrée à l'examen du problème de l'irréversibilité dans le cadre du théorème de Lanford, qui porte sur la limite de Boltzmann-Grad associée à la description cinétique des gaz dilués. Pour ce faire, nous commencerons par rappeler les étapes de la démonstration de ce théorème, en montrant comment s'articulent les arguments qui conduisent à la déduction rigoureuse de l'équation de Boltzmann, et par quel procédé l'irréversibilité se trouve ainsi introduite dans les équations. Nous verrons ensuite que la définition de conditions initiales asymétriques par rapport au temps permet d'améliorer sensiblement le premier énoncé du théorème en faisant porter les conditions de convergence sur des ensembles qui deviennent de plus en plus petits lorsque t augmente. Pour conclure cette section, nous reviendrons sur l'interprétation de l'irréversibilité au niveau cinétique, en analysant comment des conditions initiales de ce type se comportent par rapport au renversement des vitesses, et en montrant notamment qu'elles satisfont au "principe de causalité" tel qu'il est énoncé par Penrose [4].

2.1. Hiérarchie B.B.G.K.Y. pour le modèle des sphères dures.

Conformément à l'argument initial de Lanford [13], nous nous plaçons toujours dans cette section dans le cas où les interactions entre les particules du fluide peuvent être décrites par le modèle dit des "sphères dures". Nous considérons donc un système de N sphères dures de diamètre σ et de masse m , contenues dans une enceinte bornée Λ , et interagissant entre elles et avec la paroi $\partial\Lambda$ par des collisions parfaitement élastiques. Comme nous l'avons vu dans I (auquel nous renvoyons pour toutes les notations et définitions), l'état statistique d'un tel système est décrit par l'ensemble des fonctions de distribution réduites (ou fonctions de corrélation) $\rho_S^{(g)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_S)$, ($1 \leq S \leq N$), qui sont associées à une densité de probabilité absolument continue $\rho_N^{(g)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$ définie sur l'espace des phases $\Gamma_N^{(g)}$ du système (rappelons que $\mathbf{x}_i = (\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i) \in \Lambda \times \mathbf{R}^3$ représente ici la position du centre et l'impulsion de la sphère (i)). Dans le cas du modèle des sphères dures, $\Gamma_N^{(g)}$ est obtenu en excluant tout d'abord, de l'espace des phases habituel $\Gamma_N = (\Lambda \times \mathbf{R}^3)^N$, tous les points qui sont inaccessibles en raison de l'impénétrabilité des particules, c'est-à-dire tels que $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| < \sigma$ avec $i \neq j$, ou $\text{dist}(\mathbf{r}_i, \partial\Lambda) < \sigma/2$. Il doit en

autre être défini de telle manière que le formalisme de l'équation de Liouville et de la hiérarchie B.B.G.K.Y., valable pour une évolution continue, puisse être appliqué à ce modèle caractérisé par une évolution manifestement discontinue. Pour ce faire, on remarque que, pour toute collision supposée instantanée, il correspond à chacune des paires de particules concernées, deux points distincts de l'espace des phases ordinaire, qui sont associés respectivement aux impulsions avant et après la collision. Dans $\Gamma_N^{(\sigma)}$, on est conduit à identifier ces deux points de phase et à les considérer comme étant un seul et même point de ce nouvel espace des phases. Avec cette définition, et à condition de négliger les points de phase correspondant aux collisions "rasantes" et aux collisions triples ou d'ordre supérieur, on est alors en mesure de montrer, au terme d'une analyse non triviale (voir notamment Cercignani [21] et Alexander [22]), que l'évolution de ce système de N sphères dures peut être décrite par une équation de Liouville dans $\Gamma_N^{(\sigma)}$, et donc par les équations de la hiérarchie B.B.G.K.Y. qui s'en déduisent par le procédé habituel; on aboutit ainsi au système d'équations (I. 3.31) auxquelles doivent satisfaire les fonctions de corrélation $\tilde{\rho}_S^{(\sigma)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_S; t)$.

Pour ce que nous avons ici en vue, il convient d'écrire ces équations sous une forme qui se prête à l'étude du passage à la limite de Boltzmann-Grad, pour lequel $N \rightarrow \infty$ et $\sigma \rightarrow 0$, de telle manière que $N\sigma^2 = \text{cte.}$ (notons que cette constante, qui est proportionnelle à l'inverse du l.p.m., sera prise égale à 1 dans ce qui suit). Comme nous l'avons montré dans I (cf. § 4.1), on y parvient en procédant à un changement d'échelle des fonctions $\tilde{\rho}_S^{(\sigma)}$ et en introduisant de nouvelles fonctions de corrélation $f_S^{(\sigma)}$ définies par :

$$f_S^{(\sigma)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_S; t) = N^{-S} \tilde{\rho}_S^{(\sigma)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_S; t) = \sigma^{2S} \tilde{\rho}_S^{(\sigma)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_S; t) \quad (2.1)$$

(compte tenu de la relation $N\sigma^2 = 1$). Avec ces fonctions changées d'échelle, les équations de la hiérarchie B.B.G.K.Y. pour le modèle des sphères dures s'écrivent finalement (cf. (I. 3.31) et (I. 4.9)) :

$$\frac{\partial f_S^{(\sigma)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_S; t)}{\partial t} = L_S^{(\sigma)} f_S^{(\sigma)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_S; t) \quad (2.2)$$

$$+ C_{S, S+1}^{(\sigma)} f_{S+1}^{(\sigma)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{S+1}; t),$$

où $L_S^{(\sigma)}$ est l'opérateur de Liouville à S particules (incluant l'effet des collisions élastiques de ces sphères entre elles et avec la paroi $\partial\Lambda$) et où l'opérateur de collisions $C_{S, S+1}^{(\sigma)}$ est défini par :

$$C_{S, S+1}^{(\sigma)} f_{S+1}^{(\sigma)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{S+1}; t) \equiv (C_{S, S+1}^{(\sigma)} f_{S+1}^{(\sigma)})(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_S; t) \quad (2.3)$$

$$= (N\sigma^2) \sum_{i=1}^S \int_{S^2 \times R^3} d\mathbf{p}_{S+1} d\hat{\omega} \hat{\omega} \cdot \left(\frac{\mathbf{p}_{S+1} - \mathbf{p}_i}{m} \right)$$

$$f_{S+1}^{(\sigma)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_S; \mathbf{r}_i + \sigma \hat{\omega}, \mathbf{p}_{S+1}; t);$$

dans le second membre de (2.3), $\hat{\omega}$ est un vecteur-unité dans R^3 , porté par la ligne des centres des deux sphères (i) et ($S+1$) à l'instant de leur collision et dirigé de i vers ($S+1$), et $d\hat{\omega}$ est l'élément d'aire de la sphère unité S^2 .

Il est commode de mettre ces équations sous une forme compacte, en considérant la suite des fonctions de corrélation $\{f_S^{(\sigma)}(\dots; t)\}$, ($1 \leq S \leq N$), comme définissant un vecteur $\mathbf{f}^{(\sigma)}(\dots; t)$; avec cette notation, le système d'équations (2.2) s'écrit encore :

$$\frac{\partial \mathbf{f}^{(\sigma)}(\dots; t)}{\partial t} = L^{(\sigma)} \mathbf{f}^{(\sigma)}(\dots; t) + C^{(\sigma)} \mathbf{f}^{(\sigma)}(\dots; t), \quad (2.4)$$

où $L^{(\sigma)}$ est une matrice diagonale d'éléments $L_S^{(\sigma)} \delta_{SS'}$, et $C^{(\sigma)}$ une matrice constituée d'éléments égaux à $C_{S, S+1}^{(\sigma)}$ ou 0.

En conclusion, l'évolution temporelle de l'état statistique $\mathbf{f}^{(\sigma)}(\dots; t)$ d'un système de N sphères de diamètre σ , contenues dans l'enceinte Λ , est ainsi complètement déterminée, à partir de l'état statistique initial $\mathbf{f}^{(\sigma)}(\dots; 0)$, par les solutions du système (2.4) qui peuvent s'écrire formellement :

$$\mathbf{f}^{(\sigma)}(\dots; t) = V_i^\sigma \mathbf{f}^{(\sigma)}(\dots; 0). \quad (2.5)$$

Il est important, pour notre propos, de rappeler que cette évolution est réversible au sens défini dans I, c'est-à-dire que si $\mathbf{f}^{(\sigma)}(\{\mathbf{r}_i\}, \{\mathbf{p}_i\}; t)$ est solution de (2.4), il en est de même pour $\mathbf{f}^{(\sigma)}(\{\mathbf{r}_i\}, -\{\mathbf{p}_i\}; -t)$. Ceci peut être encore précisé en introduisant l'opérateur R_p de renversement des impulsions, défini par :

$$(R_p \mathbf{f}^{(\sigma)}(\{\mathbf{r}_i\}, \{\mathbf{p}_i\}))_S = f_S^{(\sigma)}(\{\mathbf{r}_i\}, -\{\mathbf{p}_i\}), \text{ avec } R_p^2 = 1. \quad (2.6)$$

Il résulte alors de la propriété dite d'invariance des équations du mouvement par renversement du temps que V_i^σ et R_p satisfont à la relation opératoirelle $R_p V_i^\sigma = V_{-i}^\sigma R_p$, d'où l'on tire sans peine :

$$V_i^\sigma (R_p V_i^\sigma f^{(\sigma)} (\dots; 0)) = R_p f^{(\sigma)} (\dots; 0), \quad (2.7)$$

soit encore

$$R_p V_i^\sigma R_p f^{(\sigma)} (\dots; 0) = V_i^\sigma f^{(\sigma)} (\dots; 0), \quad (2.7')$$

dont l'interprétation est évidente ; par exemple, l'équation (2.7) signifie que, si l'on renverse toutes les impulsions à l'instant t et si on laisse ensuite évoluer le système sur un autre intervalle de temps t , on retrouve l'état initial $f^{(\sigma)} (\dots; 0)$, mais avec les impulsions changées de signe.

L'évolution déterministe d'un tel système étant ainsi bien définie, il nous faut maintenant analyser comment le passage à la limite de Boltzmann-Grad $\sigma \rightarrow 0$ permet d'établir rigoureusement la validité d'une description réduite autonome de l'état du système au niveau cinétique, dans laquelle l'évolution est irréversible et décrite par l'équation de Boltzmann. La démarche suivie comporte essentiellement trois étapes : a) le passage formel, à la limite de Boltzmann-Grad, de la hiérarchie B.B.G.K.Y. à la hiérarchie de Boltzmann ; b) la démonstration du théorème de Lanford proprement dit, qui permet de déterminer sous quelles conditions les solutions de la hiérarchie B.B.G.K.Y. convergent effectivement vers celles de la hiérarchie de Boltzmann ; c) la déduction de l'équation de Boltzmann comme conséquence de la propriété de "propagation" du chaos moléculaire.

2.2 Hiérarchie de Boltzmann pour le modèle des sphères dures [17,18,21].

On la déduit des équations de la hiérarchie B.B.G.K.Y. en effectuant le passage à la limite $\sigma \rightarrow 0$ ($N \sigma^2 = 1$). Pour ce faire, il convient au préalable de mettre le terme de collisions (2.3) sous la forme habituelle d'un "bilan des gains et pertes", en remarquant que l'intégrale sur S^2 peut se décomposer en deux parties, l'une prise sur la demi-sphère S^- , définie par $\hat{\omega} \cdot (\mathbf{p}_{S+1} - \mathbf{p}_i) > 0$ (cas où les deux particules se séparent après une collision avec les impulsions \mathbf{p}_i et \mathbf{p}_{S+1}), l'autre prise sur la demi-sphère S^+ , définie par $\hat{\omega} \cdot (\mathbf{p}_{S+1} - \mathbf{p}_i) < 0$ (cas où les deux particules entrent en collision avec les impulsions \mathbf{p}_i et \mathbf{p}_{S+1}). En utilisant les relations (I. 3.37) qui définissent le processus collisionnel au moyen de l'opérateur $T_{\hat{\omega}}$, on peut exprimer ces deux intégrales soit en fonction des impulsions avant les collisions (\mathbf{p}_i), soit en fonction de celles après les collisions (\mathbf{p}_i') ; ces deux méthodes conduisent naturellement à des résultats équivalents en vertu de la réversibilité des équations du mouvement, la

première convenant au cas où l'on veut décrire l'état futur à partir du passé, la seconde s'appliquant au cas contraire.

Considérons d'abord le cas des t croissants où l'évolution temporelle de $f^{(\sigma)} (\dots; t)$ est déterminée par le mouvement rétrograde (dans le sens des t décroissants) dans l'espace des phases. On est alors conduit à remplacer dans l'intégrale sur S^- le point de phase $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i, \dots, \mathbf{x}_S, \mathbf{r}_i + \sigma \hat{\omega}, \mathbf{p}_{S+1})$, correspondant à la situation où les deux particules (i) et ($S+1$) se séparent avec les impulsions \mathbf{p}_i , \mathbf{p}_{S+1} , par le point de phase $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i', \dots, \mathbf{x}_S, \mathbf{r}_i + \sigma \hat{\omega}, \mathbf{p}_{S+1}')$, correspondant à la situation inverse où ces deux particules entrent en collision avec les impulsions \mathbf{p}_i' , \mathbf{p}_{S+1}' , (et se séparent ensuite avec les impulsions \mathbf{p}_i , \mathbf{p}_{S+1}) ; remarquons d'ailleurs que, d'après la définition de $\Gamma_N^{(\sigma)}$ ces deux points doivent être en fait considérés comme deux représentations équivalentes du même point de phase. En changeant encore $\hat{\omega}$ en $-\hat{\omega}$ l'intégrale sur S^- est remplacée par une intégrale sur S^+ et le terme de collisions (2.3) s'écrit alors :

$$C_{S,S+1}^{(\sigma)} f_{S+1}^{(\sigma)} (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{S+1}; t) = (N \sigma^2) \int_{S^+ \times R^3} d\mathbf{p}_{S+1} d\hat{\omega} \hat{\omega} \cdot \frac{(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{S+1})}{m} \quad (2.3')$$

$$\times \left[f_{S+1}^{(\sigma)} (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i', \dots, \mathbf{x}_S, \mathbf{r}_i - \sigma \hat{\omega}, \mathbf{p}_{S+1}'; t) - f_{S+1}^{(\sigma)} (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i, \dots, \mathbf{x}_S, \mathbf{r}_i + \sigma \hat{\omega}, \mathbf{p}_{S+1}; t) \right].$$

Ceci étant, on obtient la hiérarchie de Boltzmann en faisant tendre formellement σ vers zéro dans les équations (2.2) - (2.3'). En procédant ainsi, on est conduit à introduire les fonctions de distribution limites $f_S^{(0)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_S; t)$ définies formellement par $f_S^{(0)} = \lim_{\sigma \rightarrow 0} f_S^{(\sigma)}$, qui satisfont au système d'équations correspondant à la forme limite de (2.2), soit

$$\frac{\partial f_S^{(0)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_S; t)}{\partial t} = L_S^{(0)} f_S^{(0)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_S; t) \quad (2.8)$$

$$+ C_{S,S+1}^{(0)} f_{S+1}^{(0)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{S+1}; t),$$

où

$$L_S^{(0)} = \sum_{i=1}^S \frac{\mathbf{p}_i}{m_i} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} \quad (2.9)$$

est l'opérateur de Liouville correspondant au mouvement libre des S sphères dures et incluant implicitement les réflexions sur la paroi $\partial\Lambda$, et où le terme de collisions $C_{S,S+1}^{(0)}$ $f_{S+1}^{(0)}$ s'écrit, en vertu de (2.3'),

$$C_{S,S+1}^{(0)} f_{S+1}^{(0)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{S+1}; t) = \sum_{i=1}^S \int_{S^+ \times R^3} d\mathbf{p}_{S+1} d\hat{\omega} \hat{\omega} \cdot \frac{(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{S+1})}{m} \quad (2.10)$$

$$\times \left[f_{S+1}^{(0)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i', \dots, \mathbf{x}_S, \mathbf{r}_i, \mathbf{p}_{S+1}'; t) \right. \\ \left. - f_{S+1}^{(0)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i, \dots, \mathbf{x}_S, \mathbf{r}_i, \mathbf{p}_{S+1}; t) \right].$$

Notons que les fonctions limites $f_s^{(0)}$ sont maintenant définies sur l'espace des phases $\Gamma_s^{(0)}$ ($= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \Gamma_s^{(\sigma)}$) qui est équivalent à l'espace des phases habituel $(\Lambda \times R^3)^S$, sous réserve de l'identification des points de phase correspondant à des situations "avant" et "après" une collision; il est clair en effet que les conditions $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| \geq \sigma$ et $\text{dist}(\mathbf{r}_i, \partial\Lambda) \geq \sigma/2$, qui caractérisent $\Gamma_s^{(\sigma)}$, sont automatiquement satisfaites lorsque $\sigma \rightarrow 0$.

Considérons maintenant le cas des t décroissants où l'évolution temporelle de $\mathbf{f}^{(\sigma)}(\dots; t)$ est déterminée par le mouvement direct (dans le sens des t croissants) dans l'espace des phases. On est dans ce cas amené à remplacer dans l'intégrale sur S^+ le point de phase $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i, \dots, \mathbf{x}_S, \mathbf{r}_i, \mathbf{p}_{S+1} + \sigma \hat{\omega}, \mathbf{p}_{S+1})$ correspondant à la situation où les deux particules (i) et ($S+1$) entrent en collision avec les impulsions $\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{S+1}$ par le point de phase $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i', \dots, \mathbf{x}_S, \mathbf{r}_i, \mathbf{p}_{S+1}')$ correspondant à la situation où ces deux particules se séparent avec les impulsions $\mathbf{p}_i', \mathbf{p}_{S+1}'$. En changeant d'autre part $\hat{\omega}$ en $-\hat{\omega}$ dans l'intégrale sur S^- , on obtient une seconde expression du terme de collisions (2.3) qui est de la même forme que (2.3'), mais avec le crochet de l'intégrale remplacé par

$$\left[f_{S+1}^{(\sigma)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i, \dots, \mathbf{x}_S, \mathbf{r}_i, -\sigma \hat{\omega}, \mathbf{p}_{S+1}; t) \right. \\ \left. - f_{S+1}^{(\sigma)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i', \dots, \mathbf{x}_S, \mathbf{r}_i, +\sigma \hat{\omega}, \mathbf{p}_{S+1}'; t) \right].$$

Bien que cette nouvelle expression soit équivalente à (2.3') pour $\sigma \neq 0$, on constate sans peine que sa limite formelle pour $\sigma \rightarrow 0$ est le terme (2.10) changé de signe; il s'ensuit que, pour les t décroissants, fonctions de distribution $f_s^{(0)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_S; t)$ satisfont aux équations (2.8), mais avec un terme de collisions égal à $-C_{S,S+1}^{(0)} f_{S+1}^{(0)}$.

La hiérarchie de Boltzmann est ainsi définie par le système d'équations (2.8) pour les t croissants, et par le même système avec le terme de collisions changé de signe pour les t décroissants. Avec des notations équivalentes à celles de (2.4)-(2.5), elle s'écrit sous la forme compacte:

$$\frac{\partial \mathbf{f}^{(0)}(\dots; t)}{\partial t} = L^{(0)} \mathbf{f}^{(0)}(\dots; t) + C^{(0)} \mathbf{f}^{(0)}(\dots; t), \quad (2.11)$$

et ses solutions sont définies formellement par:

$$\mathbf{f}^{(0)}(\dots; t) = V_t^{(0)} \mathbf{f}^{(0)}(\dots; 0). \quad (2.11')$$

Mais il faut souligner que, contrairement à (2.4), le système d'équations (2.11) est irréversible, puisque le changement de t en $-t$ conduit à changer le signe du terme de collisions. Il est important aussi de remarquer que, d'après l'analyse précédente, l'irréversibilité de la hiérarchie de Boltzmann n'est pas due à une hypothèse de nature statistique, mais qu'elle résulte seulement du passage formel à la limite de Boltzmann-Grad $\sigma \rightarrow 0$.

2.3. Conditions de validité du théorème de Lanford [13]

Soient maintenant $\mathbf{f}^{(\sigma)}(\dots; t) = V_t^{(\sigma)} \mathbf{f}^{(\sigma)}(\dots; 0)$ et $\mathbf{f}^{(0)}(\dots; t) = V_t^{(0)} \mathbf{f}^{(0)}(\dots; 0)$, les solutions respectives de (2.4) et de (2.11) telles qu'elles sont définies dans I au moyen des séries de perturbation dépendant du temps (Dyson) (I. 4.12) et (I. 4.13). Si les fonctions de distribution initiales sont telles que $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \mathbf{f}^{(\sigma)}(\dots; 0) = \mathbf{f}^{(0)}(\dots; 0)$, on cherche alors à établir sous quelles conditions $\mathbf{f}^{(\sigma)}(\dots; t)$ converge effectivement vers $\mathbf{f}^{(0)}(\dots; t)$; comme nous l'avons vu dans I , les deux conditions suivantes sont nécessaires:

La première a pour but d'assurer la convergence uniforme en σ , sur un intervalle de temps $|t| \leq t_0$, des séries de perturbation qui définissent les solutions $\mathbf{f}^{(\sigma)}(\dots; t)$ de (2.4); on y parvient en imposant aux fonctions de distribution initiales $f_s^{(\sigma)}(\dots; 0)$ d'être uniformément bornées en σ . Si l'on utilise les distributions maxwelliennes normalisées $\phi_\beta(\mathbf{p}_i)$ à la température $1/k\beta$ (cf. (I. 4.15)), on obtient une définition convenable de la borne supérieure des $f_s^{(\sigma)}(\dots; 0)$ en posant la condition:

(C₁). Il existe une paire de nombre $z, \beta > 0$ et une constante positive M , indépendante de σ et de s , tels que l'on a sur $(\Lambda \times R^3)^S$:

$$|f_s^{(\sigma)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_S)| \leq M z^S \prod_{i=1}^S \phi_\beta(\mathbf{p}_i),$$

pour tout $\sigma < \sigma_0$.

L'objet de la seconde condition, essentielle pour notre propos, est de déterminer le mode de convergence des fonctions de distribution initiales $f_s^{(\sigma)}(\dots, 0)$ vers les $f_s^{(0)}(\dots, 0)$, de telle manière que soit assurée la convergence terme à terme des séries de perturbation (I. 4.12) définissant les $f_s^{(\sigma)}(\dots, t)$, vers les séries (I. 4.13) définissant les $f_s^{(0)}(\dots, t)$. Pour formuler cette condition, on est conduit à considérer les restrictions de l'espace des phases à S particules $\Gamma_s^{(0)}$ à des ensembles de points de phase qui ne donnent lieu à aucune collision binaire. Dans la première démonstration de Lanford que nous suivons dans cette section, on exclut de $\Gamma_s^{(0)}$ tous les points de phase associés à des collisions binaires à l'instant initial $t = 0$. On définit ainsi l'ensemble

$$\Gamma_s^{(0)}(0) = \{(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_S) \in (\Lambda \times R^3)^S \mid \{r_i \neq r_j\}\}, \quad (2.12)$$

comme la restriction de l'espace des phases $\Gamma_s^{(0)}$ à l'ensemble des points de phase pour lesquels aucune paire de particules ne se trouvent, à l'instant initial $t = 0$, au même point de l'espace physique*. Soulignons que, par sa définition même, $\Gamma_s^{(0)}(0)$ ne diffère de $\Gamma_s^{(0)}$ que par un ensemble de mesure de Lebesgue nulle, (puisque les points exclus sont définis par une condition de coïncidence qui n'est vérifiée que sur certaines hypersurfaces de $\Gamma_s^{(0)}$).

Ceci étant, le mode de convergence auquel doivent satisfaire les fonctions de distribution initiales $f_s^{(\sigma)}(\dots, 0)$ est défini par la condition :

(C₂). Il existe une fonction continue $f_s^{(0)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_S)$ sur $\Gamma_s^{(0)}$, telle que l'on a uniformément, sur tous les ensembles compacts de $\Gamma_s^{(0)}$,

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} f_s^{(\sigma)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_S; 0) = f_s^{(0)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_S).$$

Comme nous l'avons montré dans I, les deux conditions précédentes permettent d'établir le

Théorème 1. (Lanford [13]) : Soit $\tilde{\rho}_s^{(\sigma)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_S)$, ($S \geq 0$), une suite (indexée par σ) de fonctions de distribution représentant l'état statistique d'un fluide de N sphères dures de diamètre σ contenues dans un volume Λ (avec $N\sigma^2 = 1$), et soit $f_s^{(\sigma)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_S)$ la suite correspondante de fonctions changées d'échelle satisfaisant aux conditions C_1 et C_2 . Si $f_s^{(\sigma)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_S; t)$ est

*Il convient de signaler que la notation utilisée ici diffère de celle de I, où l'ensemble $\Gamma_s^{(0)}(0)$ est en fait désigné par $\Gamma_s^{(0)}$.

la solution de la hiérarchie B.B.G.K.Y. (2.4) pour la condition initiale $f_s^{(\sigma)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_S)$, et si $f_s^{(0)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_S; t)$ est celle de la hiérarchie de Boltzmann (2.11) pour la condition initiale $f_s^{(0)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_S)$, il existe alors un temps $t_0(z, \beta) > 0$, (défini par (I. 4.20)), tel que, pour $0 \leq t \leq t_0(z, \beta)$ et pour tout $S \geq 0$, les séries (I. 4.12) et (I. 4.13) convergent, et les $f_s^{(\sigma)}(\dots, t)$ admettent une borne du type C_1 avec $z' > z$ et $\beta' < \beta$. On a en outre, pour les $f_s^{(\sigma)}(\dots, t)$ et $f_s^{(0)}(\dots, t)$ ainsi définies :

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} f_s^{(\sigma)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_S; t) = f_s^{(0)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_S; t), \quad (2.13)$$

presque partout sur $\Gamma_s^{(0)}$.

De plus, le théorème s'applique également dans le cas où $t \leq 0$, puisque les séries (I. 4.12) convergent pour $-t_0(z, \beta) \leq t \leq 0$. Il s'ensuit que la propriété de convergence (2.13) vaut aussi pour ce cas, à condition que les termes de collisions de la hiérarchie de Boltzmann (2.8) soient changés de signe.

La signification de ce résultat a été analysée en détail dans I ; pour notre propos, il convient seulement d'insister sur les deux remarques suivantes :

(i) Le théorème précédent permet d'établir sous quelles conditions les solutions de la hiérarchie B.B.G.K.Y. pour un système de sphères dures, de caractère réversible, tendent à la limite de Boltzmann-Grad vers les solutions de la hiérarchie de Boltzmann, de caractère irréversible. On constate ainsi, une fois de plus, que l'irréversibilité de la solution limite résulte du passage à la limite $\sigma \rightarrow 0$ et non d'une quelconque hypothèse de nature statistique.

(ii) La réversibilité dynamique et l'irréversibilité de l'évolution limite sont rendues compatibles dans ce théorème grâce à la différence entre les modes de convergence à l'instant initial et à l'instant t . On impose en effet une condition de convergence plus forte à l'instant initial que celle obtenue à l'instant t , puisque les fonctions de distribution initiales doivent satisfaire, d'après (C₂), à une condition de convergence uniforme sur $\Gamma_s^{(0)}(0)$, alors que la propriété (2.13) à l'instant t est seulement valable presque partout sur $\Gamma_s^{(0)}$. Il existe donc un ensemble de points de phase "exceptionnels" dans $\Gamma_s^{(0)}$, dont la mesure devient rigoureusement nulle à la limite $\sigma \rightarrow 0$, pour lesquels le théorème de Lanford ne s'applique pas; cet ensemble est en fait défini par les hypersurfaces associées aux collisions qui se sont produites sur l'intervalle $(0; -t)$ précédant l'instant initial, et qui créent des corrélations ne satisfaisant pas à une condition du type (C₂). Il s'ensuit que les $f_s^{(\sigma)}(\dots, t)$ ne peuvent

pas être choisies comme nouvelles conditions initiales ; il en est ainsi également pour les fonctions de distribution obtenues par renversement de toutes les impulsions à l'instant t , ce qui permet d'éviter les contradictions liées à la réversibilité du modèle dynamique. Nous reviendrons sur ce point plus en détail, après avoir introduit des conditions initiales asymétriques par rapport au temps.

2.4 La "propagation du chaos moléculaire" et l'équation de Boltzmann

Il reste maintenant à montrer sous quelle condition supplémentaire le théorème précédent permet d'établir l'existence d'un régime cinétique, dans lequel l'évolution est décrite par l'équation de Boltzmann. Cette condition résulte directement d'une propriété importante de la hiérarchie de Boltzmann, connue communément sous le nom de "propagation du chaos moléculaire", qui s'énonce comme suit [17,23] :

Propriété 1. Si les fonctions de distribution initiales $f_s^{(0)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s)$ de la hiérarchie de Boltzmann (2.11) satisfont à la condition de factorisation :

$$f_s^{(0)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s) = \prod_{i=1}^s f_1^{(0)}(\mathbf{x}_i), \quad (2.14)$$

alors les solutions correspondantes de (2.11) restent factorisées au cours du temps, de telle sorte que :

$$f_s^{(0)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s; t) = \prod_{i=1}^s f_1^{(0)}(\mathbf{x}_i; t), \quad (2.15)$$

où $f_1^{(0)}(\mathbf{x}; t)$ est la solution de l'équation de Boltzmann non linéaire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t)}{\partial t} = & - \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} f_1^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t) \\ & + \int_{S^+ \times R^3} d\mathbf{p}_1 d\omega d\omega' \frac{(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)}{m} \left[f_1^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}' ; t) f_1^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}_1' ; t) \right. \\ & \left. - f_1^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t) f_1^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}_1; t) \right] \end{aligned} \quad (2.16)$$

avec la condition initiale $f_1^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$.

De cette propriété résulte immédiatement l'important corollaire suivant:

Corollaire 1. Si les conditions du théorème de Lanford sont remplies et si, de plus, la fonction continue $f_s^{(0)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s)$ introduite dans (C_2) satisfait à la condition de factorisation (2.14), les conclusions du théorème 1 s'appliquent et l'on a presque partout sur $\Gamma_s^{(0)}$, pour $0 \leq t \leq t_0(z, \beta)$,

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} f_s^{(0)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s; t) = \prod_{i=1}^s f_1^{(0)}(\mathbf{x}_i; t), \quad (2.17)$$

où $f_1^{(0)}(\mathbf{x}; t)$ est la solution de l'équation de Boltzmann (2.16) avec la condition initiale $f_1^{(0)}(\mathbf{x}_1)$.

En d'autres termes, ce résultat permet d'établir rigoureusement, pour un fluide de sphères dures, l'existence à la limite de Boltzmann-Grad d'un régime cinétique décrit par l'équation de Boltzmann (2.16), si les fonctions de distribution initiales satisfont à la condition de convergence (C_2) et à la condition de chaos moléculaire (2.14). Ainsi se trouvent clairement précisés les rôles respectifs de la limite de Boltzmann-Grad et de la propriété de chaos moléculaire : c'est le passage à la limite $\sigma \rightarrow 0$ qui permet d'aboutir à une évolution limite irréversible décrite par la hiérarchie de Boltzmann, alors que c'est la propriété de chaos moléculaire qui rend possible la réduction de la description de l'état du système au seul niveau cinétique. Rappelons que cette réduction de la description résulte, comme nous l'avons vu dans I (cf. § 4.4), de l'équivalence entre la propriété de factorisation (2.14) et celle d'absence de fluctuations pour la classe des grandeurs intensives du type "sommatoire" ; en effet, comme ces fluctuations restent nulles au cours de l'évolution, en vertu de la propriété 1 (ou "propagation du chaos moléculaire") de la hiérarchie de Boltzmann, il s'ensuit que l'état du système peut être rigoureusement représenté à la limite $\sigma \rightarrow 0$ par son état moyen, dont l'évolution est déterminée par l'équation de Boltzmann (2.16).

Pour conclure cette section, il est utile de signaler également deux autres propriétés de la hiérarchie de Boltzmann, analogues à la propriété 1, qui conduisent à des formes linéaires de l'équation de Boltzmann [17, 23]. La seconde propriété est associée au cas où l'une des particules (\mathbf{x}_1) du fluide est considérée comme une particule-test, avec une distribution initiale de la forme $f(\mathbf{x}_1) \propto \phi_\beta(\mathbf{x}_1)$; on obtient ainsi le résultat suivant :

Propriété 2. Si les fonctions de distribution initiales de la hiérarchie de Boltzmann satisfont à la condition

$$f_s^{(0)}(x_1, \dots, x_s) = f_1^{(0)}(x_1) \prod_{i=1}^s [z \phi_\beta(x_i)], \quad (2.18)$$

alors les solutions de (2.11) sont de la forme

$$f_s^{(0)}(x_1, \dots, x_s; t) = f_1^{(0)}(x_1; t) \prod_{i=1}^s [z \phi_\beta(x_i)] \quad (2.19)$$

où $f_1^{(0)}(x; t)$ est la solution de l'équation de Boltzmann linéaire (appelée encore Rayleigh-Boltzmann ou Lorentz-Boltzmann)

$$\frac{\partial f_1^{(0)}(r, p; t)}{\partial t} = -\frac{p}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial r} f_1^{(0)}(r, p; t) \quad (2.20)$$

$$+ z \int_{S^+ \times R^3} d p_1 d \hat{\omega} \frac{(p - p_1)}{m} \phi_\beta(p_1) [f_1^{(0)}(r, p'; t) - f_1^{(0)}(r, p; t)]$$

avec la condition initiale $f_1^{(0)}(r, p)$.

Enfin la propriété suivante permet d'obtenir l'équation de Boltzmann linéarisée, dont on connaît l'importance dans la théorie du transport :

Propriété 3. Si les fonctions de distribution initiales de la hiérarchie de Boltzmann satisfont à la condition :

$$f_s^{(0)}(x_1, \dots, x_s) = \left[\sum_{i=1}^s f_1^{(0)}(x_i) \right] \prod_{i=1}^s [z \phi_\beta(x_i)], \quad (2.21)$$

alors les solutions de (2.11) sont de la forme :

$$f_s^{(0)}(x_1, \dots, x_s; t) = \left[\sum_{i=1}^s f_1^{(0)}(x_i; t) \right] \prod_{i=1}^s [z \phi_\beta(x_i)], \quad (2.22)$$

où $f_1^{(0)}(x; t)$ est la solution de l'équation de Boltzmann linéarisée :

$$\frac{\partial f_1^{(0)}(r, p; t)}{\partial t} = -\frac{p}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial r} f_1^{(0)}(r, p; t) \quad (2.23)$$

$$+ z \int_{S^+ \times R^3} d p_1 d \omega \frac{(p - p_1)}{m} \phi_\beta(p_1)$$

$$[f_1^{(0)}(r, p'; t) + f_1^{(0)}(r, p'; t) - f_1^{(0)}(r, p_1; t) - f_1^{(0)}(r, p; t)],$$

avec la condition initiale $f_1^{(0)}(r, p)$. Notons que cette propriété se vérifie aisément en portant l'hypothèse (2.21) dans la hiérarchie de Boltzmann et en

observant que l'action de l'opérateur de collision sur la Maxwellienne $\phi_\beta(p_1)$ donne un résultat nul ; remarquons aussi que l'équation (2.23) résulte de la linéarisation de l'équation de Boltzmann non linéaire autour de ϕ_β . Il convient enfin de préciser que les propriétés 1-3 dépendent des conditions d'application du théorème de Lanford. En particulier, elles ne sont valables que pour des conditions initiales satisfaisant à la condition (C_1) et que pour des temps t tels que $0 \leq t \leq t_0(z, \beta)$, puisque les solutions de la hiérarchie de Boltzmann sont définies par des séries de perturbation du type (I. 4.13). D'autre part, si les conditions initiales de la hiérarchie B.B.G.K.Y. satisfont à la condition (C_2), les propriétés 2 et 3 donnent lieu naturellement à des corollaires du théorème 1 analogues au corollaire 1.

2.5 Cas des conditions initiales asymétriques par rapport au temps.

Ainsi que nous l'avons souligné, l'énoncé du théorème 1 implique une certaine dissymétrie temporelle, puisque les fonctions de distribution doivent satisfaire à l'instant initial à la condition de convergence uniforme (C_2) qui n'est pas conservée au cours de l'évolution ultérieure. En fait, cette dissymétrie est due à l'existence d'hypersurfaces de l'espace des phases $\Gamma_S^{(0)}$ (correspondant aux collisions qui ont eu lieu sur l'intervalle $(-t, 0)$ précédant l'instant initial), sur lesquelles la propriété de convergence (2.13) n'est pas satisfaite ; il s'ensuit que la condition (C_2) n'est pas vérifiée par les fonctions de distribution à l'instant t , et qu'elle apparaît, de ce fait, comme une hypothèse restrictive. Nous allons voir dans cette section que la validité du théorème de Lanford peut cependant être assurée avec une condition plus faible que (C_2) ; on y parvient, comme l'a montré Kiang [24], en définissant de nouvelles conditions initiales, asymétriques par rapport au temps, qui sont valables aussi bien pour $t > 0$ que pour $t = 0$, mais qui ne sont plus invariantes par renversement du temps.

a. Conditions initiales asymétriques par renversement du temps [17,18].

On les définit en introduisant la restriction de l'espace des phases $\Gamma_S^{(0)}$ à un ensemble de points de phase $\Gamma_S^{(0)}(\tau)$ obtenu en excluant toutes les configurations post-collisionnelles associées non pas à l'instant initial $t = 0$, mais à un certain intervalle de temps τ . Considérons, à cet effet, le point de phase $P^{(S)} = \{x_1, \dots, x_S\}$ qui décrit l'état initial de S particules ponctuelles, et désignons par $r_i(\tau, P^{(S)})$ les positions de ces particules à l'instant τ au cours de leur mouvement libre. L'ensemble $\Gamma_S^{(0)}(\tau)$ est alors défini par :

$$\Gamma_S^{(0)}(\tau) = \{P^{(S)} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_S) \in (\Lambda \times R^3)^S \quad (2.24)$$

$$|\mathbf{r}_i(t'; P^{(S)}) \neq \mathbf{r}_j(t'; P^{(S)})\}$$

pour $i \neq j$ ($= 1, 2, \dots, S$), et $-\tau \leq t' \leq 0$ si $\tau \geq 0$, $0 \leq t' \leq -\tau$ si $\tau \leq 0$; c'est donc la restriction de $\Gamma_S^{(0)}$ à l'ensemble des points de phase pour lesquels aucune collision binaire, entre une paire quelconque de particules (considérées comme ponctuelles), ne se produit en remontant le temps sur l'intervalle de temps τ , si τ est positif, ou en "descendant" le temps sur l'intervalle $|\tau|$, si τ est négatif. Il est important de remarquer que, comme dans le cas de $\Gamma_S^{(0)}(0)$, c'est seulement un ensemble de mesure de Lebesgue nulle qui se trouve ainsi exclu de $\Gamma_S^{(0)}$, puisque la condition de coïncidence de deux particules en un même point de l'espace physique n'est vérifiée que sur certaines hypersurfaces de l'espace des phases.

En vertu de sa définition, cet ensemble $\Gamma_S^{(0)}(\tau)$ ne dépend que du mouvement libre des particules et possède des propriétés remarquables qui sont directement liées à l'existence de la "flèche du temps". On vérifie aisément que :

$$\Gamma_S^{(0)}(\tau') \subset \Gamma_S^{(0)}(\tau), \quad \tau' = \alpha\tau, \quad \alpha \geq 1; \quad (2.25)$$

$$\Gamma_S^{(0)}(\tau) \neq \Gamma_S^{(0)}(-\tau); \quad (2.26)$$

$$P^{(S)} \in \Gamma_S^{(0)}(\tau) \iff \bar{P}^{(S)} \in \Gamma_S^{(0)}(-\tau), \quad (2.27)$$

où $\bar{P}^{(S)} = R_P P^{(S)}$ est le point de phase que l'on déduit de $P^{(S)}$ par le renversement de toutes les impulsions ($\mathbf{p}_i \rightarrow -\mathbf{p}_i$). Cette dernière propriété résulte naturellement de la réversibilité du mouvement et elle a en particulier pour conséquence que $\Gamma_S^{(0)}(\tau)$ n'est pas invariant par renversement des impulsions. Ceci étant, on définit de nouvelles conditions initiales, asymétriques par renversement du temps, en remplaçant la condition de convergence (C_2) par la condition

(C_2'). Il existe une fonction continue $f_S^{(0)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_S)$ sur $\Gamma_S^{(0)}$, telle que l'on a

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} f_S^{(0)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_S; 0) = f_S^{(0)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_S)$$

uniformément sur tous les ensembles compacts de $\Gamma_S^{(0)}(\tau)$ pour un certain temps $\tau > 0$. Cette condition permet également d'établir le théorème de Lanford (cf. Kiang [24]) qui prend la forme du

Théorème 2. Si les conditions du théorème 1 sont remplies, et si les fonctions de distribution initiales satisfont à (C_1) et (C_2'), il existe alors un temps $t_0(z, \beta) > 0$ tel que, pour $0 \leq t \leq t_0(z, \beta)$ et pour tout $S > 0$, les séries (I. 4.12) et (I. 4.13) convergent, et tel que les $f_S^{(0)}(\dots; t)$ ainsi définies admettent une borne du type C_1 (avec $z' > z$, $\beta' < \beta$) et convergent uniformément vers $f_S^{(0)}(\dots; t)$ sur tous les ensembles compacts de $\Gamma_S^{(0)}(\tau + t)$.

Comme dans le cas du théorème 1, ce dernier théorème s'applique aussi pour $-t_0(z, \beta) \leq t \leq 0$, à condition que l'on prenne $\tau \leq 0$ et que les termes de collisions $C_{S, S+1}^{(0)} f_{S+1}^{(0)}$ de la hiérarchie de Boltzmann (2.8) soient changés en $-C_{S, S+1}^{(0)} f_{S+1}^{(0)}$.

Notons également que l'on retrouve les conditions du théorème 1 en posant $\tau = 0$, et que l'on établit dans ce cas que la condition (C_2), postulée à $t = 0$ sur l'ensemble $\Gamma_S^{(0)}(0)$, se trouve conservée à un instant ultérieur $t \leq t_0(z, \beta)$, sur l'ensemble $\Gamma_S^{(0)}(t) \subset \Gamma_S^{(0)}(0)$; par sa définition même, l'ensemble $\Gamma_S^{(0)}(t)$ est plus "petit" que l'ensemble initial $\Gamma_S^{(0)}(0)$, puisqu'il s'en déduit par l'exclusion de l'ensemble des points de phase (de mesure de Lebesgue nulle) correspondant aux collisions qui se sont produites sur l'intervalle $-t \leq t' \leq 0$. On retrouve ainsi l'asymétrie temporelle déjà constatée dans l'énoncé du théorème 1; mais, au lieu de se manifester par la différence entre les modes de convergence à l'instant initial et à l'instant t , elle est maintenant directement liée à la définition des ensembles sur lesquels la propriété (C_2) est conservée.

L'interprétation du théorème 2 donne lieu naturellement aux mêmes remarques générales que celles développées dans I. Toutefois, ce nouvel énoncé du théorème de Lanford présente un réel avantage pour notre propos, puisqu'il permet d'analyser avec plus de précision par quel procédé se trouvent conciliées la réversibilité de la hiérarchie B.B.G.K.Y. et l'irréversibilité de la hiérarchie de Boltzmann. En effet, l'apport essentiel du théorème 2, comparé au théorème 1, consiste dans le fait qu'il est maintenant possible de déterminer sur quels ensembles la propriété de convergence uniforme (C_2') se trouve conservée au cours de l'évolution. De plus, en vertu de la propriété (2.25) d'après laquelle $\Gamma_S^{(0)}(\tau) \supset \Gamma_S^{(0)}(\tau + t_1) \supset \Gamma_S^{(0)}(\tau + t_2) \supset \dots$, si $0 \leq t_1 \leq t_2 < \dots \leq t_0(z, \beta)$, on constate que ces ensembles deviennent de plus en plus petits lorsque t croît. Comme l'on a en outre, d'après (2.26), $\Gamma_S^{(0)}(\tau) \neq \Gamma_S^{(0)}(-\tau)$, on vérifie ainsi que la condition (C_2') est bien asymétrique par rapport au temps et qu'elle est conservée au

cours de l'évolution *ultérieure* du système ; en d'autres termes, (C_2') se propage dans le sens des t positifs mais n'est satisfaite que sur des ensembles $\Gamma_s^{(0)}(\tau + t_i)$ de plus en plus "petits". Rappelons cependant une fois de plus que ces ensembles $\Gamma_s^{(0)}(\tau + t_i)$ ne diffèrent entre eux et de l'ensemble initial $\Gamma_s^{(0)}(\tau)$ que par des ensembles de mesure de Lebesgue nulle, ce qui est une conséquence directe de la nature ponctuelle des particules à la limite $\sigma \rightarrow 0$. Remarquons aussi que les ensembles de points de phase ainsi exclus correspondent aux collisions qui se sont produites sur l'intervalle de temps $(-\tau, 0)$ et qui créent des corrélations ne satisfaisant pas à la condition (C_2') ; on notera d'ailleurs que c'est l'existence même de telles corrélations qui est la cause du retour du système à son état initial après renversement des impulsions.

Il apparaît ainsi clairement que l'irréversibilité se trouve introduite dans les solutions limites de la hiérarchie B.B.G.K.Y. par le processus d'affaiblissement progressif au cours du temps de la condition de convergence (C_2') . En fait, ce qui permet de rendre compatibles la hiérarchie B.B.G.K.Y. réversible et la hiérarchie de Boltzmann irréversible, c'est que cette dernière n'est une bonne approximation que pour une classe *particulière* de conditions initiales ; et c'est précisément l'objet du théorème de Lanford de montrer que, pour la limite de Boltzmann-Grad, l'état statistique initial du système doit satisfaire à la condition (C_2') , asymétrique par rapport au temps. Il est important de souligner que cette condition (C_2') exclut notamment les états statistiques que l'on obtient par renversement des vitesses à un certain instant t : dans ce cas, en effet, la convergence a lieu sur l'ensemble $R_p \Gamma_s^{(0)}(\tau + t) = \Gamma_s^{(0)}(-\tau - t) \neq \Gamma_s^{(0)}(\tau + t)$, de sorte que (C_2') n'est plus satisfaite et que les fonctions de corrélations ainsi obtenues ne peuvent en aucun cas servir de conditions initiales en vue de l'application du théorème de Lanford. On en conclut que les corrélations satisfaisant à (C_2') ont un comportement singulier par rapport au renversement des vitesses à la limite $\sigma \rightarrow 0$, ce qui permet d'éviter les contradictions liées au paradoxe de Loschmidt, comme nous allons le montrer en détail sur un exemple particulier.

Il convient enfin de remarquer que les résultats concernant la "propagation du chaos moléculaire", et par conséquent l'existence d'un régime cinétique, demeurent naturellement inchangés, puisque les propriétés 1-3 et les corollaires correspondants restent valables lorsque l'on remplace la condition (C_2) par (C_2') .

b. *Un exemple d'évolution macroscopique irréversible.*

Il est utile d'illustrer les résultats précédents en étudiant un cas typique de processus macroscopique irréversible, analysé antérieurement dans les références [17, 18] dont nous suivons ici l'argumentation. Considérons la situation physique idéale dans laquelle l'enceinte Λ est divisée en deux parties égales Λ_1 et Λ_2 , pouvant communiquer entre elles par un orifice initialement fermé, et où le fluide de N sphères dures se trouve dans un état d'équilibre à l'intérieur de l'un de ces deux enceintes, disons Λ_1 . A l'instant $t = 0$, on ouvre l'orifice réunissant Λ_1 et Λ_2 , de sorte que le fluide contenu antérieurement dans Λ_1 commence à diffuser dans l'enceinte Λ_2 . Supposons alors que l'on s'intéresse à l'évolution pour $t > 0$ des nombres de sphères N_1 et N_2 contenues respectivement dans Λ_1 et Λ_2 , (avec $N_1 + N_2 = N$). L'observation macroscopique usuelle nous permet d'affirmer que va se développer, à partir de $t = 0$, un processus d'uniformisation tendant à égaliser progressivement les nombres N_1 et N_2 , en partant de la situation de non-uniformité maximale où $N_1 = N$ et $N_2 = 0$, pour aboutir finalement à une situation d'équilibre où l'on a approximativement $N_1 \approx N_2 = N/2$.

Avant de voir comment le théorème de Lanford peut s'appliquer à cette situation, il convient de faire quelques remarques d'ordre général. Le processus précédent, manifestement irréversible à l'échelle macroscopique, semble être cependant incompatible avec la réversibilité des lois dynamiques qui gouvernent le mouvement des particules du fluide. Mais, pour que cette réversibilité microscopique produise des effets macroscopiques contraires à l'évolution usuelle, il faudrait par exemple que l'on puisse mettre le système dans l'état microscopique initial obtenu en renversant toutes les vitesses des particules à un certain instant $t > 0$. Il est clair, dans ce cas, que le sens de l'évolution serait inversé et que le système repasserait par ses états antérieurs caractérisés par une non-uniformité de plus en plus grande ; plus généralement, la réversibilité dynamique implique d'ailleurs qu'à tout état microscopique donnant lieu à une uniformisation des nombres N_1 et N_2 , et représenté par un point de phase P_N , correspond un autre état microscopique possible, représenté par le point de phase $\bar{P}_N = R_p P_N$, pour lequel cette évolution a lieu en sens contraire. Il est donc évident que le processus irréversible d'uniformisation ne peut être compatible avec l'évolution dynamique sous-jacente que pour certains états microscopiques initiaux, et non pour tous les états possibles. Si l'on se place dans le cadre des concepts habituels de la Mécanique statistique, on est ainsi conduit à rechercher les conditions auxquelles doivent satisfaire les états statistiques initiaux pour obtenir une

évolution macroscopique conforme à l'expérience : lorsque le fluide contenu dans Λ_1 est un gaz dilué, ces conditions sont précisément déterminées par le théorème de Lanford.

Comme l'on suppose que le fluide en question se trouve initialement en état d'équilibre dans Λ_1 , il peut être représenté à l'instant $t = 0$ par l'état statistique correspondant à un ensemble canonique de N sphères dures de diamètre σ , contenues dans l'enceinte Λ_1 . On remarque que l'état statistique initial est, dans ce cas, invariant par renversement des impulsions, de sorte que les fonctions de distribution correspondantes, $\mathbf{f}^{(\sigma)} = \{f_1^{(\sigma)}, f_2^{(\sigma)}, \dots\}$, satisfont, d'après (2.6-7), aux relations :

$$V_t^\sigma \mathbf{f}^{(\sigma)} = R_p V_{-t}^\sigma \mathbf{f}^{(\sigma)}, \quad (2.28)$$

$$V_t^\sigma (R_p V_t^\sigma \mathbf{f}^{(\sigma)}) = \mathbf{f}^{(\sigma)}, \quad (2.29)$$

tandis que l'on a :

$$V_t^\sigma (V_t^\sigma f^{(\sigma)}) = V_{2t}^\sigma f^{(\sigma)}. \quad (2.30)$$

L'équation (2.29) montre notamment que l'on retrouve l'état statistique initial $\mathbf{f}^{(\sigma)}$, dans lequel toutes les particules sont dans Λ_1 , si l'on inverse toutes les impulsions à l'instant t et si on laisse ensuite le système évoluer sur un autre intervalle de temps t ; ce résultat est à opposer à celui décrit par (2.30), qui concerne l'évolution du système pendant la même durée $2t$, mais sans renversement des vitesses.

Ceci étant, nous nous plaçons dans le cas où le fluide est suffisamment dilué pour pouvoir être décrit par la limite de Boltzmann-Grad ; nous sommes donc amenés à considérer la suite d'états statistiques initiaux $\mathbf{f}^{(\sigma)}$, dans laquelle $\sigma \rightarrow 0$ et le nombre N de particules dans Λ_1 croît de telle manière que $N\sigma^2 = z$ reste fixé. Comme, par hypothèse, le fluide se trouve initialement dans un état canonique, on a sur l'ensemble $\Gamma_S^{(0)}(0)$:

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma \rightarrow 0} f_S^{(\sigma)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_S) &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \sigma^{2S} \tilde{\rho}_S^{(\sigma)} \\ &= \prod_{i=1}^S \left\{ \chi_{\Lambda_1}(\mathbf{r}_i) z \phi_\beta(\mathbf{p}_i) \right\} = f_S^{(0)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_S), \end{aligned} \quad (2.31)$$

où $\chi_{\Lambda_1}(\mathbf{r}_i)$ est la fonction caractéristique de Λ_1 ; les conditions (C_1) et (C_2') étant, dans ce cas, satisfaites sur $\Gamma_S^{(0)}(0)$, le théorème de Lanford s'applique et l'état du fluide à l'instant $t > 0$ (après ouverture de l'orifice entre Λ_1 et Λ_2)

est alors décrit par les fonctions de distribution $f_S^{(0)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_S; t)$, qui sont définies sur $\Gamma_S^{(0)}(t)$, avec $|t| \leq t_0(z, \beta)$, par

$$\begin{aligned} f_S^{(0)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_S; t) &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} (V_t^\sigma \mathbf{f}^{(\sigma)})_S = (V_t^0 \mathbf{f}^{(0)})_S \\ &= \prod_{i=1}^S f_{i1}^{(0)}(\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i; t), \end{aligned} \quad (2.32)$$

où $f_{i1}^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t)$ est la solution de l'équation de Boltzmann (2.16) correspondant à la condition initiale $f_{i1}^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}; 0) = \chi_{\Lambda_1}(\mathbf{r}) z \phi_\beta(\mathbf{p})$. On établit ainsi, pour l'expérience considérée et pour un fluide de sphères dures dilué, l'existence d'un régime cinétique gouverné par l'équation de Boltzmann ; l'évolution est donc bien irréversible, conformément aux conclusions générales du théorème H (dont on peut trouver un exposé complet dans [25]).

Supposons maintenant que l'on renverse toutes les impulsions à un instant t , tel que $0 < t \leq t_0/2$, et que l'on considère l'état ainsi obtenu, soit $R_p(V_t^\sigma \mathbf{f}^{(\sigma)})$, comme une nouvelle condition initiale. Si l'on observe alors l'évolution ultérieure du système sur l'intervalle $(t, 2t)$, il est clair, d'après (2.29), que l'on retrouve à l'instant $2t$ l'état statistique initial $\mathbf{f}^{(\sigma)}$, en vertu de la réversibilité des équations du mouvement et de la symétrie de $\mathbf{f}^{(\sigma)}$. Par contre, si l'on considère l'évolution limite décrite par la hiérarchie de Boltzmann (2.11), on a, d'après les propriétés de celle-ci,

$$V_t^0 (R_p V_t^0 \mathbf{f}^{(0)}) \neq \mathbf{f}^{(0)}, \quad (2.33)$$

ce qui met en évidence le comportement irréversible de $\mathbf{f}^{(0)}(\dots; t)$ qui est à opposer à la réversibilité de $\mathbf{f}^{(0)}(\dots; t)$. Cette irréversibilité est notamment illustrée par l'évolution de la fonction H de Boltzmann, qui commence à décroître de 0 à t , reste inchangée par l'opération R_p , puis continue à décroître sur l'intervalle $(t, 2t)$ lorsque le système évolue à partir de l'état $R_p(V_t^0 \mathbf{f}^{(0)})$.

Ceci étant, examinons comment le théorème de Lanford s'applique à cette situation et comment il permet de lever une apparente contradiction. Celle-ci résulterait du fait que l'on a, d'après (2.29),

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} V_t^\sigma (R_p V_t^\sigma \mathbf{f}^{(\sigma)}) = \mathbf{f}^{(0)} \quad (2.34)$$

alors que l'application du théorème de Lanford à l'état initial $R_p(V_t^\sigma \mathbf{f}^{(\sigma)})$

semble conduire à la relation

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} V_t^\sigma (R_P V_t^\sigma f^{(\sigma)}) = V_t^0 (R_P V_t^0 f^{(0)}) \neq f^{(0)},$$

qui est évidemment incompatible avec (2.34). Cependant, une telle contradiction n'existe pas, car l'utilisation précédente du théorème de Lanford n'est pas justifiée. En effet, si l'on applique le théorème 2 à l'intervalle $(0, t)$, on obtient d'une part :

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} (V_t^\sigma f^{(\sigma)})_S = (V_t^0 f^{(0)})_S, \quad (2.35)$$

sur $\Gamma_S^{(0)}(t)$, mais aussi, d'après (2.27),

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} (R_P V_t^\sigma f^{(\sigma)})_S = (R_P V_t^0 f^{(0)})_S, \quad (2.36)$$

sur $\Gamma_S^{(0)}(-t) \neq \Gamma_S^{(0)}(t)$.

Il s'ensuit que l'état statistique $R_P V_t^\sigma f^{(\sigma)}$ ne satisfait pas à la condition (C_2') et que le théorème de Lanford n'est pas applicable à l'évolution du système dans le sens des t croissants après renversement des impulsions ; il ne permet donc pas d'étudier la limite de $V_t^\sigma (R_P V_t^\sigma f^{(\sigma)})$ lorsque $\sigma \rightarrow 0$, ni de conclure que cette limite est $V_t^0 (R_P V_t^0 f^{(0)})$ puisque la condition (C_2') est violée. On voit en fait, d'après (2.35)–(2.36), que le théorème de Lanford ne peut être appliqué à l'instant t qu'à l'étude des deux problèmes suivants : soit la convergence de $V_t^\sigma (V_t^\sigma f^{(\sigma)})$, l'état initial étant $V_t^\sigma f^{(\sigma)}$, soit celle de $V_{-t}^\sigma (R_P V_t^\sigma f^{(\sigma)})$ où l'état initial est $R_P V_t^\sigma f^{(\sigma)}$; et, dans les deux cas, le système continue à évoluer vers l'équilibre, conformément aux conclusions du théorème H . Rappelons pour conclure que ces résultats sont également valables lorsque τ et t sont négatifs. Comme l'état statistique initial considéré dans cet exemple est, d'une part, invariant par renversement des impulsions et satisfait d'autre part à la condition (C_2') pour $\tau = 0$, le théorème 2 permet donc d'établir l'équation de Boltzmann à la fois pour les t croissants et les t décroissants, et d'obtenir le même processus d'uniformisation dans les deux directions du temps lorsque $|t|$ augmente. Mais il n'est pas possible de suivre l'évolution du système d'abord dans une direction, puis de revenir ensuite en arrière après avoir renversé les impulsions, le théorème 2 ne s'appliquant plus à cette dernière situation. On vérifie ainsi que c'est bien la restriction à une classe particulière de conditions initiales qui permet d'introduire l'irréversibilité dans les solutions d'équations dynamiques réversibles, pour des états initiaux invariants par renversement des impulsions.

c. Conditions initiales asymétriques et principe de causalité.

Pour compléter cette étude sur le rôle et la signification de la condition (C_2') , il nous reste à souligner que cette condition s'accorde parfaitement aux remarques générales de Penrose concernant les propriétés des ensembles statistiques hors d'équilibre [14].

On sait que l'une des difficultés fondamentales propres à la MSHE tient à ce que l'on ne dispose d'aucune prescription générale permettant de construire sans ambiguïté les états statistiques correspondant à des situations physiques (hors d'équilibre) données. Bien que ce problème soit resté sans solution jusqu'à ce jour, il est toutefois facile de montrer que, en raison de leur définition, les ensembles statistiques hors d'équilibre *physiquement possibles* doivent satisfaire à quelques conditions très générales. C'est ainsi, comme nous l'avons déjà vu, que les hypothèses de nature statistique ne peuvent porter que sur l'état statistique initial $\rho_0^{(N)}(P)$, et qu'il est naturel de lier le choix de $\rho_0^{(N)}(P)$ à l'analyse des procédés expérimentaux qui permettent de "préparer" le système dans un certain état hors d'équilibre (cf. I. § 3.1). Notons, par exemple, que Richardson a développé une telle analyse pour plusieurs procédés de préparation, prouvant ainsi que ces procédés conduisent à des états statistiques initiaux qui sont fonctions seulement d'un certain ensemble de variables macroscopiques [26].

Mais la condition la plus importante pour notre propos, soulignée particulièrement par Penrose [14], consiste dans le fait que les ensembles statistiques physiquement possibles doivent être en général asymétriques par renversement du temps (et des impulsions). Cette propriété d'asymétrie temporelle apparaît en fait comme directement liée à la fonction que doit nécessairement remplir tout ensemble statistique, à savoir permettre le passage d'une description microscopique réversible à une certaine évolution irréversible au niveau macroscopique. Or, du point de vue dynamique, à une évolution donnée correspond toujours l'évolution inverse obtenue par renversement du temps, ou par renversement de toutes les impulsions du système. Bien qu'elle soit en principe parfaitement possible, cette évolution inverse n'est cependant jamais observée expérimentalement, ni réalisable dans la pratique, en raison de notre incapacité à contrôler exactement toutes les conditions initiales au niveau microscopique. C'est donc pour tenir compte de ce fait que les ensembles statistiques mis en oeuvre doivent être en général asymétriques par renversement du temps (ou des impulsions) ; c'est d'ailleurs sur cette propriété que repose la réfutation habituelle du paradoxe de

Loschmidt, celle-ci consistant comme l'on sait à dire que, dans tout ensemble statistique physiquement possible, la plupart des configurations correspondent à l'évolution macroscopique usuelle alors que celles associées à l'évolution inverse sont "extrêmement rares".

En suivant l'argumentation de Penrose, on peut encore remarquer que l'ensemble des états statistiques hors d'équilibre physiquement possibles doit être un ensemble fermé par rapport à l'évolution vers le futur. Supposons, en effet, que le système se trouve à l'instant $t = 0$ dans un état hors d'équilibre, auquel on fait correspondre un certain ensemble statistique initial représenté par la densité de probabilité $\rho_0^{(N)}(P)$. Si le système est isolé durant un certain intervalle de temps $t > 0$, son état statistique à l'instant t est alors donné par $\rho_t^{(N)}(P) = V_t^{(N)} \rho_0^{(N)}(P)$, où $V_t^{(N)}$ est, comme V_t^σ dans (2.5), l'opérateur d'évolution associé à l'équation de Liouville. Donc, si $\rho_0^{(N)}(P)$ est un état statistique physiquement possible, il s'ensuit que $\rho_t^{(N)}(P)$ doit l'être également.

Par contre, il est facile de voir qu'il n'en est pas de même pour $\rho_{-t}^{(N)}(P)$. Cette densité de probabilité représente en effet l'état statistique que devrait avoir le système à l'instant $-t$ pour que, abandonné à lui-même et restant isolé sur une durée t , on le retrouve précisément dans l'état statistique initial $\rho_0^{(N)}(P)$. Or, la condition d'isolation du système sur une certaine durée précédant l'instant initial est, en général, incompatible avec les processus physiques qui permettent de "préparer" le système dans l'état $\rho_0^{(N)}(P)$. Il s'ensuit que l'ensemble des états statistiques physiquement possibles n'est pas un ensemble fermé par rapport à l'évolution vers le passé.

Ces analyses, qui rejoignent celles développées par d'autres auteurs (voir en particulier Peierls [16] et Feynmann [27]), montrent clairement l'origine de cette propriété d'asymétrie temporelle à laquelle doivent satisfaire les ensembles statistiques hors d'équilibre. Celle-ci apparaît en fait comme une simple conséquence du *principe de causalité*, mis en relief notamment par Penrose, selon lequel l'état statistique d'un système à un instant donné est complètement déterminé par ce qui est arrivé à ce système dans le passé, et non parce qu'il lui adviendra dans le futur. Tel qu'il vient d'être énoncé, ce principe introduit manifestement en Mécanique statistique la distinction entre le passé et le futur, c'est-à-dire implique le sens de la "flèche du temps"; il peut être considéré soit comme un axiome fondamental de la théorie, soit comme devant résulter d'un principe plus profond qui serait lié à l'interprétation physique de la "flèche du temps", problème sur lequel nous

reviendrons brièvement dans la section 4.

En conclusion, il résulte de l'argumentation précédente que la condition (C_2') introduit dans la définition des états statistiques initiaux une propriété d'asymétrie temporelle qui est bien conforme aux exigences de causalité. Cette condition (C_2') consiste en effet à postuler, à l'instant initial $t = 0$, une condition de convergence qui exclut l'ensemble des points de phase associés aux collisions qui se sont produites sur une durée τ précédant l'instant $t = 0$, cette condition s'appliquant à l'étude de l'évolution dans le sens des t croissants. Inversement, l'étude de l'évolution dans le sens des t décroissants conduit à postuler, à l'instant initial, une condition de convergence analogue, mais qui exclut cette fois l'ensemble des points de phase associés aux collisions qui se produiraient sur la durée τ succédant à l'instant $t = 0$. Comme les deux ensembles en question sont nécessairement différents, on vérifie ainsi que la condition (C_2') est bien asymétrique par renversement du temps, et qu'elle introduit à l'instant initial le même élément d'asymétrie temporelle que celui contenu dans l'hypothèse du chaos moléculaire nécessaire à la déduction formelle de l'équation de Boltzmann (il suffit pour s'en assurer de considérer une durée τ infiniment petite). Remarquons enfin que l'exclusion des ensembles de points de phase mentionnés ci-dessus a pour effet d'éliminer les corrélations créées par les collisions à partir de l'état statistique initial (supposé non-corrélé), et donc d'éliminer du même coup toutes les corrélations à longue distance qui sont dues aux processus de "recollisions". L'élimination de ces corrélations est ainsi une conséquence directe de la condition (C_2') et du passage à la limite de Boltzmann-Grad; notons qu'elle est en fait l'un des ingrédients essentiels de la déduction rigoureuse de l'équation de Boltzmann, puisque ce sont de telles corrélations qui sont à l'origine des divergences bien connues rencontrées dans la théorie cinétique des milieux modérément denses.

3. Conditions initiales et théorie du transport.

Les résultats de la section précédente nous montrent qu'il est possible de déduire rigoureusement une évolution irréversible à l'échelle macroscopique à partir des équations réversibles de la hiérarchie B.B.G.K.Y., à condition de se restreindre à une classe particulière d'états statistiques initiaux. Ainsi, dans le cas des gaz dilués où la limite de Boltzmann-Grad s'applique (cas du fluide idéal), le théorème de Lanford permet d'établir l'existence d'un régime cinétique décrit par l'équation de Boltzmann, pourvu que l'état statistique

initial satisfasse aux conditions (C_1) , (C_2') et (2.14) qui définissent avec précision la propriété de "chaos moléculaire". Comme nous l'avons vu, le point essentiel de la démonstration consiste en ce que, une fois postulée à l'instant initial, cette propriété de chaos moléculaire est ensuite conservée dans le futur au cours de l'évolution dynamique du système ; il s'ensuit que le comportement irréversible du système au niveau cinétique résulte, à la limite considérée, des lois dynamiques réversibles du niveau microscopique, et qu'il n'existe dans ce cas aucune contradiction entre ces deux niveaux de description, si le "chaos moléculaire" est réalisé à l'instant initial.

Il est donc naturel de chercher à appliquer cette démarche à d'autres types de systèmes ou de situations physiques, en vue d'aboutir si possible à une méthode générale pour traiter les problèmes de la Mécanique statistique hors d'équilibre. D'après ce qui précède et conformément aux analyses de *I*, une telle méthode doit nécessairement comporter les deux étapes suivantes : d'abord, chercher à associer, à chaque problème physique particulier, un certain processus limite caractéristique ; ensuite, déterminer pour quelle classe particulière de conditions initiales il est possible de déduire rigoureusement les équations (généralement irréversibles) de ce processus à partir des lois dynamiques microscopiques. A cet égard, les résultats de la section 2 sont significatifs, en ce sens qu'ils nous montrent à quel type de conditions on peut raisonnablement s'attendre.

Dans la première étape de ce programme, on est nécessairement conduit à considérer d'autres types de limites que celle de Boltzmann-Grad. C'est ainsi que, dans le cas d'un régime cinétique, nous avons étudié dans *I* deux autres limites caractéristiques : celle du couplage faible, qui est associée à un processus de diffusion dans l'espace des phases régi par une équation de Fokker-Planck, et celle du champ moyen qui permet de rendre compte du comportement collectif d'un plasma satisfaisant à l'équation de Vlasov. Mais nous avons vu également que l'extension de ces résultats à des systèmes plus denses (ou plus fortement corrélés) soulève des difficultés de principe qui rendent problématique l'existence d'un régime cinétique pour de tels milieux (cf. *I*, § 3.1.d). Ces difficultés sont d'ailleurs à rapprocher de celles rencontrées par la théorie cinétique des gaz neutres modérément denses, où des divergences dues aux effets de "recollisions" apparaissent dans les contributions d'ordre supérieur à l'équation cinétique.

Comme la description cinétique constitue seulement une étape intermédiaire dans l'étude de l'évolution macroscopique et dans le calcul des

coefficients de transport, on est donc amené, dans le cas de systèmes plus denses, à considérer directement le passage du niveau microscopique au niveau macroscopique tel qu'il est défini par les grandeurs immédiatement accessibles à notre expérience. On aboutit ainsi à une autre approche de la théorie des phénomènes de transport, dans laquelle on cherche à déduire rigoureusement, à partir des lois dynamiques réversibles du niveau microscopique, les lois élémentaires bien connues de la théorie du transport (lois de Fick, de Fourier, etc.) qui gouvernent l'évolution des variables hydrodynamiques locales. Conformément à la méthode générale décrite ci-dessus, cette nouvelle approche nous amène à définir d'abord un autre type de limite, la limite hydrodynamique, dans laquelle la densité "sans dimension" reste finie (cas d'un fluide non-idéal), alors que le libre parcours moyen devient infiniment petit comparé à l'échelle de longueur macroscopique. Cette même démarche nous conduit ensuite à essayer : (i) de prouver l'existence, à la limite considérée, d'un certain régime hydrodynamique, et (ii) de déterminer pour quelles conditions générales les équations correspondant à ce régime peuvent être effectivement déduites de la description microscopique du système.

On conçoit sans peine que le programme ainsi défini est très ambitieux et que sa réalisation rencontre des difficultés considérables, auxquelles des solutions satisfaisantes n'ont pu être apportées que dans le cas de quelques modèles très particuliers. Pour mieux mesurer l'ampleur de ces difficultés, il suffit de remarquer que la limite hydrodynamique implique un "processus de réduction" radical, en ce sens qu'il fait passer de la description maximale de l'état d'un système de N particules à sa description hydrodynamique comportant seulement 5 variables locales (dans le cas d'un fluide simple). Or, dans le cas où il existe un régime cinétique, on sait que l'on aboutit au régime hydrodynamique à la suite de deux processus de réduction successifs, l'un s'exerçant d'abord au niveau microscopique (passage de la description maximale à la description cinétique), l'autre s'exerçant ensuite au niveau cinétique (passage du régime cinétique au régime hydrodynamique). On comprend dès lors quelle est la complexité des problèmes posés par le passage direct à la limite hydrodynamique, puisque leur solution rencontre nécessairement toutes les difficultés propres à chacun des deux processus de réduction impliqués dans l'approche cinétique.

En raison de ces difficultés, la plupart des travaux traitant de cette méthode portent sur la théorie de la diffusion, et notamment sur le plus

simple des phénomènes de transport, à savoir la self-diffusion [19-20, 28-30]. C'est donc essentiellement ce phénomène que nous considérons dans cette section, et dont nous nous servons d'exemple pour analyser, dans l'esprit des travaux de Lebowitz et Spohn [19, 20], la nature des concepts mis en oeuvre dans l'étude de la limite hydrodynamique et dans l'élaboration d'une théorie rigoureuse du transport.

3.1 Problème de la self-diffusion.

Pour définir le phénomène de self-diffusion, on considère un fluide constitué d'un mélange de deux espèces de particules, qui sont toutes mécaniquement identiques, mais qui peuvent cependant être distinguées par une certaine propriété (ou qualité), que nous appellerons "couleur" conformément à l'usage courant. (Expérimentalement, une très bonne approximation de cette situation est réalisée par exemple avec des radio-isotopes de masse très voisine, ou avec un fluide dont les particules, douées d'un spin nucléaire égal à $\pm 1/2$, interagissent suivant des forces indépendantes du spin). On est ainsi conduit à caractériser chaque particule i par une variable supplémentaire c_i , dite de "couleur", qui peut prendre les deux valeurs $c_i = 1$ (particules "noires") ou $c_i = 0$ (particules "blanches"); dans ce modèle, la propriété associée aux c_i est conservée au cours du temps, de sorte que chaque particule transporte sa "couleur" avec elle au cours de ses interactions avec les autres particules. Comme l'on suppose en outre que le fluide est en équilibre thermique, on voit que l'état d'un tel mélange est déterminé par l'évolution au cours du temps de la distribution des "couleurs" dans le système. C'est le problème de la self-diffusion, qui apparaît ainsi comme un phénomène de transport particulièrement simple, puisqu'il est linéaire par nature et se rapporte à un état de quasi-équilibre dépendant d'une seule variable localement conservée.

Pour illustrer ce phénomène, il est commode de reprendre l'exemple de la section précédente (§b), en le modifiant de la manière suivante (cf [20]). On considère maintenant un fluide de N sphères dures, dont $N/2$ sont "noires" et $N/2$ "blanches", et l'on suppose que, dans un premier temps, toutes les particules de même couleur sont réunies dans la même enceinte, par exemple les noires dans Λ_1 et les blanches dans Λ_2 . (rappelons que Λ_1 et Λ_2 sont supposées égales). On attend ensuite que l'équilibre thermique soit réalisé entre les deux composantes noire et blanche, et l'on ouvre alors l'orifice faisant communiquer les deux enceintes Λ_1 et Λ_2 : la self-diffusion est précisément le

phénomène d'interdiffusion mutuelle qui se développe à partir de cet instant (choisi comme instant initial $t = 0$) entre les deux composantes du mélange. Comme la densité globale du fluide reste constante, il suffit, pour décrire ce phénomène, d'étudier l'évolution au cours du temps d'une seule espèce de particules, en s'intéressant par exemple aux nombres de particules noires $N_{\Lambda_1}(t)$ et $N_{\Lambda_2}(t)$ contenues respectivement dans les enceintes Λ_1 et Λ_2 .

Macroscopiquement, l'état de ce mélange est complètement déterminé par la densité locale de "couleur" $\rho(\mathbf{r};t)$, correspondant par exemple à la concentration des particules "noires", la concentration des particules "blanches" (qui ne se "voient pas") étant alors égale à $1 - \rho(\mathbf{r};t)$. La densité $\rho(\mathbf{r};t)$ est une variable hydrodynamique locale dont l'évolution, à l'échelle macroscopique, est gouvernée par l'équation de la diffusion; rappelons que celle-ci résulte de la loi phénoménologique de Fick, selon laquelle le courant $\mathbf{j}(\mathbf{r};t)$, associé au flux de particules "noires" en un point \mathbf{r} et à l'instant t , est proportionnel au gradient de la concentration et s'écrit :

$$\mathbf{j}(\mathbf{r};t) = -D \nabla_{\mathbf{r}} \rho(\mathbf{r};t), \quad (3.1)$$

où le coefficient de self-diffusion D ne dépend que de la densité et de la température du fluide. En tenant compte alors de l'équation de continuité $\partial \rho / \partial t + \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{j} = 0$, on vérifie bien que la concentration $\rho(\mathbf{r};t)$ doit satisfaire à l'équation de la diffusion :

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{r};t)}{\partial t} = D \nabla_{\mathbf{r}}^2 \rho(\mathbf{r};t) \quad (3.2)$$

qui permet de calculer $\rho(\mathbf{r};t)$ lorsque l'on se donne la condition initiale $\rho(\mathbf{r};0)$. Notons que, dans l'exemple considéré ci-dessus, on a évidemment $\rho(\mathbf{r};0) = \chi_{\Lambda_1}(\mathbf{r})$.

Microscopiquement, l'état statistique du mélange est décrit par l'ensemble des fonctions de distribution $\tilde{p}_S(x_1, c_1, \dots, x_S, c_S; t)$, ($1 \leq S \leq N$), qui représentent la probabilité de trouver les S particules $(1, 2, \dots, S)$ aux points $(x_1, dx_1), \dots, (x_S, dx_S)$, avec les "couleurs" c_1, c_2, \dots, c_S . Ces fonctions doivent satisfaire aux équations de la hiérarchie B.B.G.K.Y. qui déterminent l'évolution (réversible) au cours du temps des corrélations entre les positions et les impulsions des particules et leurs couleurs. Comme l'on suppose que le fluide est, indépendamment de la distribution des "couleurs", dans un état d'équilibre thermique que l'on peut représenter par un ensemble grand-canonique avec la température $1/k\beta$ et la fugacité z , les fonctions

$\tilde{\rho}_S^{(\epsilon)}(\mathbf{x}_1, c_1, \dots, \mathbf{x}_S, c_S; t)$ doivent en outre vérifier la relation :

$$\sum_{0,1} \dots \sum_{0,1} \tilde{\rho}_S^{(\epsilon)}(\mathbf{x}_1, c_1, \dots, \mathbf{x}_S, c_S; t) \quad (3.3)$$

$$= \tilde{\rho}_{eq,S}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_S),$$

où les $\tilde{\rho}_{eq,S}$ sont les fonctions de corrélations (purement mécaniques) correspondant à l'ensemble grand-canonique considéré. La description microscopique du mélange étant ainsi définie, il nous faut alors essayer d'établir sous quelles conditions générales on peut en déduire une évolution à l'échelle macroscopique de nature essentiellement dissipative, conformément à l'équation de la diffusion (3.2).

Ainsi que nous l'avons vu, le développement de ce programme implique d'abord la définition d'un certain passage à la limite, dans lequel le nombre N des particules devient infiniment grand et leur "dimension" ϵ infiniment petite ($\epsilon \equiv \sigma$ dans le cas des sphères dures), de telle manière que la quantité $N\epsilon^\nu$ reste conservée ; dans ce qui suit, nous examinerons successivement les cas $\nu = 2$ (fluides dilués), et $\nu = 3$ (fluides de densité finie). On est ainsi conduit à introduire, comme dans la section précédente, les fonctions de distribution changées d'échelle $f_S^{(\epsilon)} = N^{-S} \tilde{\rho}_S^{(\epsilon)} = \epsilon^{\nu S} \tilde{\rho}_S^{(\epsilon)}$, et à considérer les limites $\lim_{N \rightarrow \infty} N^{-S} \tilde{\rho}_S^{(\epsilon)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{\nu S} \tilde{\rho}_S^{(\epsilon)} = f_S^{(0)}$ comme définissant des variables "macroscopiques". Tel est le cas notamment de la densité locale (dans l'espace physique) des particules de couleur "noire" $\rho_1^{(0)}(\mathbf{r}_1, 1; t)$, définie par :

$$\rho_1^{(0)}(\mathbf{r}_1, 1; t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^\nu \int_{R^3} \rho_1^{(\epsilon)}(\mathbf{x}_1, 1; t) d\mathbf{p}_1, \quad (3.4)$$

qu'il serait naturel d'identifier à la densité de couleur macroscopique $\rho(\mathbf{r}; t)$ satisfaisant à l'équation (3.2).

Cependant, cette densité locale $\rho_1^{(0)}$ varie généralement de manière significative à des échelles de l'ordre du l.p.m. ou du temps de l.p.m., de sorte qu'elle ne peut en fait être identifiée à $\rho(\mathbf{r}; t)$ que sur des échelles de longueur et de temps suffisamment grandes, caractéristiques du régime hydrodynamique. Comme nous l'avons souligné dans l'introduction de cette section, ceci implique la mise en oeuvre d'un second processus limite dans lequel les échelles de longueur et de temps sont dilatées suivant un facteur ϵ^{-1} et $\epsilon^{-\nu}$ respectivement ; dans le cas de la diffusion qui nous intéresse ici, on vérifie immédiatement que l'on doit avoir $\nu = 2$ pour que l'équation de la diffusion

(3.2) reste invariante par ce changement d'échelle. Compte tenu de ces remarques*, on est finalement conduit à rechercher si la limite de la densité locale, définie par $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \rho_1^{(0)}(\mathbf{r}, 1; \epsilon^{-2}t)$, peut être identifiée à la densité macroscopique $\rho(\mathbf{r}; t)$, ce qui s'exprime par la conjecture (cf. [19]):

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \rho_1^{(0)}(\mathbf{r}, 1; \epsilon^{-2}t) \quad (3.5)$$

$$\equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^\nu \int_{R^3} \tilde{\rho}_1^{(\epsilon)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, 1; \epsilon^{-2}t) d\mathbf{p} = \rho(\mathbf{r}; t),$$

où $\rho(\mathbf{r}; t)$ est solution de l'équation de la diffusion (3.2) ; c'est l'objet même de la seconde étape de notre démarche, et le problème central du programme qui est développé dans cette section.

Pour établir la validité d'une conjecture telle que (3.5), il faut être en mesure de prouver qu'il existe une classe particulière de corrélations initiales, $\tilde{\rho}_S^{(\epsilon)}(\mathbf{x}_1, c_1, \dots, \mathbf{x}_S, c_S; 0)$, pour lesquelles la limite de la densité locale à une particule, définie par (3.5), satisfait à l'équation de la diffusion (3.2), qui apparaît alors comme une conséquence rigoureuse des équations de la hiérarchie. Il est clair en effet qu'une conjecture de ce type ne peut être vérifiée avec n'importe quelle condition initiale, en raison de la réversibilité des équations du mouvement. Il suffit pour s'en convaincre, de reprendre, en l'adaptant au cas de la self-diffusion, l'argumentation développée dans l'exemple de la Section 2.5b, où l'on considère l'état statistique obtenu à un certain instant t par le renversement de toutes les impulsions ; on constate ainsi que, si cette opération ne modifie pas les corrélations purement mécaniques (qui restent celles correspondant à l'ensemble grand-canonique), elle a par contre pour effet de créer des corrélations entre la position, l'impulsion et la couleur des particules qui déterminent une évolution incompatible avec l'équation de la diffusion. Pour qu'une conjecture comme (3.5) puisse être justifiée, il faut donc que l'effet de telles corrélations soit éliminé par un choix convenable des conditions initiales. La solution de ce problème dépend naturellement du type de limite considéré ; nous allons voir que, mis à part le cas des fluides dilués où le théorème de Lanford permet d'aboutir à une solution satisfaisante, aucun résultat général n'a pu être démontré jusqu'à maintenant dans le cas des fluides de densité finie.

*et du fait que la dilatation de l'échelle de longueur est implicitement prise en compte dans le passage à la limite $\sigma \rightarrow 0$.

L'hypothèse la plus simple concernant l'état statistique initial consiste à supposer que la couleur d'une particule ne dépend à l'instant $t = 0$ que de sa position ; notons que cette propriété se trouve en particulier vérifiée dans l'exemple considéré ci-dessus. On est amené dans ce cas à introduire la probabilité $g(\mathbf{r}_i, c_i)$ pour que la particule située en \mathbf{r}_i ait la couleur c_i , indépendamment de toutes les autres particules ; cette fonction g , supposée continue, définit ainsi un "profil de couleur" et satisfait à la relation $g(\mathbf{r}_i, 1) + g(\mathbf{r}_i, 0) = 1$. Les fonctions de corrélations correspondant à cet état statistique initial s'écrivent alors [19]:

$$\tilde{\rho}_S(\mathbf{x}_1, c_1, \dots, \mathbf{x}_S, c_S; 0) = \tilde{\rho}_{eq, S}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_S) \prod_{i=1}^S g(\mathbf{r}_i, c_i), \quad (3.6)$$

avec, dans le cas de notre exemple,

$$g(\mathbf{r}, c) = c \chi_{\Lambda_1}(\mathbf{r}) + (1 - c) \chi_{\Lambda_2}(\mathbf{r}). \quad (3.7)$$

La propriété de factorisation (3.6) n'est évidemment pas conservée par les équations du mouvement, qui créent des corrélations entre la couleur, la position et l'impulsion des particules. Il serait donc souhaitable de considérer des corrélations initiales plus générales, dans lesquelles la couleur d'une particule dépendrait à la fois de sa position et de son impulsion. Comme l'ont montré Lebowitz et Spohn [20], ceci est possible dans le cas des fluides dilués où les résultats du théorème de Lanford peuvent être adaptés au problème de la self-diffusion.

a. Self-diffusion dans les fluides dilués. Limite de Boltzmann-Grad.

On obtient une généralisation immédiate des états statistiques du type (3.6) en supposant que la couleur d'une particule dépend à la fois de sa position et de son impulsion. On introduit à cet effet, à la place de $g(\mathbf{r}_i, c_i)$, une fonction continue $f(\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i, c_i)$ qui représente la probabilité pour que la particule située au point de phase $\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i$ ait la couleur c_i ; cette fonction f définit une distribution de couleur, dépendante de l'impulsion, qui doit satisfaire, en vertu de (3.3), à la relation :

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, 1) + f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, 0) = z \phi_\beta(\mathbf{p}), \quad (3.8)$$

qui peut aussi s'écrire :

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, c) = cf(\mathbf{r}, \mathbf{p}) + (1 - c)(z \phi_\beta(\mathbf{p}) - f(\mathbf{r}, \mathbf{p})), \quad (3.9)$$

avec $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \equiv f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, 1)$. Notons que, dans le cas particulier de notre exemple

où toutes les particules "noires" sont initialement contenues dans Λ_1 , on a :

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \chi_{\Lambda_1}(\mathbf{r}) z \phi_\beta(\mathbf{p}). \quad (3.9')$$

Ceci étant, il nous faut chercher à déterminer pour quelle classe de conditions initiales il est possible de justifier une conjecture telle que (3.5). Dans le cas des fluides dilués où il existe un régime cinétique défini par la limite de Boltzmann-Grad, il est naturel d'utiliser les résultats de la section précédente en choisissant des conditions initiales qui permettent l'application du théorème de Lanford. Pour ce faire, il suffit de postuler que les corrélations initiales satisfont, à la limite de Boltzmann-Grad, à une propriété de factorisation analogue à (3.6) (cf. [20]); en combinant les conditions (C_2') et (2.14), on voit immédiatement que cette propriété (qui est une version du chaos moléculaire adaptée au problème de la self-diffusion) est définie avec précision dans le cas du modèle des sphères dures ($\epsilon \equiv \sigma$) par la condition :

(C_3) Etant donnée la fonction continue $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, c)$ définie par (3.9), les corrélations initiales sont telles que l'on a

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \sigma^{2S} \tilde{\rho}_S^{(\sigma)}(\mathbf{x}_1, c_1, \dots, \mathbf{x}_S, c_S) \\ = \lim_{\sigma \rightarrow 0} f_S^{(\sigma)}(\mathbf{x}_1, c_1, \dots, \mathbf{x}_S, c_S) = \prod_{i=1}^S f(\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i, c_i) \end{aligned}$$

uniformément sur tous les ensembles compacts de $\Gamma_S^{(0)}(\tau)$, pour un certain temps $\tau \geq 0$.

On est alors en mesure d'appliquer le théorème de Lanford qui, compte tenu de la propriété 2 de la section 2.4, permet d'établir la conservation au cours du temps de la factorisation des fonctions de corrélations postulée dans (C_3). On aboutit ainsi au

Théorème 3. [20] Si les fonctions de distribution initiales $\tilde{\rho}_S^{(\sigma)}(\mathbf{x}_1, c_1, \dots, \mathbf{x}_S, c_S)$ satisfont aux conditions du théorème 1 ainsi qu'à (C_1) et (C_3), il existe alors un temps $t_0(z, \beta) > 0$ tel que l'on a, pour $0 \leq t \leq t_0(z, \beta)$,

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \sigma^{2S} \tilde{\rho}_S^{(\sigma)}(\mathbf{x}_1, c_1, \dots, \mathbf{x}_S, c_S; t) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} f_S^{(\sigma)}(\mathbf{x}_1, c_1, \dots, \mathbf{x}_S, c_S; t) \\ = \prod_{i=1}^S f(\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i, c_i; t) \end{aligned} \quad (3.10)$$

uniformément sur tous les ensembles compacts de $\Gamma_S^{(0)}(\tau + t)$, la fonction

$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, c; t)$ étant, d'après (3.9), définie par

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, c; t) = cf(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t) + (1 - c)(z \phi_\beta(\mathbf{p}) - f(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t)), \quad (3.11)$$

où $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t)$ est la solution de l'équation de Boltzmann linéaire (2.20) correspondant à la condition initiale $f(\mathbf{r}, \mathbf{p})$.

Ce théorème donne lieu naturellement à la même interprétation et aux mêmes observations que celles développées dans la section 2 à propos des théorèmes 1 et 2, notamment en ce qui concerne le rôle des conditions initiales. Il nous montre que le phénomène de self-diffusion dans les fluides dilués peut être décrit, au niveau cinétique, par l'équation de Boltzmann linéaire (2.20) qui gouverne l'évolution de la fonction $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t)$. La connaissance de cette fonction permet en particulier de déterminer la densité locale des particules de couleur noire $\rho_1^{(0)}(\mathbf{r}, 1; t)$, définie par

$$\rho_1^{(0)}(\mathbf{r}, 1; t) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \sigma^2 \int_{R^3} d\mathbf{p} \tilde{\rho}_1^{(\sigma)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, 1; t) = \int_{R^3} d\mathbf{p} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t); \quad (3.12)$$

cette quantité représente la concentration moyenne des particules noires dans l'espace physique et peut, de ce fait, être identifiée avec la densité de couleur macroscopique $\rho(\mathbf{r}; t)$. Mais, d'après (3.10), la connaissance de f suffit aussi pour déterminer complètement toutes les fonctions de corrélation d'ordre supérieur, et notamment celle d'ordre 2; on vérifie ainsi, conformément aux analyses des §§ 3.3 et 4.4 de *I*, que les fluctuations du nombre d'occupation relatif d'une cellule (ou d'un domaine) quelconque de l'espace physique, deviennent rigoureusement nulles à la limite $\sigma \rightarrow 0$, ce qui constitue la condition nécessaire pour l'existence d'un régime cinétique. En vertu de ces résultats, il est équivalent de dire que les nombres d'occupation relatifs $\sigma^2 n_\Delta^{(\sigma)}(t)$, d'un domaine quelconque Δ , convergent en probabilité vers les nombres d'occupation relatifs moyens définis par l'intégrale de $\rho_1^{(0)}(\mathbf{r}, 1; t)$ sur le domaine considéré, ce qui s'écrit :

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \sigma^2 n_\Delta^{(\sigma)}(t) = \int_\Delta d\mathbf{r} \rho_1^{(0)}(\mathbf{r}, 1; t) = \int_\Delta d\mathbf{r} \int_{R^3} d\mathbf{p} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t) \quad (3.13)$$

en probabilité, où $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t)$ est solution de l'équation de Boltzmann avec la condition initiale $f(\mathbf{r}, \mathbf{p})$. Dans le cas particulier de notre exemple, le nombre $N_{\Lambda_1}^{(\sigma)}(t)$ de particules noires contenues à l'instant t dans l'enceinte Λ_1 satisfait à une relation analogue à (3.13), soit

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \sigma^2 N_{\Lambda_1}^{(\sigma)}(t) = \int_{\Lambda_1} d\mathbf{r} \rho_1^{(0)}(\mathbf{r}, 1; t) = \int_{\Lambda_1} d\mathbf{r} \int_{R^3} d\mathbf{p} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t) \quad (3.13')$$

en probabilité, où $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t)$ est la solution de l'équation cinétique correspondant à la condition initiale $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \chi_{\Lambda_1}(\mathbf{r}) z \phi_\beta(\mathbf{p})$ [20].

Ces relations suffisent pour établir que l'évolution de la distribution des "couleurs" dans un fluide dilué est gouvernée par l'équation irréversible de Boltzmann, si l'état statistique à l'instant $t = 0$ appartient à la classe particulière des conditions initiales définies par (C_3) . On peut ainsi conclure à l'existence d'un processus d'uniformisation des "couleurs" au cours du temps (théorème *H*), dont le caractère irréversible est une conséquence directe de la propriété d'asymétrie temporelle postulée dans la condition (C_3) . S'il est donc légitime, de ce point de vue, d'identifier la densité locale $\rho_1^{(0)}(\mathbf{r}, 1; t)$ à la densité macroscopique $\rho(\mathbf{r}; t)$, il reste toutefois à prouver qu'elle est asymptotiquement une solution de l'équation de la diffusion (3.2), pour des échelles de longueur et de temps suffisamment grandes. C'est le problème posé par la déduction des équations du régime hydrodynamique à partir de l'équation cinétique de Boltzmann, qui implique, comme nous l'avons vu, la mise en oeuvre d'un second processus de "réduction" dans la description du système.

Une solution satisfaisante de ce problème, au moins à l'approximation linéaire, nous est fournie par la méthode bien connue de Hilbert-Enskog, selon laquelle le comportement hydrodynamique du fluide est décrit par la classe particulière des solutions "normales" de l'équation cinétique. Ces solutions sont définies de telle manière que l'évolution temporelle de $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t)$ est déterminée uniquement en fonction des cinq variables hydrodynamiques $n(\mathbf{r}; t), u(\mathbf{r}; t), T(\mathbf{r}; t)$ et de leurs dérivées, et elles sont obtenues sous la forme de développements en puissances d'un paramètre de non-uniformité (cf. § 3.2c de *I* et [31, 32]). Pour notre propos, il est important de rappeler que cette méthode permet : (i) d'établir, à l'approximation d'ordre un, une théorie linéaire des phénomènes de transport qui comporte, à titre de cas particulier, la loi de Fick (3.1) et l'équation de la diffusion (3.2); (ii) d'obtenir, à chaque ordre d'approximation, les équations vérifiées par les variables hydrodynamiques n, u et T , en particulier les équations d'Euler à l'ordre zéro et les équations de Navier-Stokes à l'ordre un, auxquelles sont associées les deux échelles de temps macroscopiques $\epsilon^{-1}t$ et $\epsilon^{-2}t$ respectivement. Bien qu'ils demandent à être plus rigoureusement démontrés, ces résultats complètent ceux du théorème 3 de telle manière que la conjecture (3.5) peut

être considérée comme justifiée pour les fluides dilués. Nous allons voir que la situation est loin d'être aussi satisfaisante dans le cas des fluides de densité finie.

b. Self-diffusion dans les fluides de densité finie. Limite hydrodynamique.

Pour caractériser l'état d'un fluide de densité finie, on est conduit à définir un nouveau type de passage à la limite dans lequel la densité sans dimension $n \epsilon^3$ reste finie ($n = N/V(\Lambda)$ étant la densité numérique du système, et ϵ un facteur d'échelle pour les longueurs). Il s'ensuit que le nombre N croît dans ce cas comme ϵ^{-3} , alors que toutes les longueurs sont contractées suivant le facteur ϵ ; il en est ainsi notamment pour le l.p.m., l , qui tend vers zéro avec ϵ , ce qui est une propriété caractéristique de la limite hydrodynamique. On est donc contraint, dans le cas d'un fluide non-idéal dont la densité reste finie, à considérer directement le passage à la limite hydrodynamique, fait qui n'est d'ailleurs pas sans rapport avec la difficulté à prouver l'existence d'un régime cinétique pour des gaz modérément denses. Pour compléter la définition de cette limite, il faut encore imposer une dilatation des durées suivant le facteur ϵ^{-2} ; finalement, la limite hydrodynamique est définie par les relations :

$$N \epsilon^3 = \text{cte} \quad , \quad t_\epsilon = \epsilon^{-2} t \quad , \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad (3.14)$$

Ce passage à la limite n'affecte pas les propriétés thermodynamiques du système, qui restent inchangées; mais, comme les longueurs sont toutes contractées suivant le facteur ϵ , le fluide doit être considéré comme un système indéfiniment étendu dont l'état thermodynamique est défini par la mesure d'équilibre grand-canonique de paramètres z et β .

Ceci étant, la distribution macroscopique des couleurs est décrite comme précédemment par une densité locale continue $\rho(\mathbf{r};t)$, dont l'évolution est déterminée par l'équation de la diffusion (3.2), avec un coefficient de self-diffusion $D(z, \beta)$ qui ne dépend que des paramètres z et β . Dans la situation considérée, la théorie de Green-Kubo s'applique (cf. § 2.6 de I), de sorte que $D(z, \beta)$ peut être défini en termes de la fonction d'autocorrélation des vitesses par

$$D(z, \beta) = \frac{1}{6} \int_0^\infty \langle \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(0) \rangle dt, \quad (3.15)$$

où le crochet $\langle \dots \rangle$ représente une valeur moyenne prise sur l'ensemble

d'équilibre grand-canonique; dans (3.15), $\mathbf{v}(t)$ ($= \mathbf{p}(t)/m$) est la vitesse à l'instant t d'une particule quelconque du système, considérée comme une particule-test animée à l'instant $t = 0$ de la vitesse $\mathbf{v}(0)$ et se déplaçant dans le fluide indéfiniment étendu.

D'après l'argumentation du début de cette section, cette description macroscopique ne peut être fondée rigoureusement que si l'on est en mesure de prouver une conjecture du type (3.5) pour la limite hydrodynamique (cas où $\nu = 3$). En reprenant les raisonnements et les notations du paragraphe précédent, on est en fait conduit à considérer une conjecture plus générale, analogue à (3.13), qui s'écrit pour la limite (3.14) :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^3 n \Delta^{(\epsilon)}(\epsilon^{-2} t) = \int_{\Delta} \rho(\mathbf{r};t) d\mathbf{r} \quad (3.16)$$

en probabilité, où $\rho(\mathbf{r};t)$ est une solution de l'équation de la diffusion (3.2); dans le cas particulier de notre exemple, on a une relation équivalente pour le nombre $N_{\Lambda_1}^{(\epsilon)}(t)$, soit :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^3 N_{\Lambda_1}^{(\epsilon)}(\epsilon^{-2} t) = \int_{\Lambda_1} \rho(\mathbf{r};t) d\mathbf{r} \quad (3.16')$$

en probabilité, où $\rho(\mathbf{r};t)$ est la solution de (3.2) correspondant à la condition initiale $\rho(\mathbf{r}) = \chi_{\Lambda_1}(\mathbf{r})$ (cf. [20]).

Mais contrairement au cas des fluides dilués, où les relations (3.13) apparaissent comme une conséquence du théorème de Lanford, on ne dispose pour la limite hydrodynamique d'aucun résultat général permettant de prouver la validité de la conjecture (3.16), ni même l'existence de l'expression (3.15) définissant le coefficient de self-diffusion. Il existe d'ailleurs des raisons de douter du bien-fondé de (3.16) lorsque le système est à 2 dimensions d'espace, puisque l'on ne peut établir dans ce cas la convergence de l'expression (3.15), (cf. [25]). Nous allons voir cependant que quelques progrès ont pu être réalisés dans ce domaine grâce, d'une part, à une formulation plus précise des propriétés dynamiques requises pour la justification de (3.16), et, d'autre part, à la démonstration d'un résultat rigoureux pour un modèle de Lorentz simplifié.

- *α . Self-diffusion et mouvement brownien.* Ainsi que l'ont montré Lebowitz et Spohn [19], il est possible de préciser les conditions de validité de la conjecture (3.16), en se plaçant dans le cas où l'état statistique initial

satisfait à la relation (3.6). Comme les moments de $n_{\Delta}^{(e)}(t)$ peuvent s'exprimer en fonction des probabilités de transition associées au mouvement d'une particule-test, la méthode utilisée consiste à choisir l'une des particules du système comme particule-test et à suivre son évolution dans le système indéfiniment étendu et en équilibre thermique. Soient $\mathbf{r}(t)$ et $\mathbf{v}(t)$, la position et la vitesse à l'instant t de cette particule-test, dont la vitesse initiale $\mathbf{v}(0)$ est distribuée suivant la maxwellienne $\phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{p}/m)$; la distribution grand-canonique du système global restant inchangée au cours du temps, la vitesse $\mathbf{v}(t)$ est un certain processus stochastique stationnaire.

Notre problème revient alors à étudier le comportement limite des moments du déplacement $\mathbf{r}(t)$ de la particule-test, défini par $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r} + \int_0^t \mathbf{v}(t') dt'$. En effectuant les changements d'échelle correspondant à la limite hydrodynamique (3.14), ce déplacement devient fonction du paramètre ϵ , et s'écrit :

$$\mathbf{r}^{(e)}(t) = \mathbf{r} + \epsilon \int_0^{\epsilon^{-2}t} \mathbf{v}(t') dt' . \quad (3.17)$$

Ceci étant, on peut montrer que la conjecture (3.16) est justifiée, si $\mathbf{r}^{(e)}(t)$ satisfait aux deux conditions suivantes :

Condition 1. A la limite hydrodynamique, le processus stochastique $\mathbf{r}^{(e)}(t) - \mathbf{r}$ converge vers le mouvement brownien à 3 dimensions $\mathbf{r}_0 [D(z, \beta) t]$ de covariance $2Dt$, ce qui s'écrit :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbf{r}^{(e)}(t) = \mathbf{r} + \mathbf{r}^{(0)} [D(z, \beta) t], \quad (3.18)$$

au sens de la convergence faible sur les mesures de chemins.

Condition 2. Les processus stochastiques correspondant au mouvement de deux particules-test quelconques convergent, à la limite hydrodynamique, vers deux mouvements browniens *indépendants* de même covariance $2Dt$.

Ces deux conditions permettent notamment d'établir que la probabilité de transition relative à $\mathbf{r}^{(e)}(t)$ converge à la limite hydrodynamique vers la probabilité de transition du mouvement brownien, qui est elle-même solution de l'équation de la diffusion (3.2). Il convient en outre de souligner qu'il y a équivalence entre la validité de (3.18) et celle du théorème limite central pour le processus stochastique stationnaire $\mathbf{v}(t)$.

Ceci étant, la formulation des conditions précédentes appelle, à titre de conclusion, les deux remarques suivantes :

(i) Les conditions 1 et 2 constituent deux hypothèses successives, de plus en plus fortes, concernant les propriétés dynamiques du système, dont la justification s'avère particulièrement difficile. En fait, on ne connaît aucun système physique réel pour lequel la plus simple d'entre elles, à savoir la condition 1, puisse être prouvée. Il est par contre possible de construire des modèles mathématiques simples, malheureusement très idéalisés, où de telles hypothèses sont effectivement vérifiées. Parmi les plus connus, il convient de citer les modèles unidimensionnels de "barres rigides", pour lesquels on peut établir la validité de la condition 1, ainsi que le modèle du gaz périodique de Lorentz étudié par Bunimovich et Sinai [33], que nous allons décrire ci-dessous.

(ii) Les résultats précédents ont été obtenus pour des conditions initiales telles que (3.6), où la couleur d'une particule ne dépend que de sa position. Pour les généraliser, il conviendrait de traiter également des situations où la couleur dépend à la fois de la position et de la vitesse de la particule, comme nous l'avons fait pour les fluides dilués en introduisant la fonction $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, c)$. Mais, pour savoir comment les conditions 1 et 2 doivent être modifiées dans ce cas, il est nécessaire de pouvoir déterminer, au préalable, quelle classe de conditions initiales de ce type est compatible avec la conjecture (3.16), question qui reste actuellement sans réponse dans le cas des fluides de densité finie. Toutefois, les solutions obtenues pour les fluides dilués constituent un exemple de ce que pourraient être de "bonnes" conditions initiales, où devraient se retrouver certaines propriétés caractéristiques de la condition (C_3) , notamment celle d'asymétrie temporelle.

- β . Cas du gaz périodique de Lorentz. Théorème de Bunimovich et Sinai.

Conformément à la définition générale des modèles de Lorentz (cf. I § 4.2b), on considère maintenant un système de particules ponctuelles et indépendantes, qui se déplacent dans le potentiel créé par des centres diffuseurs fixes distribués au hasard. Ces centres diffuseurs sont ici supposés sphériques et parfaitement réfléchissants, de sorte que les particules rebondissent élastiquement sur la surface de ces sphères, en conservant la valeur absolue de leur vitesse. On est ainsi conduit à étudier le comportement d'un système de particules dont la densité numérique est $n (= N/V(\Lambda))$, ou la

fugacité z , et dont les vitesses sont uniformément distribuées sur une certaine sphère de l'espace des vitesses.

Dans le modèle de Lorentz usuel où les centres diffuseurs sont distribués au hasard, on sait seulement traiter le cas des fluides dilués, pour lesquels le théorème 3 s'applique et permet de prouver la validité de (3.13) à la limite de Boltzmann-Grad. Aucun résultat de ce genre n'a par contre été obtenu pour des fluides de densité finie, où le problème posé par la justification de la conjecture (3.16) reste ouvert.

Une solution rigoureuse de ce problème a cependant pu être établie par Bunimovich et Sinai [33] pour un modèle à deux dimensions d'espace, dans lequel les centres diffuseurs, assimilés à des disques strictement convexes, sont distribués périodiquement dans l'espace. Pour définir complètement une telle distribution, on considère une cellule carrée, de côté a , contenant un certain nombre de disques, et l'on répète cette configuration périodiquement dans tout le plan ; il faut encore préciser que la configuration des disques à l'intérieur du carré de base n'est pas totalement arbitraire, en ce sens qu'elle doit être telle que soit satisfaite l'hypothèse dite d'"horizon fini" (celle-ci signifiant que la longueur d'un segment rectiligne évitant tous les disques ne peut être infinie). Ce modèle étant ainsi défini, on considère pour ce système à deux dimensions, la limite équivalente à la limite hydrodynamique (3.14), dans laquelle le côté du carré de base devient $a^{(\epsilon)} = \epsilon a$ et se trouve donc contracté par un facteur ϵ (et de même pour le rayon des disques diffuseurs). Le théorème de Bunimovich et Sinai permet alors de prouver que le processus stochastique $\mathbf{r}^{(\epsilon)}(t) - \mathbf{r}$ décrivant la trajectoire d'une particule-test converge faiblement vers le mouvement brownien $\mathbf{r}^{(0)}[Dt]$, de sorte que ce processus satisfait à la condition 1. De plus, comme les particules-test d'un modèle de Lorentz sont indépendantes par hypothèse, la condition 2 se trouve également satisfaite. Notons que la démonstration de ce résultat dépend essentiellement des propriétés ergodiques de certaines classes de billards de Sinai, dits à caractères dispersifs, qui ont leur origine dans la stricte convexité des disques diffuseurs.

Suivant les remarques de Lebowitz et Spohn [20], le théorème précédent, démontré dans [33] pour un modèle à deux dimensions, peut s'étendre à un modèle à trois dimensions ; dans ce cas, les disques diffuseurs sont remplacés par des sphères distribuées dans une cellule cubique, de côté a , cette configuration étant reproduite périodiquement dans tout l'espace. En passant à la limite hydrodynamique définie par (3.14), dans laquelle toutes les

longueurs sont contractées par un facteur ϵ (en particulier $a^{(\epsilon)} = \epsilon a$), on peut alors montrer que la conjecture (3.16) (ou (3.16')) est une conséquence du théorème de Bunimovich et Sinai. On peut également tenir compte de l'existence éventuelle d'une anisotropie à l'échelle macroscopique, en remplaçant le coefficient D par une matrice \mathbf{D} strictement positive, l'équation de la diffusion (3.2) s'écrivant dans ce cas :

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{r};t)}{\partial t} = \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{D} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \rho(\mathbf{r};t). \quad (3.19)$$

Avec ces définitions, on aboutit finalement au

Théorème 4. [20] Dans le cas du modèle périodique de Lorentz défini ci-dessus, il existe une matrice \mathbf{D} strictement positive telle que l'égalité (3.16) est vérifiée en probabilité à la limite hydrodynamique, $\rho(\mathbf{r};t)$ étant une solution de l'équation de la diffusion (3.19).

3.2 Extensions possibles aux autres phénomènes de transport.

Il nous reste maintenant à examiner dans quelle mesure les méthodes mises en oeuvre dans la section précédente peuvent être adaptées à la description des autres phénomènes de transport et à la déduction des équations du régime hydrodynamique. Étant donné les difficultés rencontrées, et le peu de résultats obtenus, dans la théorie apparemment si simple de la self-diffusion, cette étude ne peut avoir d'autre objet que de cerner les problèmes et de dégager des voies d'approche à explorer ultérieurement. C'est ce que nous allons faire brièvement, en nous inspirant des idées avancées par Lebowitz et Spohn dans [20].

La situation est à nouveau bien différente, selon que l'on considère le cas des gaz dilués ou celui des fluides de densité finie. Dans le premier cas où la limite caractéristique est celle de Boltzmann-Grad, on peut toujours appliquer le théorème de Lanford, ou l'un de ses prolongements, et établir ainsi l'existence d'un régime cinétique gouverné par l'équation irréversible de Boltzmann. Pour obtenir une description des phénomènes de transport, il suffit alors de décrire le passage du régime cinétique au régime hydrodynamique, ce que réalise formellement la théorie de Hilbert-Enskog. Toutefois, la mise en oeuvre de ce programme rencontre deux difficultés importantes. La première tient à ce que la validité du théorème de Lanford est limitée à de courtes durées, approximativement de l'ordre du temps de l.p.m., donc nécessairement petites à l'échelle macroscopique. Bien qu'introduite pour des

raisons essentiellement techniques (puisqu'elle sert à assurer la convergence de séries de perturbation dépendant du temps), cette limitation pourrait avoir néanmoins une origine plus profonde, liée au fait qu'aucun théorème d'existence n'a pu être démontré concernant les solutions globales de l'équation de Boltzmann non linéaire. La seconde de ces difficultés apparaît dans le problème de justification rigoureuse de la méthode de Hilbert-Enskog, où il faudrait donner une explication claire de l'existence de deux échelles de temps hydrodynamiques, l'une, la plus courte, étant associée au mouvement réversible du fluide gouverné par les équations d'Euler, et l'autre à son évolution irréversible et dissipative décrite par les équations de Navier-Stokes.

Dans le cas d'un fluide de densité finie, nous avons vu que la limite caractéristique est la limite hydrodynamique définie par (3.14) et que l'on doit ainsi passer directement de la description microscopique à la description hydrodynamique. La définition de l'état hydrodynamique pour un fluide simple requiert seulement la connaissance de cinq variables localement conservées $\rho_i(\mathbf{r};t)$, ($i = 1, 2, \dots, 5$), où $\rho_1(\mathbf{r};t)$ est la densité, ($\rho_2(\mathbf{r};t)$, $\rho_3(\mathbf{r};t)$, $\rho_4(\mathbf{r};t) \equiv \rho_1(\mathbf{r};t)u(\mathbf{r};t)$ la densité de vitesse et $\rho_5(\mathbf{r};t) \equiv \rho_1(\mathbf{r};t)e(\mathbf{r};t)$ la densité d'énergie du fluide au point \mathbf{r} et à l'instant t . Ces variables, qui jouent le même rôle que la densité de couleur macroscopique $\rho(\mathbf{r};t)$, doivent satisfaire aux équations hydrodynamiques bien connues de Navier-Stokes, comprenant une partie dissipative incluant les effets des divers phénomènes de transport.

Du point de vue microscopique, ces variables sont définies comme valeurs moyennes des grandeurs dynamiques correspondantes, ces moyennes étant prises sur l'état statistique représenté par les fonctions de corrélation $\tilde{\rho}_S^{(e)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_S; t)$. En transposant les raisonnements de la section précédente, on est alors conduit à formuler des conjectures qui généralisent celle énoncée en (3.16), et qui portent sur des quantités jouant un rôle analogue aux nombres d'occupation $n_{\Delta}^{(e)}(t)$ de la théorie de la self-diffusion. Cette démarche nous amène finalement à introduire les cinq quantités $n_{\Delta_1}^{(e)}(t)$, ($n_{\Delta_2}^{(e)}(t)$, $n_{\Delta_3}^{(e)}(t)$, $n_{\Delta_4}^{(e)}(t)$) et $n_{\Delta_5}^{(e)}(t)$ qui correspondent respectivement au nombre, à la vitesse du centre de masse et à l'énergie des particules contenues à l'instant t dans le domaine Δ (de l'espace physique), et à proposer la conjecture suivante :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^3 n_{\Delta_i}^{(e)}(\epsilon^{-2} t) = \int_{\Delta} \rho_i(\mathbf{r};t) d\mathbf{r} \quad (3.20)$$

en probabilité, où les $\rho_i(\mathbf{r};t)$ sont des solutions des équations complètes de Navier-Stokes pour de grandes échelles de temps, qui devraient se raccorder aux solutions des équations d'Euler sur une échelle de temps plus courte qui reste à déterminer.

Il va de soi que la mise en oeuvre de ce programme, et surtout la justification d'une conjecture telle que (3.20), représente une tâche considérable. Celle-ci rencontre naturellement les difficultés que nous avons déjà signalées à propos du choix de "bonnes" conditions initiales, mais aussi celles liées à la définition du régime hydrodynamique et des échelles de temps correspondantes. On constate ainsi une fois de plus que la théorie des fluides de densité finie soulève des problèmes spécifiques dont la solution n'est pas en vue actuellement, et qui constituent l'obstacle principal à la formulation rigoureuse des principes de la MSHE. Il convient toutefois de mentionner que la validité des équations d'Euler a pu être établie à la limite hydrodynamique pour un système unidimensionnel de "barres rigides" [34]. Bien que les propriétés de ce modèle soient évidemment très éloignées de celles d'un système physique réel, le résultat ainsi obtenu est cependant encourageant en ce sens qu'il nous montre que la réalisation d'un tel programme n'est pas impossible en principe.

4. Conclusions

Ainsi que nous l'avons fait remarquer à la fin de l'Introduction, les problèmes posés par la formulation rigoureuse du statut de la MSHE peuvent finalement se regrouper dans les deux questions fondamentales (A) et (B), les sujets traités dans cet article concernant essentiellement la question (A). Au terme de cet exposé, il convient donc d'essayer de faire le point sur l'état actuel de nos connaissances dans ce domaine, en examinant d'abord la question (A) à la lumière des résultats présentés dans les sections 2 et 3, et en considérant ensuite certains aspects des problèmes relatifs à la question (B).

4.1. En ce qui concerne (A), il est clair que l'intérêt majeur des théorèmes 1-4 des sections précédentes est de montrer que des réponses satisfaisantes peuvent être effectivement apportées à cette question dans le cas des gaz dilués et pour certains modèles particuliers de fluides de densité finie. Il apparaît ainsi comme possible de surmonter les contradictions existant entre réversibilité dynamique et irréversibilité macroscopique, et de mettre en oeuvre un programme visant à *déduire* le comportement irréversible d'un fluide à partir de sa description microscopique.

D'après les analyses développées dans cet article, une telle déduction comporte nécessairement les deux ingrédients suivants : d'une part, l'utilisation des propriétés asymptotiques des systèmes à un grand nombre de degrés de liberté, qui s'expriment par l'existence de certains processus limites, et, d'autre part, le choix de "bonnes" conditions initiales dans lesquelles la "flèche du temps" doit intervenir explicitement. L'étude du cas des gaz dilués et de la limite de Boltzmann-Grad, telle qu'elle est exposée dans la section 2, fournit à cet égard une illustration particulièrement claire du rôle respectif de ces deux ingrédients dans les raisonnements permettant de prouver l'existence d'un régime cinétique. En effet, le premier d'entre eux, qui se réfère dans ce cas aux propriétés asymptotiques d'un fluide idéal, se trouve manifestement impliqué dans la définition du processus limite qui est décrit, à la limite de Boltzmann-Grad, par la hiérarchie irréversible de Boltzmann (2.8), et dans la "propagation du chaos moléculaire" (2.15) qui est une propriété de cette hiérarchie. Quant au second de ces ingrédients, il s'identifie évidemment à la condition (C_2') , qui fait intervenir explicitement la "flèche du temps" dans la construction des ensembles pour lesquels la propriété initiale de convergence uniforme reste conservée, et à la condition de factorisation (2.14) qui est nécessaire pour établir l'existence d'un régime cinétique.

Ce sont plus particulièrement les problèmes liés au choix de "bonnes" conditions initiales que nous avons traités dans cet article, en nous appuyant sur les résultats obtenus dans les travaux récemment consacrés à ce sujet. En ce qui concerne la déduction rigoureuse d'équations cinétiques irréversibles, nous avons ainsi montré dans la section 2 que les conditions initiales interviennent en fait dans les raisonnements de deux manières distinctes. Elles ont d'une part pour effet, comme conséquence de leur contenu statistique, d'assurer la validité d'une certaine description réduite autonome de l'état du fluide ; tel est le cas, pour les gaz dilués, de l'hypothèse du chaos moléculaire (2.14), qui est nécessaire pour prouver l'existence d'un régime cinétique dans lequel les fluctuations du fluide autour de son état moyen sont évanescences à la limite de Boltzmann-Grad. Elles permettent d'autre part, en raison de leur propriété d'asymétrie temporelle, d'introduire la flèche du temps dans des équations issues de la dynamique, et notamment, dans le cas particulier de la condition (C_2') , de sélectionner parmi les solutions de la hiérarchie (réversible) B.B.G.K.Y. celles qui convergent, à la limite de Boltzmann-Grad, vers les solutions correspondantes de la hiérarchie (irréversible) de Boltzmann. L'utilisation de conditions initiales asymétriques par renversement du temps

apparaît ainsi comme une nécessité fondamentale de la MSHE, qui découle directement de l'application du principe de causalité à la construction des ensembles statistiques initiaux correspondant à une expérience déterminée.

Dans le cas des gaz dilués, il résulte du théorème 2 de Lanford et de la propriété 1 de la hiérarchie de Boltzmann, que l'équation cinétique de Boltzmann peut être effectivement déduite de la hiérarchie B.B.G.K.Y. si l'état statistique initial du fluide satisfait à la fois à la condition (C_2') et à la propriété de factorisation (2.14). D'après le contenu même de (C_2') , il est clair que ceci revient à postuler que, à la limite de Boltzmann-Grad, le chaos moléculaire est réalisé à l'instant initial, sauf pour les configurations post-collisionnelles correspondant à une certaine durée τ précédant cet instant ; notons que c'est cette propriété de chaos moléculaire asymétrique par rapport au temps que Grad a désigné par le terme de "one-sided chaos" [11]. On retrouve bien ainsi l'élément d'asymétrie temporelle implicitement contenu dans la célèbre hypothèse du chaos moléculaire de la théorie de Boltzmann, où la propriété en question n'est postulée que pour les particules qui sont sur le point d'entrer en collision. Il convient toutefois, à propos de ce rapprochement avec la théorie cinétique usuelle, de rappeler deux différences importantes : (i) Dans la déduction formelle de l'équation de Boltzmann, le chaos moléculaire doit être postulé à chaque instant t , ce qui est en toute rigueur contradictoire avec l'évolution dynamique ; dans l'approche rigoureuse, au contraire, le chaos moléculaire est postulé à l'instant initial, et c'est précisément le rôle du théorème de Lanford de montrer que sa conservation au cours de l'évolution ultérieure est une conséquence des lois du mouvement. (ii) Le terme de chaos moléculaire doit être ici entendu en un sens plus large que celui qu'on donne habituellement, puisque la propriété de factorisation (2.14) est supposée satisfaite par toutes les fonctions de corrélation $f_S^{(0)}$, quel que soit S , et non pas seulement par la fonction de corrélation à deux particules $f_2^{(0)}$ comme c'est le cas dans le sens usuel ; on en conclut que le théorème de Lanford permet non seulement de prouver l'existence d'un régime cinétique pour l'état moyen d'un fluide dilué, mais aussi d'établir que l'état réel d'un système converge en probabilité vers cet état moyen (cf. les §§ 3.3. et 4.4 de I), ce qui justifie a posteriori les arguments bien connus fondés sur la notion d'état le plus probable.

A l'appui de ces résultats et pour mieux en apprécier la portée réelle, il convient encore de faire les deux remarques suivantes. La première de celles-ci, qui est due à Grad [11], a pour but de souligner le caractère nécessaire de

l'hypothèse du chaos moléculaire en théorie des gaz dilués. Elle consiste à considérer l'argument selon lequel le chaos moléculaire pourrait être conçu intuitivement comme résultant de l'effet des collisions, puisque celles-ci tendent à provoquer un affaiblissement des corrélations initiales et à établir de ce fait un certain régime chaotique (rôle des propriétés ergodiques) ; mais il est clair que ce mécanisme demande une durée suffisamment longue pour produire ses effets, durée qui doit être au moins égale à plusieurs temps de l.p.m.. Or ce temps de l.p.m. est précisément l'échelle de temps caractéristique de l'équation de Boltzmann ; il s'ensuit que la validité de cette équation ne peut en aucun cas résulter d'un tel argument, dont le domaine d'application se limite à la théorie linéaire du transport, et que la propriété de chaos moléculaire doit être nécessairement postulée à l'instant initial si l'on veut obtenir une équation cinétique décrivant l'évolution du fluide à une échelle de temps de l'ordre du temps de l.p.m.. La seconde de ces remarques porte sur la théorie cinétique des milieux modérément denses et tend à faire ressortir que les conditions initiales y jouent un rôle tout à fait conforme aux conclusions générales des paragraphes précédents. Si l'on se reporte en effet à la déduction des équations cinétiques suivant le formalisme de Bogolioubov [10, 32, 35, 36], on voit qu'elle comporte, comme hypothèse essentielle, une condition aux limites du type (I. 3.28), qui revient à admettre l'absence de corrélations à tout instant t pour lequel les distances interparticulaires deviennent infiniment grandes (par rapport à la portée r_0 des forces d'interaction entre particules). Or, il est clair que cette hypothèse a des conséquences en tous points comparables à celles des conditions (C_2') et (2.14) : d'une part, en effet, c'est une forme atténuée de l'hypothèse du chaos moléculaire, en ce sens que la factorisation des fonctionnelles $F_S(x_1, \dots, x_S | F_1)$ de la théorie de Bogolioubov n'est postulée que pour les instants où les particules sont infiniment éloignées ; d'autre part, elle introduit explicitement la flèche du temps dans le formalisme puisque, d'après (I. 3.28), l'absence de corrélations est postulée dans le passé et non dans le futur. On retrouve bien ainsi l'asymétrie temporelle propre aux conditions initiales de la MSHE, propriété qui est encore illustrée par le fait suivant : Si l'on considérait l'hypothèse inverse dans laquelle la factorisation des $F_S(x_1, \dots, x_S | F_1)$ se produit dans l'avenir (ce qui revient à changer U_{-t} en U_t dans (I. 3.28)), ce serait alors l'équation de Boltzmann avec le terme de collisions changé de signe que l'on obtiendrait [36, 37]. Notons encore que l'on aboutit à des conclusions analogues avec la théorie cinétique fondée sur le

développement des fonctions de corrélation en fonctions d'essaim (ou "clusters"), dans laquelle on doit également supposer que l'état statistique initial est sans corrélations, sauf sur de courtes distances de l'ordre de r_0 (ou du diamètre moléculaire σ) [25, 38] ; si une telle condition n'était pas réalisée, c'est-à-dire s'il existait à l'instant initial des corrélations de portée beaucoup plus grande que r_0 , la longueur de corrélation constituerait de ce fait une longueur caractéristique supplémentaire du système et l'on ne pourrait s'attendre dans ce cas à ce qu'un régime cinétique soit établi asymptotiquement [38].

Les remarques précédentes nous montrent que les résultats de la section 2 n'ont pas seulement pour intérêt d'apporter une réponse satisfaisante à la question (A) dans le cas particulier des gaz dilués, mais qu'ils permettent également de mettre en évidence certaines propriétés générales des conditions initiales en MSHE, qui doivent se retrouver, d'une manière ou d'une autre, dans toutes les situations physiques considérées. On est donc fondé à penser que les analyses développées à propos des gaz dilués sont aussi susceptibles de suggérer quelle devrait être la nature des réponses à la question (A) dans des cas plus généraux. C'est ainsi que nous avons montré dans la section 3 comment la démarche définie en détail dans la section 2 pouvait être appliquée à l'étude de la limite hydrodynamique et à la description des phénomènes de transport dans le cas des fluides de densité finie. Etant donné la complexité des problèmes posés par une telle extension, la plupart des travaux consacrés à ce sujet n'ont porté que sur l'analyse du phénomène de self-diffusion, pour lequel on est conduit à essayer de prouver la validité d'une conjecture du type (3.16). Bien que le seul résultat (physiquement significatif) obtenu dans ce domaine, à savoir le théorème de Bunimovich et Sinai (correspondant au théorème 4 de cet article), ne concerne qu'un modèle simple du phénomène de self-diffusion, l'existence même de ce théorème nous autorise cependant à penser que l'établissement de la compatibilité entre les descriptions microscopique et macroscopique d'un système ne se heurte, dans le cas général, à aucune impossibilité de principe, et que les difficultés rencontrées dans l'exécution d'un tel programme sont, quelle que soit leur importance, essentiellement d'ordre technique.

Toutefois, certaines de ces difficultés, et particulièrement celles qui se rapportent à la description du système au niveau cinétique, nous laissent présumer que les méthodes exposées ci-dessus ne sont pas suffisantes, à elles seules, pour rendre compte du comportement des fluides de densité finie. En

effet, ainsi que nous l'avons déjà souligné, la description statistique rigoureuse de tels systèmes se heurte à des obstacles spécifiques qui n'ont pas été surmontés jusqu'à maintenant, et qui font, de la théorie des fluides de densité finie, l'un des problèmes majeurs de la MSHE. On peut voir l'origine de ces difficultés dans le fait que la limite correspondant naturellement au cas d'un fluide de densité finie est la limite hydrodynamique, qui nous contraint à étudier le comportement macroscopique du système au seul niveau hydrodynamique ; cette limite n'est donc bien adaptée qu'à l'élaboration d'une théorie rigoureuse des phénomènes de transport fondée sur le passage direct des variables microscopiques aux variables hydrodynamiques. Or ce passage implique une réduction radicale de la description du système, par laquelle se trouve exclue toute référence possible à l'existence éventuelle d'un régime intermédiaire, tel que le régime cinétique. De ce point de vue, la limite hydrodynamique tend donc à masquer tous les phénomènes qui peuvent se développer à un niveau plus fin, et auxquels ne correspond aucun processus limite défini dans un fluide de densité finie ; il en est ainsi notamment du régime cinétique dans les milieux modérément denses, pour lequel le nombre N et le diamètre σ des particules doivent nécessairement rester finis.

Il est alors naturel de penser qu'il manque un ingrédient essentiel à la théorie rigoureuse des fluides de densité finie, et de rechercher cet ingrédient dans les propriétés dynamiques de systèmes plus denses dans lesquels les effets "dispersifs" des collisions jouent un rôle plus déterminant que dans les fluides dilués. Il est significatif, à cet égard, de remarquer que le théorème de Lanford ne fait intervenir en aucune manière les propriétés ergodiques des systèmes de sphères dures, démontrées par Sinai (cf. I, § 2.4d et [2a, 39]), et que la validité de ce théorème repose essentiellement sur le passage à la limite de Boltzmann-Grad et sur le choix de "bonnes" conditions initiales. On se trouve donc dans ce cas dans une situation extrême, valable pour les gaz dilués, où le comportement du système ne dépend pratiquement que de ses propriétés asymptotiques (pour N très grand), et de l'absence des effets de recollision à la limite considérée. Il ne peut en être de même pour les fluides de densité finie dont le comportement aux niveaux cinétique et hydrodynamique doit dépendre également de propriétés de type ergodique d'une manière qui reste à déterminer. C'est évidemment dans l'étude de ces problèmes que les acquis récents de la théorie des systèmes dynamiques, mentionnés dans l'introduction, prennent toute leur importance, en permettant notamment d'analyser comment l'extrême instabilité des trajectoires de systèmes non

linéaires peut contribuer au comportement irréversible du fluide. On en conclut que la description rigoureuse des fluides de densité finie passe par l'élaboration d'une théorie des systèmes dynamiques à un grand nombre de degrés de liberté, dans laquelle entrent en jeu les effets conjugués (ou compétitifs) de deux types d'ingrédients : l'un, de nature dynamique, qui permet de rendre compte des propriétés de systèmes à caractères fortement stochastiques, l'autre, de nature statistique, qui est nécessaire pour qu'il soit possible de définir des grandeurs macroscopiques avec des fluctuations très petites, évanescentes à une certaine limite.

4.2. Il nous reste maintenant à considérer les problèmes posés par la question (B), c'est-à-dire à essayer de comprendre pourquoi se trouvent toujours réalisés, dans la nature ou au laboratoire, des états statistiques initiaux qui donnent lieu à une évolution irréversible. Il convient tout d'abord d'observer que cette question, qui intéresse les fondements mêmes de l'irréversibilité, appelle les deux remarques préliminaires suivantes. D'une part, elle concerne naturellement aussi bien le contenu statistique des conditions initiales que leur propriété d'asymétrie par renversement du temps, ces deux aspects demandant à être clairement distingués. D'autre part, les réponses qui peuvent lui être apportées semblent devoir faire appel à des principes étrangers à la description dynamique du système, alors que les réponses à la question (A) ne mettent en jeu, comme nous l'avons vu, que des propriétés intrinsèques du système considéré, qu'elles soient de nature dynamique ou statistique. Selon cette dernière remarque, on voit que l'on est conduit à essayer de préciser, compte tenu des propriétés caractéristiques des systèmes macroscopiques, à quelles exigences de principe devrait répondre l'intervention extérieure au système qui est ainsi mise en cause. C'est par un examen rapide de cet aspect de la question (B) que nous allons conclure cet exposé, en traitant d'abord du contenu statistique de ce problème.

La justification du choix de conditions initiales satisfaisant à une certaine propriété d'indépendance statistique, tel que le chaos moléculaire, peut être abordée de deux points de vue différents : celui de la préparation du système dans un état physique donné, qui implique évidemment une intervention extérieure sur l'état du système, et celui d'un problème de la théorie des probabilités, où l'état statistique initial apparaît comme une conséquence de certaines propriétés typiques des fonctions à un très grand nombre de variables. C'est naturellement ce dernier point de vue qui permet de préciser quel est le rôle des propriétés intrinsèques du système dans le choix de conditions

initiales qui conduisent à une évolution irréversible. Ce sujet a été exploré essentiellement par Grad, en vue de la justification de l'hypothèse du chaos moléculaire [11, 40].

Le résultat ainsi recherché peut s'énoncer "grosso modo" de la manière suivante : En considérant l'état statistique initial, $\rho^{(N)}(P)$, comme choisi "au hasard" parmi toutes les densités en phase compatibles avec l'état initial réel du système, il est alors extrêmement "probable" que ce $\rho^{(N)}(P)$ est tel que la propriété de chaos moléculaire soit satisfaite ; d'une manière plus précise, si l'on considère les suites de tels $\rho^{(N)}(P)$ où N tend vers l'infini, il s'agit de prouver que la condition de chaos moléculaire est vérifiée par "la plupart" d'entre elles, avec une précision de plus en plus grande lorsque N croît ; pour donner un sens tout à fait clair à cet énoncé, on devrait naturellement se référer à la définition d'une mesure sur l'espace fonctionnel des $\rho^{(N)}(P)$. Toutefois, le problème ainsi posé est trop imprécis, car il est facile de voir que le résultat précédent ne peut être vrai pour n'importe quelle classe de fonctions : par exemple, dans le cas où les $\rho^{(N)}(P)$ appartiennent à la classe des fonctions uniformément bornées dans $\Gamma^{(N)}$ quel que soit N , on montre que, pour toute suite de cette classe, les densités réduites correspondantes $\rho_2^{(N)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ et $\rho_1^{(N)}(\mathbf{x}_1)$ ne peuvent converger que vers la constante 1. On établit en fait, en suivant un raisonnement qualitatif de Grad sur lequel nous reviendrons plus loin, que les fonctions $\rho^{(N)}(P)$ doivent être exponentiellement croissantes avec N , si l'on veut obtenir une densité réduite à une particule, $\rho_1(\mathbf{x}_1)$, qui soit *non-maxwellienne*. Finalement, le problème considéré n'a donc de sens que si les $\rho^{(N)}(P)$ appartiennent à cette classe particulière de fonctions, et c'est dans ce cas que Grad a pu démontrer le résultat désiré [40], dont la formulation précise est alors la suivante :

On se donne une densité réduite à une particule, $\rho_1(\mathbf{x}_1)$, qui est fixée pour tout N ; on considère ensuite la classe, $\{\rho^{(N)}(P)\}$, de toutes les densités en phase (symétriques) qui sont compatibles avec $\rho_1(\mathbf{x}_1)$, c'est-à-dire telles que $\rho_1(\mathbf{x}_1) = \int \dots \int \rho^{(N)}(P) d\mathbf{x}_2 \dots d\mathbf{x}_N$, ainsi que la classe, $\{\rho_2^{(N)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\}$, des densités réduites à deux particules définies par $\rho_2^{(N)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \int \dots \int \rho^{(N)}(P) d\mathbf{x}_3 \dots d\mathbf{x}_N$. Le résultat annoncé consiste alors à montrer que, si $N \rightarrow \infty$, les fonctions $\rho_2^{(N)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ convergent (en un sens qui est défini dans [40]), vers la fonction unique $\rho_1(\mathbf{x}_1) \rho_1(\mathbf{x}_2)$, et que l'on a plus précisément :

$$\rho_2^{(N)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - \rho_1(\mathbf{x}_1) \rho_1(\mathbf{x}_2) = O\left(\frac{1}{N}\right), \quad (4.1)$$

cette relation étant équivalente à la propriété de chaos moléculaire (2.14) avec $S = 2$. Notons que ce résultat peut se généraliser au cas où $S > 2$, et que Grad a également montré, par un même raisonnement, que les densités réduites à trois particules, $\rho_3^{(N)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$, satisfont à la relation de superposition de Kirkwood avec encore une meilleure approximation. Il faut souligner que, dans la démonstration de tels résultats, la symétrie des $\rho^{(N)}(P)$ par rapport aux variables $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$, joue un rôle capital qui s'explique par la remarque suivante : comme la fonction $\rho^{(N)}(P)$ doit prendre la même valeur en $N!$ points différents de $\Gamma^{(N)}$, il s'ensuit que la densité de probabilité tend à se trouver concentrée dans les régions où (4.1) est satisfaite.

Avant d'examiner la signification de ces résultats pour la Mécanique statistique, il convient d'insister sur le fait que ceux-ci ne font qu'exprimer, dans le domaine des densités en phase $\rho^{(N)}(P)$, les propriétés géométriques bien connues des hypersurfaces de $\Gamma^{(N)}$ à un très grand nombre de dimensions. Pour le voir facilement, il suffit, comme le remarque Grad (cf. [11], § 10,11), de revenir au point de vue habituel de la théorie cinétique des gaz où les $\rho_1(\mathbf{x}_1)$ et $\rho_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ sont interprétées, non comme des densités de probabilité, mais comme des densités réelles de particules, définies en chaque point d'une certaine hypersurface d'énergie constante Σ_E de $\Gamma^{(N)}$. D'après les propriétés asymptotiques de ces hypersurfaces, on sait que la densité $\rho_1(\mathbf{x}_1)$ est approximativement maxwellienne sur la plupart des points de Σ_E , et que la mesure relative des ensembles de points sur lesquels elle diffère notablement d'une maxwellienne est exponentiellement décroissante avec N , soit de l'ordre de C^{-N} . On comprend dès lors l'origine de la condition de croissance qui doit être satisfaite par les $\rho^{(N)}(P)$: en effet, pour obtenir une densité réduite $\rho_1(\mathbf{x}_1)$ sensiblement non-maxwellienne, il faut que la densité $\rho^{(N)}(P)$ se trouve concentrée sur un très petit ensemble, de mesure relative C^{-N} ; mais, comme l'intégrale de $\rho^{(N)}(P)$ sur toute l'hypersurface doit être égale à 1, $\rho^{(N)}(P)$ doit donc être au moins de l'ordre de C^N . De plus, on peut aussi considérer l'ensemble des points de Σ_E pour lesquels la propriété de chaos moléculaire n'est pas satisfaite relativement à un certain degré de précision. Sa mesure relative est de l'ordre de C_1^{-N} , avec $C_1 > C$, et donc de l'ordre de $(C_1/C)^{-N}$ si l'on compare cet ensemble à celui correspondant aux états non-maxwelliens, tel qu'il vient d'être défini ; on voit ainsi que l'ensemble des points pour lesquels la condition de chaos moléculaire n'est pas vérifiée est exponentiellement plus petit que celui correspondant aux états non-maxwelliens, ce qui explique la possibilité de démontrer une relation telle que

(4.1).

Les raisonnements et résultats précédents, si incomplets ou qualitatifs qu'ils soient, présentent l'intérêt de montrer que le problème posé par le choix des conditions initiales ne peut être traité indépendamment de la connaissance des propriétés asymptotiques des systèmes macroscopiques. Il apparaît au contraire que, si un certain état hors d'équilibre se trouve réalisé, par exemple pour un gaz dilué, il est alors extrêmement probable que la condition de chaos moléculaire sera vérifiée, et que le système évoluera conformément aux prévisions de l'équation de Boltzmann. Il est clair cependant que ceci revient à admettre implicitement un autre principe, à savoir que les états de probabilité très petite ou nulle ne sont jamais réalisés dans l'expérience usuelle, ou, ce qui est pratiquement équivalent, que les mesures servant à définir la probabilité ne doivent pas être trop singulières pour être physiquement acceptables. Naturellement, un tel principe est absolument étranger aux propriétés intrinsèques du système, et sa seule justification tient à ce que, s'il n'était pas satisfait, ceci entraînerait l'existence d'une loi naturelle encore inconnue.

Si l'on considère maintenant ce problème du point de vue de la préparation du système dans un état macroscopique donné, on en conclut que celle-ci doit avoir précisément pour effet de réaliser une situation qui est bien représentée par l'état le plus probable. Par exemple, dans le cas d'un gaz dilué préparé initialement dans un certain état hors d'équilibre, c'est la situation répondant à la propriété de chaos moléculaire qui doit se trouver réalisée. Pour comprendre comment ceci peut être justifié, il convient de préciser dans quelles conditions s'effectue cette préparation du système en se reportant aux propriétés bien connues de la courbe associée à la fonction H de Boltzmann, telles qu'elles ont été analysées par P. et T. Ehrenfest [41] (voir aussi [42] et [11], § 13).

On remarque, en effet, que la condition de chaos moléculaire (4.1) n'implique pas de direction privilégiée du temps (c'est le "two-sided chaos" de Grad) et qu'elle peut donc s'appliquer aussi bien vers le passé que vers le futur ; il s'ensuit que l'équation de Boltzmann est valable à la fois pour les t croissants et les t décroissants, et que la fonction $H(t)$ ne peut que décroître dans chacun de ces cas. Ainsi, lorsque la condition (4.1) est satisfaite, la valeur de H associée à un certain état hors d'équilibre doit être un maximum de la courbe H ; ce raisonnement étant indépendant du point considéré, on en arrive finalement à la conclusion que presque tous les points de la courbe H

de Boltzmann sont des maximums et que la probabilité des autres configurations possibles de cette courbe en un point donné est extrêmement petite. Cette propriété, apparemment paradoxale (mais dont l'interprétation correcte a été bien illustrée par le modèle "dog-flea" de P. et T. Ehrenfest [41b, 42]), a plusieurs conséquences importantes qu'il est utile de rappeler : (i) au voisinage de tout point de la courbe H sensiblement éloigné de l'équilibre, la valeur de H ne peut que décroître, cette décroissance exprimant le fait que le système évolue nécessairement vers ses états les plus probables ; (ii) si le système se trouve dans un état hors d'équilibre caractérisé par une valeur de H assez éloignée de l'équilibre, il est extrêmement peu probable qu'un tel état résulte d'une fluctuation spontanée du système ; (iii) si cet état est cependant observé après une évolution naturelle du système, il est hautement probable qu'il fait suite à un autre état encore plus éloigné de l'équilibre ; (iv) comme l'on aboutit aux mêmes conclusions quel que soit le sens de la "flèche du temps", le modèle de courbe H ainsi défini est parfaitement réversible, et cependant compatible avec la décroissance de H expérimentalement observée.

Les diverses propriétés de ce modèle de courbe H , qui ne font qu'exprimer d'une autre façon les caractéristiques propres aux systèmes macroscopiques, permettent de mieux comprendre à quelle réalité physique correspond le processus de préparation d'un système macroscopique dans un état donné. D'une part, il doit traduire d'une certaine manière l'impossibilité où nous sommes de réaliser pratiquement un état qui donne lieu à une croissance de H , ce qui conduit à éliminer les ensembles statistiques initiaux ne correspondant pas à l'état le plus probable du système. D'autre part, en raison de cette impossibilité, il doit aboutir à la définition d'états statistiques initiaux asymétriques par renversement du temps, de sorte que la distinction entre le passé et l'avenir se trouve introduite comme une conséquence du principe de causalité, ainsi que nous l'avons vu dans la section 2.5c. De ce point de vue, l'irréversibilité a son origine dans l'application de ce principe, qui a pour effet de "fixer" le sens de la flèche du temps et, dans l'exemple de la courbe H , de déterminer dans quel sens cette courbe doit être parcourue. Cette interprétation du processus de préparation d'un système macroscopique permet ainsi, sous réserve d'admettre le principe général mentionné plus haut concernant l'élimination des ensembles de très petite mesure, d'apporter des réponses satisfaisantes à la question (B) dans le cas des expériences de laboratoire, où l'intervention de l'observateur à un certain instant initial est

évidente. Toutefois, bien que ces réponses concernent à la fois les aspects statistiques de (B) et le problème de la flèche du temps, nous allons voir pour terminer qu'elles sont loin d'épuiser le sujet.

La situation est en effet très différente si l'on considère les phénomènes qui se déroulent dans la nature, que ce soit dans notre environnement proche ou dans le reste de l'Univers. Car, bien que l'intervention de l'observateur soit dans ce cas minime sinon tout à fait négligeable, on constate cependant, comme l'on sait, que tous les phénomènes macroscopiques sont irréversibles, qu'ils se développent toujours dans le même sens et qu'ils déterminent de ce fait une direction privilégiée de l'évolution que l'on peut assimiler à la "flèche cosmique" du temps. On voit ainsi apparaître de nouvelles questions, qui constituent un élargissement du champ de la question (B), telle que celle posée par la concordance entre cette direction cosmique du temps et notre propre flèche du temps [16]. Etant donné le caractère universel de l'irréversibilité, il semble naturel de se tourner vers la cosmologie, comme l'ont fait divers auteurs [43], et de voir la solution de ce problème dans le recours à un certain principe cosmologique, qui reste toutefois à découvrir. Dans cet ordre d'idées, citons, à titre d'exemple, deux voies d'approche possibles : Dans l'une, on cherche à établir un lien entre l'irréversibilité et le phénomène d'expansion de l'Univers ; dans l'autre, qui se présente comme une transposition de la démarche suivie dans cet article, on ramène le problème de la flèche cosmique du temps à la détermination de conditions initiales convenablement chaotiques à l'origine de l'Univers. Sans préjuger de la valeur de ces considérations, il va de soi qu'elles ne sont pas les seules possibles et que bien d'autres points de vue peuvent être adoptés pour traiter le problème de l'irréversibilité ; parmi les plus connus, il faut surtout citer celui qui est fondé sur l'analyse du rôle des potentiels retardés et avancés en électrodynamique et dans la théorie du rayonnement [44], ou celui, que nous avons déjà mentionné dans l'introduction, qui consiste à rechercher l'origine de l'irréversibilité dans les lois microscopiques elles-mêmes. Bien que ces aperçus soient nécessairement trop brefs et incomplets, ils suffisent en tout cas à montrer que les problèmes posés par ces divers prolongements de la question (B) restent largement ouverts.

Références

- [1] La littérature sur ce sujet étant très abondante, nous ne citons que quelques travaux caractéristiques (la même remarque vaut pour les trois références suivantes) : J. Mehra and E.C.G. Sudarshan ; *Nuovo Cimento* **B.11**, (1972), 215 ; R. Haake, *Springer Tracts in Mod. Phys.*, **66**, (1973), 98 ; R.S. Ingarden, *Acta Phys. Polon.*, **A43**, (1973), 1 ; R.S. Ingarden and A. Kossakowski, *Ann. Phys., Lpz.*, **89**, (1975), 451 ; J.L. Lebowitz, *Progr. Theor. Phys., Suppl.*, **64**, (1978), 35 ; H. Spohn and J.L. Lebowitz, *Adv. Chem. Phys.*, **38**, (1978), 109 ; E.B. Davies, *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano*, 1979.
- [2] (a) D.V. Anosov, *Sov. Mat. Dokl.*, **3** (1962), 1068 ; (b) V.I. Arnold and A. Avez, *Problèmes ergodiques de la Mécanique classique*, Gauthier-Villars, Paris, 1967 ; (c) Ya. G. Sinai, in *Statistical Mechanics : Foundations and Applications* (Proc. IUPAP Meeting, 1966), T.A. Bak ed., New York, Benjamin, 1967, p. 559.
- [3] G.M. Zaslavsky and B.V. Chirikov, *Sov. Phys.-Usp.*, **14**, (1972), 549 ; J. Ford, *Adv. Chem. Phys.*, **24**, (1973), 155 ; in *Fundamental Problems in Statistical Mechanics*, Vol. **3**, E.G.D. Cohen Ed., Amsterdam, North-Holland, p. 215 ; dans le même volume, voir aussi R.H.G. Helleman, p. 165 ; M.V. Berry in *Topics in nonlinear Dynamics, AIP Conf. Proc.* **46**, (1978), p. 16.
- [4] B. Misra, I. Prigogine and M. Courbage, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **76**, (1979), pp. 3607 et 4768 ; *Physica*, **98A**, (1979), 1 ; S. Goldstein, B. Misra and M. Courbage, *J. Stat. Phys.*, **25**, (1981), 111 ; M. Courbage and I. Prigogine, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **80**, (1983), 2097 ; M. Courbage, *Physica*, **122A**, (1983), 459.
- [5] J. Andrade e Silva, F. Fer, P. Leruste et G. Loback, *Comptes Rendus Acad. Sci.*, **251**, (1960), pp. 2305, 2482, 2662 ; *Cahiers de Physique* **15**, (1961), **209** et **16**, (1962), 1.
- [6] G. Lochak, *Comptes Rendus Acad. Sci.*, **254**, (1961), 4436 et **256**, (1962), 3601 ; *Found. of Physics*, **11**, (1981), 593.
- [7] L. de Broglie, *La Thermodynamique de la Particule Isolée*, Gauthier-Villars, Paris, 1964.

- [8] F. Fer, *L'irréversibilité, Fondement de la Stabilité du Monde Physique*, Gauthier-Villars, Paris, 1977.
- [9] D. Fargue et F. Fer, *Ann. Fond. L. de Broglie*, **1**, (1976), 30.
- [10] R. Jancel, *Ann. Fond. L. de Broglie*, **8**, (1983), pp. 83 et 189.
- [11] H. Grad, *Principles of the Kinetic Theory of Gases*, in *Hanbdebuch der Physik*, S. Flugge ed., (Springer-Verlag, Berlin), Vol. **12**, (1958), p. 205.
- [12] H. Grad, *Levels of Description in Statistical Mechanics and Thermodynamics*, in *Studies in the Foundations*, Vol. **1**, p. 49.
- [13] O.E. Lanford, *Time Evolution of Large Classical Systems*, in *Dynamical Systems, Theory and Applications*, J. Moser ed., (Lecture Notes in Physics n 38, Springer-Verlag, Berlin), 1975, p. 1.
- [14] O. Penrose, *Foundations of Statistical Mechanics*, *Rep. Prog. Phys.*, **42**, (1979), 1937.
- [15] V. Monteiro, *Physica* **79A**, (1975), 95.
- [16] R. Peierls, *Surprises in Theoretical Physics*, Princeton Univ. Press, Princeton 1979, pp. 73-84.
- [17] H. van Beijeren, O.E. Lanford, J.L. Lebowitz and H. Spohn, *J. Stat. Phys.* **22**, (1980), 237.
- [18] J.L. Lebowitz, *Ann. New-York Acad. Sci.*, **373** (1981), 220.
- [19] J.L. Lebowitz and H. Spohn, *J. Stat. Phys.*, **28**, (1982), 539.
- [20] J.L. Lebowitz and H. Spohn, *Comm. Pure and Appl. Math.*, **36** (1983), 595.
- [21] C. Cercignani, *Theory and Application of the Boltzmann Equation*, Scottish Acad. Press, Edinburgh and London, 1975.
- [22] R.K. Alexander, Ph. D. Thesis, Univ. of California, Berkeley, 1975.
- [23] H. Spohn, *Kinetic Equations from Hamiltonian Dynamics : Markovian Limits* ; *Rev. Mod. Phys.*, **52**, (1980), 569.
- [24] F.G. Kiang, Ph. D. Thesis, Univ. of California, Berkeley, 1975.
- [25] J.R. Dorfman and H. van Beijeren, *The Kinetic Theory of Gases*, in *Statistical Mechanics*, Part B, (B.J. Berne, ed.), Plenum Press, New York, 1977.

- [26] J.M. Richardson, *J. Stat. Phys.*, **11**, (1974), 323.
- [27] R.P. Feynman, *The Character of Physical Law*, B.B.B. Publications, 1965, Lecture 5 ; Trad. Fr. : in *La Nature de la Physique*, ed. du Seuil, Paris, 1980, pp. 129-150.
- [28] J.L. Lebowitz and H. Spohn, *J. Stat. Phys.* **29**, (1982), 39.
- [29] C. Kipnis, J.L. Lebowitz, E. Presutti and H. Spohn, *J. Stat. Phys.*, **30** (1983), 107.
- [30] D. Durr, S. Goldstein and J.L. Lebowitz, *J. Stat. Phys.*, **30**, (1983), 519.
- [31] S. Chapman and T.G. Cowling, *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*, Cambridge Univ. Press, 1953.
- [32] T.Y. Wu, *Kinetic Equations of Gases and Plasmas*, Addison-Wesley, Reading, 1966.
- [33] L.A. Bunimovich and Ya. G. Sinai, *Comm. Math. Phys.*, **78**, (1980), 247 ; **78**, (1981), 479.
- [34] C. Boldrighini, R.L. Dobrushin and Yu. M. Sukhov, *J. Stat. Phys.*, **31**, (1983), 577.
- [35] N.N. Bogolioubov, *Problems of Dynamical Theory in Statistical Mechanics*, (Eng. Transl.), in *Studies in Statistical Mechanics*, J. de Boer and G.E. Uhlenbeck eds., North-Holland, Amsterdam, 1962.
- [36] E.G.D. Cohen, *The Boltzmann Equations and Its Generalization to Higher Densities*, in *Fundamental Problems in Statistical Mechanics*, E.G.D. Cohen ed., North-Holland, Amsterdam, 1962.
- [37] E.G.D. Cohen and T.H. Berlin, *Physica*, **26**, (1960), 717.
- [38] J.R. Dorfman and E.G.D. Cohen, *J. Math. Phys.*, **8**, (1967), 282.
- [39] Ya. G. Sinai, *Development of Krylov's Ideas*, in *Works on the Foundations of Statistical Physics* by N.G. Krylov, (Eng. Transl.), Princeton Univ. Press, 1979.
- [40] P. and T. Ehrenfest, (a) *The Conceptual Foundations of the Statistical Approach in Mechanics*, (Eng. Transl.), Cornell Univ. Press, 1959 ; (b) *Phys. zeits.*, **8**, (1907), 311.

- [42] M. Kac, *Probability and Related Topics in Physical Sciences*, Lect. in Appl. Math. Vol. 1, Interscience Pub. London-New York, 1959.
- [43] B. Gal-Or ed., *Modern Developments in Thermodynamics*, J. Wiley, New-York, 1974 ; D. Layzer, *The Arrow of Time*, Scientific American, **233**, (1975), 56 ; R. Penrose, in *General Relativity, an Einstein Centenary Survey*, S.W. Hawking and W. Israel eds, Cambridge Univ. Press, 1979, pp. 581-638.
- [44] D.T. Pegg, *Absorber Theory of Radiation*, Rep. Progr. Phys., **38**, (1975) 1339.

(Manuscrit reçu le 15 mai 1987)