Etats électriques et états magnétiques dans le champ de Majorana (1ère partie: Etats électriques)

Georges LOCHAK

C.N.R.S. Fondation Louis de Broglie
1, rue Montgolfier F-75003 Paris

RESUME. On montre que la condition de Majorana, qui réduit l'équation de Dirac à l'équation dite "abrégée", peut être remplacée par la condition équivalente (et invariante de jauge) que l'**invariant chiral** s'annule. Ceci permet de donner une dérivation lagrangienne du champ de Majorana. On étudie ensuite les lois de symétrie de ce champ interagissant avec un champ électromagnétique. On montre que le système se scinde en deux composantes chirales (contrairement au champ de Dirac mais de façon analogue à celui du monopôle).

On donne la solution de l'équation d'une telle composante chirale en présence d'un champ électrique central. On montre qu'il n'existe pas d'états liés, mais seulement des états d'ionisation qui sont constitués d'une superposition particulière d'états à énergie positives et négatives.

Enfin, on examine l'approximation de l'optique géométrique et on intègre l'équation de Jacobi pour une composante chirale dans un champ central. Toutes les trajectoires sont hyperboliques mais ne sont pas des hyperboles de type keplerien. Elles se divisent en deux groupes qui correspondent respectivement à des mouvements attractifs et répulsifs, et ceci quelle que puisse être la charge de la particule.

Annales de la Fondation Louis de Broglie, vol. 12 no. 2, 1987

1. Introduction. Comment le champ de Majorana apparaît dans la théorie du monopôle magnétique.

J'ai proposé récemment une théorie du monopôle magnétique dans le cadre de l'équation de Dirac [1][2][3]. Cette théorie est fondée sur la remarque que l'équation de Dirac possède non pas une mais deux jauges locales invariantes (et deux seulement), la première correspondant à une charge électrique et la seconde à une charge magnétique.

La première est la jauge habituelle:

$$\psi \to e^{i\frac{e}{\hbar c}\phi}\psi\,,\quad A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu\phi \tag{1.1}$$

qui conserve l'équation de l'électron (*):

$$\gamma_\mu(\partial_\mu + \frac{ie}{\hbar c}A_\mu)\psi - \frac{m_0 c}{\hbar}\psi = 0. \tag{1.2}$$

La seconde est la *jauge chirale*

$$\psi \to e^{\frac{ig}{\hbar c}\gamma_5\phi}\psi\,,\quad B_\mu \to B_\mu + i\,\partial_\mu\phi \tag{1.3}$$

qui, contrairement à la précédente, n'est valable que pour une particule de *masse nulle*. Elle laisse invariante l'équation:

$$\gamma_\mu(\partial_\mu - \frac{g}{\hbar c}\gamma_5 B_\mu)\psi = 0, \tag{1.4}$$

qui représente un *monopôle magnétique* (voir travaux cités).

Elle possède toutes les bonnes lois de symétrie, elle redonne l'équation de Poincaré [4] à l'approximation de l'optique géométrique et la relation de Dirac [5]

$$\frac{eg}{\hbar c} = \frac{n}{2} \quad (n \in Z) \tag{1.5}$$

si on soumet ce monopôle à un champ électrique coulombien. Rappelons que e est la charge électrique et g la charge magnétique.

On a de plus:

(*) Nous utiliserons les coordonnées $x_\mu = \{x, y, z, ict\}$ et donc des matrices γ telles que $\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}$.

$$A_\mu = (\vec{A}, iV)\,,\quad B_\mu = (-i\vec{B}, W)\,, \tag{1.6}$$

où A_μ est le quadripotentiel de Lorentz et B_μ le pseudo-potentiel de Cabibbo et Ferrari [6] au travers duquel le monopôle "voit" l'électromagnétisme [1][2]. A_μ est un quadrivecteur polaire, tandis que B_μ est le dual d'un tenseur antisymétrique de rang 3, ce qui veut dire que dans $\mathbf{R}^3$, $\vec{B}$ est un vecteur axial et W un pseudo-scalaire. Notons encore que contrairement à d'autres théories, la charge g est, dans l'équation (1.4), une constante scalaire vraie, comme toute autre constante physique, et que le caractère *pseudo-scalaire* de la charge magnétique appartient ici à l' *opérateur de charge*

$$G = g\,\gamma_5 \tag{1.7}$$

qui est donc ici un q-nombre. Ceci est essentiel. En effet, en passant à la représentation de Weyl par la transformation :

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_4 + \gamma_5)\begin{matrix}\xi\\ \eta\end{matrix} \tag{1.8}$$

où ξ et η sont des spineurs à 2 composantes; l'équation (1.4) se scinde en deux :

$$(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \vec{s}.\vec{\nabla} - i\frac{g}{hc}(W + \vec{s}.\vec{B}))\xi = 0 \tag{1.9}$$
$$(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \vec{s}.\vec{\nabla} + i\frac{g}{hc}(W - \vec{s}.\vec{B}))\eta = 0,$$

où $\vec{s}$ représente les matrices de Pauli et on montre que ces deux équations, en ξ et en η, s'échangent entre elles par chacune des transformations P, T et C. Mais, et c'est là le point important qui découle de l'expression (1.7) de l'opérateur de charge, la conjugaison de charge se réduit ici à un changement d' *hélicité* (comme pour le neutrino) sans changement du signe de g.

On peut maintenant se demander si ce monopôle magnétique est inévitablement de masse nulle ou bien s'il peut en être autrement. Or ce problème est apparenté à celui de la masse du neutrino et ceci d'autant plus que dans [2], on proposait l'hypothèse que le neutrino puisse être lui-même regardé comme un monopôle de charge magnétique nulle. En effet (1.5) signifie que :

$$g = ng_0 \quad (g_0 = \frac{\hbar c}{2e}). \tag{1.10}$$

Donc, la charge magnétique étant un multiple de la charge fondamentale g, le neutrino se réduit simplement au cas n = 0, puisque les équations (1.9) se réduisent respectivement aux équations du neutrino et de l'antineutrino à deux composantes.

Le problème de la masse du monopôle peut donc se rattacher à celle du neutrino. Or ce problème est beaucoup étudié en ce moment et c'est lui qui va nous mener au champ de Majorana. Mais auparavant, je voudrais rappeler que l'équation (1.4) admet une généralisation non linéaire avec masse [1][2] :

$$\left[\gamma_\mu(\partial_\mu - \frac{g}{\hbar c}\gamma_5 B_\mu) + \frac{1}{2}\frac{m(\rho^2)c}{\hbar}(\Omega_1 - i\,\Omega_2\gamma_5)\right]\psi = 0, \qquad (1.11)$$

$$\Omega_1 = \overline{\psi}\psi, \quad \Omega_2 = -i\,\overline{\psi}\gamma_5\psi, \quad \rho^2 = \Omega_1^2 + \Omega_2^2, \qquad (1.12)$$

où $m(\rho^2)$ représente une fonction scalaire. Cette équation reste invariante dans la transformation de jauge chirale (1.3) et, grâce à (1.8), elle devient :

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\xi}{\partial t} - \vec{s}.\vec{\nabla}\xi - i\frac{g}{\hbar c}(W + \vec{s}.\vec{B})\xi + i\frac{m(\,|\,\xi^+\eta\,|\,)c}{\hbar}(\eta^+\xi)\eta = 0 \qquad (1.13)$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\eta}{\partial t} + \vec{s}.\vec{\nabla}\eta + i\frac{g}{\hbar c}(W - \vec{s}.\vec{B})\eta + i\frac{m(\,|\,\xi^+\eta\,|\,)c}{\hbar}(\xi^+\eta)\xi = 0$$

On peut montrer que le terme non linéaire qui figure dans ces équations est réellement un terme de masse. De plus, ces équations contiennent à la fois des états *bradyons* (moins rapides que la lumière), *tachyons* (plus rapides que la lumière), *luxons* (allant exactement à la vitesse c) [2]. Or les équations non linéaires (1.11) ou (1.13) admettent elles aussi (pour g = 0) le neutrino en tant que cas particulier. La coexistence des trois états précédents (bradyons, tachyons et luxons) dans l'équation signifie donc que le neutrino aussi devrait pouvoir se présenter sous ces trois états. Ceci rejoint une hypothèse formulée déja antérieurement par Mignani et Recami [7][8] et semble aller dans le même sens que des observations récentes de Steyaert [9] sur des expériences d'absorption de photons γ par du cuivre.

Remarquons maintenant que l'état luxon que nous venons de citer à propos des équations (1.11) et (1.13) correspond évidemment à l'annulation des termes de masse non linéaires : les équations se réduisent alors aux équations linéaires (1.4) et (1.9). Or cette annulation peut se produire sans que s'annule pour autant aucun des deux champs ξ et η. Mais bien sûr, une liaison s'ensuivra entre ξ et η et c'est cette liaison qui nous conduira au champ de

Majorana.

En effet, annuler les termes non linéaires équivaut à annuler ce que nous avons appelé l' *invariant chiral* [2]. Soit :

$$\rho^2 = \Omega_1^2 + \Omega_2^2 = 0, \qquad (1.14)$$

ce qui peut s'écrire, en vertu de (1.8) :

$$\xi^+\eta = 0. \qquad (1.15)$$

Les solutions particulières de (1.11) et (1.13), et donc de (1.9), qui obéissent à cette équation sont très remarquables parce qu'elles correspondent à un couple monopôle-antimonopôle pour lequel le courant magnétique total est nul. Cette propriété découle de la relation suivante qui est équivalente à (1.15) comme on le vérifie facilement [2] :

$\xi = k\, i s_2 \eta^*$ $\quad k \in \mathbb{C}$

$$\xi = e^{2i\frac{e}{\hbar c}\theta} i s_2\eta^*, \quad \eta = -e^{2i\frac{e}{\hbar c}\theta} i s_2\xi^* \qquad (1.16)$$ $|k|$ quelconque

où $\theta(\vec{r},t)$ est une phase arbitraire (son coefficient $2e/\hbar c$ nous servira plus loin). En appliquant (1.8) on trouve la relation équivalente écrite sur le quadrispineur ψ :

$$\psi = e^{2i\frac{e}{\hbar c}\theta}\gamma_2\psi^* = e^{2i\frac{e}{\hbar c}\theta}\psi_c \qquad (1.17)$$

Autrement dit, à ~~une phase~~ un facteur près, les états ψ, définis par la condition (1.14) ou (1.15), qui annulent les termes non linéaires, seront leurs propres conjugués de charge. Ce qui veut dire qu'à cette phase près, la condition (1.14) ou (1.15) est la condition de Majorana [10] à [17]. Rappelons en effet que ce qu'on appelle "champ de Majorana" ou "équation abrégée de Majorana" n'est rien d'autre que l'équation (1.2) de Dirac assortie de la condition $\psi = \psi_c$, c. à d. (1.17) avec θ=0.

Le fait que cette condition surgisse dans la théorie du monopôle, conduit à essayer de pousser plus loin le rapprochement, d'autant plus que l'équation abrégée de Majorana a déjà été proposée pour décrire le neutrino : alors pourquoi pas aussi un monopôle magnétique ? Ce sera l'objet du présent article. Plus précisément, nous allons étudier le comportement d'une particule de Majorana dans un champ électromagnétique, en supposant d'abord que la particule est porteuse d'une charge électrique, puis qu'elle est porteuse d'une charge magnétique. Prenons donc le cas électrique.

2. La représentation lagrangienne et l'invariance de jauge du champ de Majorana.

Plusieurs auteurs [15][16][17] ont fait allusion au problème d'une représentation lagrangienne du champ de Majorana et ils ont admis qu'une telle représentation n'est pas possible. Nous verrons tout de suite que c'est inexact, mais il est intéressant de voir d'abord où est la difficulté.

D'après ce que nous avons dit, l'équation de Majorana peut s'écrire, d'après (1.2) et $\psi = \psi_c$:

$$\gamma_\mu(\partial_\mu + \frac{ie}{\hbar c} A_\mu)\psi - \frac{m_0 c}{\hbar}\psi_c = 0. \tag{2.1}$$

Si on cherche directement un lagrangien sous cette forme, il devra contenir un terme tel que

$$\overline{\psi}\psi_c = \psi^+ \gamma_4 \gamma_2 \psi^* . \tag{2.2}$$

Or nous avons aussi

$$\gamma_k = i\,\alpha_4 \alpha_k \quad (k=1,2,3), \quad \gamma_4 = \alpha_4, \quad \gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 \tag{2.3}$$

$$= i\,\alpha_1\alpha_4\, i\,\alpha_4\alpha_2\, i\,\alpha_4\alpha_3\alpha_4$$

$$= -i\,\alpha_1\alpha_2\alpha_2 = -i \begin{pmatrix} 0 & s_1 \\ s_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & s_2 \\ s_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & s_3 \\ s_3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -i \begin{pmatrix} 0 & s_1 s_2 s_3 \\ s_1 s_2 s_3 & 0 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 0 & i s_3^2 \\ i s_3^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_k = \begin{bmatrix} 0 & s_k \\ s_k & 0 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix},$$

où les s_k sont les matrices de Pauli.

En introduisant ces expressions dans (2.2), on trouve identiquement :

$$\overline{\psi}\psi_c = 0 \tag{2.4}$$

et le terme correspondant disparaît donc du Lagrangien, d'où la difficulté en question.

Mais ce n'est pas ainsi que nous procèderons : nous considérerons le champ de Majorana comme un *état contraint* du champ de Dirac et nous écrirons la contrainte sous la forme (1.14). Le lagrangien de Majoran L_M sera donc simplement le lagrangien de Dirac L_D auquel nous ajouterons un terme de contrainte en introduisant une variable canonique supplémentaire λ :

$$L_M = L_D + \frac{\lambda}{2}(\Omega_1^2 + \Omega_2^2), \tag{2.5}$$

où $\Omega_1 et\ \Omega_2$ sont donnés par (1.12). La variation de L_M par rapport à ψ nous

donnera :

$$\gamma_\mu(\partial_\mu + i\frac{e}{\hbar c} A_\mu)\psi - \frac{m_0 c}{\hbar}\psi + \lambda(\Omega_1 - i\,\Omega_2\gamma 5)\psi = 0, \tag{2.6}$$

Cette équation, qui ressemble à (1.11) avec un terme de masse et d'autres potentiels a été jadis proposée par Weyl dans un autre contexte et plusieurs fois retrouvée depuis [18]. Mais nous devons encore varier L_M par rapport à la variable canonique supplémentaire λ, ce qui donnera la relation (1.14) et fera donc disparaître le terme non linéaire dans (2.6). Et comme (1.14) est équivalente à (1.17), on trouve finalement l'équation:

$$\gamma_\mu(\partial_\mu + i\frac{e}{\hbar c} A_\mu)\psi - \frac{m_0 c}{\hbar} e^{2i\frac{e}{\hbar c}\theta}\psi_c = 0, \tag{2.7}$$

où la phase θ, rappelons le, est *arbitraire*.

On serait tenté de faire tout de suite $\theta = 0$ pour retrouver l'équation de Majorana (2.1), mais ce serait une mauvaise idée parce que cette phase arbitraire est importante. En effet, c'est grâce à elle que l'équatiopn (2.7) est *invariante de jauge* tandis que (2.1) ne l'était pas (ce dont personne, soit dit en passant, ne paraît s'être soucié jusqu'ici).

L'invariance de jauge de (2.7) découle d'ailleurs directement de l'invariance du lagrangien (2.5). Mais on voit aussi, directement, que (2.7) se conserve par la transformation :

$$\psi \to e^{\frac{e}{\hbar c}\phi}\psi, \quad A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu\phi, \quad \theta \to \theta + \phi, \tag{2.8}$$

d'où il résulte que θ peut être absorbé par la jauge. Plus précisément, nous choisirons d'abord la jauge, puis nous annulerons θ et nous retrouverons alors l'équation (2.1).

Mais soulignons encore que cette équation de Majorana pourra avant tout être considérée comme représentant un état de l'électron de Dirac. Cependant, nous verrons qu'on peut aussi la regarder "en elle-même" et que cette seconde interprétation n'est pas physiquement équivalente à la première.

3. Equation à deux composantes. Lois de symétrie et de conservation.

En introduisant la première formule (1.6), la transformation (1.8) et les formules (1.16) et (1.17), dans l'équation (2.7), celle-ci se scinde en deux équations à deux composantes chacunes :

$$(\pi_0 + \vec{\pi}.\vec{s})\xi - im_0 c e^{2i\frac{e}{\hbar c}\theta} s_2 \xi^* = 0 \tag{3.1}$$

$$(\pi_0 - \vec{\pi}.\vec{s})\eta + im_0 c e^{2i\frac{e}{\hbar c}\theta} s_2 \eta^* = 0 \tag{3.2}$$

où nous avos posé :

$$\pi_0 = \frac{1}{c}(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + eV), \quad \vec{\pi} = (-i\hbar\vec{\nabla} + \frac{e}{c}\vec{A}). \tag{3.3}$$

N'oublions pas que, jusqu'à présent, le système (3.1)(3.2) n'est rien d'autre qu'une représentation particulière de l'équation de Dirac (1.2) à laquelle on a appliqué la *contrainte* (1.14) ou (1.15). Or cette contrainte est manifestement C, P et T invariante. Mais il est intéressant de vérifier ces invariances directement. Des calculs simples montrent qu'en effet, les deux équations (3.1) et (3.2) s'échangent, (ce qui laisse bien le système invariant) dans les trois transformations suivantes :

$$(C): i \to -i, \quad e \to -e, \quad \xi \to e^{2i\frac{e}{\hbar c}\theta} is_2\eta^*, \quad \eta \to -e^{2i\frac{e}{\hbar c}\theta} is_2\xi^* \tag{3.4}$$

$$(P): \vec{x} \to -\vec{x}, \quad \vec{A} \to -\vec{A}, \quad \xi \to i\eta \quad \eta \to -i\xi \tag{3.5}$$

$$(T): t \to -t, \quad V \to -V, \quad \xi \leftarrow\rightarrow \eta \tag{3.6}$$

Pour P et T, nous avons bien entendu utilisé le fait que $A_\mu = (\vec{A}, iV)$ est un quadrivecteur polaire. D'autre part, la phase θ étant arbitraire, P peut encore s'écrire :

$$(P): \vec{x} \to \vec{x}, \quad \vec{A} \to -\vec{A}, \quad \xi \longleftrightarrow \eta, \quad \theta \to \theta + \frac{\pi}{2}\frac{\hbar c}{e}, \tag{3.5'}$$

En outre, la transformation de jauge (2.8) s'écrit ici, pour le système (3.1), (3.2):

$$\xi \to e^{i\frac{e}{\hbar c}\phi}\xi, \quad \eta \to e^{i\frac{e}{\hbar c}\phi}\eta, \quad \vec{A} \to \vec{A} - \vec{\nabla}\phi, \tag{3.7}$$

$$V \to V + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}, \quad \theta \to \theta + \phi$$

et on vérifie que cette transformation laisse invariante chacune des équations (3.1) et (3.2).

A l'invariance (3.7) des deux équations (3.1) et (3.2) correspondent respectivement les deux lois de conservation:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial(\xi^+\xi)}{\partial t} - \vec{\nabla}.(\xi^+\vec{s}\,\xi) = 0, \tag{3.8}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial(\eta^+\eta)}{\partial t} + \vec{\nabla}.(\eta^+\vec{s}\,\eta) = 0, \tag{3.9}$$

où les deux courants:

$$X_\mu = \{\xi^+\xi, -c\,\xi^+\vec{s}\,\xi\}, \quad X_\mu = \{\eta^+\xi, c\,\eta^+\vec{s}\,\eta\}, \tag{3.10}$$

sont les *courants chiraux* que nous avons déjà rencontré dans la théorie du monopôle [1][2]. Rappelons qu'ils sont isotropes et que d'après (1.16), ils sont orthogonaux:

$$X_\mu X_\mu = Y_\mu Y_\mu = X_\mu Y_\mu = 0 \tag{3.11}$$

Or il est intéressant de remarquer que, s'ils se conservent en vertu des équations (3.1), (3.2) qui sont, ne l'oublions pas, un *état contraint* de l'équation de Dirac, en revanche ils ne se conservent pas si on prend l'équation de Dirac sous sa forme générale. Pour faire la comparaison, introduisons (1.8) dans (1.2) pour écrire l'équation de Dirac en termes de spineurs ξ *et* η:

$$(\pi_0 + \vec{\pi}.\vec{s})\xi + m_0 c\,\eta = 0 \tag{3.12}$$
$$(\pi_0 + \vec{\pi}.\vec{s})\eta + m_0 c\,\xi = 0,$$

où π_0*et* $\vec{\pi}$ ont les expressions (3.3). On trouve facilement d'après (3.12) les relations suivantes:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial(\xi^+\xi)}{\partial t} - \vec{\nabla}.(\xi^+\vec{s}\,\xi) - i\frac{m_0 c}{\hbar}(\xi^+\eta - \eta^+\xi) = 0 \tag{3.13}$$
$$\frac{1}{c}\frac{\partial(\eta^+\eta)}{\partial t} + \vec{\nabla}.(\eta^+\vec{s}\,\eta) + i\frac{m_0 c}{\hbar}(\xi^+\eta - \eta^+\xi) = 0$$

On voit donc que, dans le cas général, les courants chiraux ne se conservent pas et qu'il s'introduit une source dans les équations de continuité. Cette source n'est autre que le *pseudo-invariant* Ω_2 de Dirac, car on a d'après (1.8):

$$\Omega_2 = -i\,\overline{\psi}\gamma_5\psi = i\,(\xi^+\eta - \eta^+\xi). \tag{3.14}$$

Par contre, on vérifie bien, d'après (1.15) que la contrainte $\xi^+\eta = 0$ qui fait passer des équations (3.12) aux équations (3.1), (3.2) annule les termes de source dans (3.13) et redonne les lois de conservation (3.8), (3.9).

Il est utile, maintenant, de revenir aux spineurs ψ (toujours grâce à (1.8)) en utilisant les matrices de Dirac $\alpha\, et\, \sigma$. On trouve alors les *identités:*

$$\begin{aligned} J_\mu &= -i\,\overline{\psi}\gamma_\mu\psi = \{-i\,\psi^+\psi, \psi^+\vec{\alpha}\psi\} \\ &= \{-i\,\xi^+\xi, \xi^+\vec{s}\,\xi\} + \{-i\,\eta^+\eta, -\eta^+\vec{s}\,\eta\} \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_\mu &= -i\,\overline{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi = \{-i\,\psi^+\sigma_4\psi, \psi^+\vec{\sigma}\psi\} \\ &= \{-i\,\xi^+\xi, \xi^+\vec{s}\,\xi\} - \{-i\,\eta^+\eta, -\eta^+\vec{s}\,\eta\} \end{aligned} \tag{3.16}$$

Soit encore:

$$\begin{aligned} &\psi^+\psi = \xi^+\xi + \eta^+\eta, \quad \psi^+\vec{\alpha}\psi = \xi^+\vec{s}\,\xi - \eta^+\vec{s}\,\eta \\ &\psi^+\sigma_4\psi = \xi^+\xi - \eta^+\eta, \quad \psi^+\vec{\sigma}\psi = \xi^+\vec{s}\,\xi + \eta^+\vec{s}\,\eta \end{aligned} \tag{3.17}$$

Rappelons que:

$$\gamma_4 = \alpha_4 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}, \vec{\alpha_k} = \begin{bmatrix} 0 & \vec{s} \\ \vec{s} & 0 \end{bmatrix}, \vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \vec{s} & 0 \\ 0 & \vec{s} \end{bmatrix}, \sigma_4 = \gamma_5 = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.18}$$

On voit donc que J_μ, c'est à dire la *densité de courant électrique* est la *somme* des deux courants chiraux, tandis que Σ_μ qui a été interprété dans [1] et [2] comme la *densité de courant magnétique* total, est la *différence* entre les deux courants chiraux.

A l'aide des formules de (3.13) à (3.16), on trouve aussitôt, toujours pour l'équation de Dirac:

$$\partial_\mu J_\mu = 0, \quad \partial_\mu\Sigma_\mu + 2\frac{m_0 c}{h}\Omega_2 = 0. \tag{3.19}$$

La première formule signifie la conservation de l'électricité. La seconde porte le nom de relation d'Uhlenbeck et Laporte [19] et n'avait jamais été interprétée jusqu'ici. D'après les références [1] et [2], Σ_μ peut être regardé comme la somme des courants magnétiques gauche et droit ou encore des courants de monopôles et d'antimonopôles, chacun d'entre eux étant porté par l'un des deux courants X_μ, Y_μ, ne se conservent que dans deux cas, qui annulent leur source:

1) Si $m_0 = 0$: c'est le cas des équations (1.4), (1.9), (1.11) précedemment étudiées.

2) Si $\Omega_2 = 0$ et c'est le cas de l'équation de Majorana, ou encore de l'équation invariante de jauge (2.7) et du système équivalent (3.1), (3.2), puisqu'on a alors les relations (1.14) et (1.15).

Mais il faut préciser un peu, car ces relations, et donc $\Omega_2 = 0$, ne sont évidemment pas satisfaites par n'importe quel couple de solutions $\xi\, et\, \eta$ des équations respectives (3.1), (3.2), mais seulement pour les couples ξ,η particuliers qui obéissent à la relation (1.15), c. à d. tels que $\xi^+\eta = 0$. Auquel cas, d'ailleurs, en vertu de (1.16) on vérifie facilement que l'on a:

$$\xi^+\eta = 0 \rightarrow X_\mu = Y_\mu \rightarrow J_\mu = 2X_\mu, \ \Sigma_\mu = 0. \tag{3.20}$$

$\Sigma_\mu = \frac{1-k\bar{k}}{1+k\bar{k}} J_\mu$ faux

Le courant électrique devient alors isotrope, tandis que le courant magnétique total disparait tout à fait.

Mais comme, en réalité, les équations (3.1) et (3.2) sont découplées nous pouvons en prendre une, (3.1) par exemple, et la regarder en oubliant (3.2), ou tout au moins en ne nous limitant plus aux seuls couples de solutions tels que $\xi^+\eta = 0$. Alors (3.1) peut être regardée comme représentant un certain *état chiral de l'électron* dont (3.2) est à la fois le conjugué de charge, l'image dans un miroir et l'inverse temporel, en vertu de (3.4), (3.5) et (3.6).

4. L'état chiral de l'électron dans un champ électrique coulombien.

Majorana considérait qu'en imposant l'égalité $\psi = \psi_c$ dans l'équation de Dirac, il obtiendrait en quelque sorte une théorie conjointe, ou simultanée, de l'électron et du positron. Ce n'est pas tout à fait exact puisque nous venons de voir qu'il s'agit plutôt d'une contrainte imposée à l'électron. Mais pourtant, nous verrons qu'il s'agit bien d'un état hybride qui participe à la fois de l'électron et du positron. Pour le voir, nous allons résoudre l'équation (3.1) dans un champ électrique coulombien, en introduisant dans (3.3):

$$eV = \frac{-e^2}{r}, \quad \vec{A} = 0, \tag{4.1}$$

ce qui correspond au champ d'un proton. Nous ferons le calcul en choisissant, dans (3.1), la phase arbitraire θ telle que:

$$\theta = \frac{\pi}{4}\frac{\hbar c}{e} \tag{4.2}$$

ce qui donne l'équation:

$$\left[\frac{1}{c}(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \frac{e^2}{r}) - i\hbar\vec{s}.\vec{\nabla}\right]\xi + m_0 c s_2 \xi^* = 0 \tag{4.3}$$

La difficulté proviendra évidemment de la présence du ξ complexe conjugué: ξ^*.

Nous introduirons les fonctions sphériques habituelles avec spin [20][21][22] que nous écrirons:

$$\Omega_l^m(+) = \begin{bmatrix} \left(\frac{l+m}{2l+1}\right)^{½} Y_l^{m-1} \\ \left(\frac{l-m+1}{2l+1}\right)^{½} Y_l^m \end{bmatrix}, \quad \Omega_l^m(-) = \begin{bmatrix} \left(\frac{l-m+1}{2l+1}\right)^{½} Y_l^{m-1} \\ -\left(\frac{l+m}{2l+1}\right)^{½} Y_l^m \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

où les Y_l^m sont les fonctions sphériques de Laplace que nous écrirons:

$$Y_l^m(\theta,\phi) = \frac{(-1)^m}{2^l\, l\,!}\left(\frac{2l+1}{4\pi}\right)^{½}\left(\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\right)^{½}\frac{e^{im\phi}}{\sin^l\theta}\frac{d^{\,l-m}}{d\,\theta^{l-m}}\sin^{2l}\theta \tag{4.5}$$

avec l=0,1,2,...; m=-l,-l+1,...,l-1,l.

On peut alors montrer les relations suivantes (voir Appendice A):

$$\vec{s}.\vec{n}\,\Omega_{l-1}^m(+) = \Omega_l^m(-)\ ;\ \vec{s}.\vec{n}\,\Omega_l^m(-) = \Omega_{l-1}^m(+)\ ; \tag{4.6}$$

$$\vec{s}.\vec{n} s_2 \Omega_{l-1}^{*m}(+) = i\,(-1)^{m+1}\Omega_l^{-m+1}(-)\ ;$$

$$\vec{s}.\vec{n} s_2 \Omega_l^{*m}(-) = i\,(-1)^m\,\Omega_{l-1}^{-m+1}(+)\ ;$$

Rappelons que:

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}\ ;\ x = r\cos\phi\,\sin\theta,\quad y = r\sin\phi\,\sin\theta,\quad z = r\cos\theta. \tag{4.7}$$

Nous allons maintenant chercher une solution de (4.3) sous la forme:

$$\xi = \sum_m F_{l-1}^m(t,r)\Omega_{l-1}^m(+) + \sum_{m'} G_l^{m'}(t,r)\Omega_l^{m'}(-) \tag{4.8}$$

On voit bien qu'il n'est pas possible de séparer tout de suite l'une de l'autre les variables t et r. On peut seulement séparer les variables angulaires ϕ *et* θ. Suivant des procédés classiques en théorie de Dirac [20], [22], nous allons introduire (4.8) dans (4.3) et multiplier à gauche par $\vec{s}.\vec{n}$. Grâce à (4.6) on obtient d'abord:

$$\frac{1}{c}(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \frac{e^2}{r})\left[\sum_m F_{l-1}^m\,\Omega_l^m(-) + \sum_{m'} G_l^{m'}\,\Omega_{l-1}^{m'}(+)\right] \tag{4.9}$$

$$= i\hbar\vec{s}.\vec{n}\ \ \vec{s}.\vec{\nabla}\left[\sum_m F_{l-1}^m\,\Omega_{l-1}^m(+) + \sum_{m'} G_l^{m'}\,\Omega_l^{m'}(-)\right]$$

$$-im_0c\left[\sum_m(-1)^{m+1}F_{l-1}^{*m}\,\Omega_l^{-m+1}(-) + \sum_{m'}(-1)^{m'}\ G_l^{*m'}\,\Omega_{l-1}^{-m'+1}(+)\right]$$

Le second membre s'arrange grâce aux relations classiques:

$$\vec{s}.\vec{n}\ \ \vec{s}.\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\vec{s}.\vec{\Lambda} \tag{4.10}$$

où $\vec{\Lambda}$ est le moment orbital:

$$\vec{\Lambda} = -i\vec{r}\times\vec{\nabla}. \tag{4.11}$$

On trouve en outre les relations aux valeurs propres (Appendice B)

$$\vec{s}.\vec{\Lambda}\Omega_{l-1}^m(+) = (l-1)\Omega_{l-1}^m(+) \tag{4.12}$$

$$\vec{s}.\vec{\Lambda}\Omega_l^m(-) = -(l+1)\Omega_l^m(-)$$

si bien qu'en tenant compte de ce que les $\Omega_l^m(\pm)$ sont orthonormés, on tire de (4.9) le système suivant d'où les angles sont éliminés:

$$(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + i\frac{\alpha}{r})F_{l-1}^m = (\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1+l}{r})G_l^m + \chi(-1)^m\,F_{l-1}^{*-m+1} \tag{4.13}$$

$$(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + i\frac{\alpha}{r})G_l^m = (\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1-l}{r})F_{l-1}^m - \chi(-1)^m\,G_l^{*-m+1}$$

où l'on a:

$$m = -l, -l+1, \ldots, l-1, l, \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c}, \quad \chi = \frac{m_0 c}{\hbar} \tag{4.14}$$

Prenons le système complexe conjugué de (4.13) en changeant: $m \longleftrightarrow -m+1$. Nous aurons:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - i\frac{\alpha}{r}\right)F_{l-1}^{*-m+1} &= \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1+l}{r}\right)G_l^{*-m+1} - \chi(-1)^m F_{l-1}^m \\
\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - i\frac{\alpha}{r}\right)G_l^{*-m+1} &= \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1-l}{r}\right)F_{l-1}^{*-m+1} + \chi(-1)^m G_l^m
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Nous allons maintenant combiner les équations (4.13) et (4.15) en introduisant le changement de fonctions:

$$\begin{aligned}
\frac{A_{l-1}^m(r)}{r}e^{(-1)^m i\omega t} &= F_{l-1}^m + (-1)^m F_{l-1}^{*-m+1} \; ; \\
\frac{B_{l-1}^m(r)}{r}e^{(-1)^m i\omega t} &= F_{l-1}^m - (-1)^m F_{l-1}^{*-m+1} \; ; \\
\frac{C_l^m(r)}{r}e^{(-1)^m i\omega t} &= G_l^m + (-1)^m G_l^{*-m+1} \; ; \\
\frac{D_l^m(r)}{r}e^{(-1)^m i\omega t} &= G_l^m - (-1)^m G_l^{*-m+1} \; ;
\end{aligned} \tag{4.16}$$

avec:

$$B_{l-1}^m = (-1)^{m+1}A_{l-1}^{*-m+1} \; ; \; D_l^m = (-1)^{m+1}C_l^{*-m+1} \tag{4.16'}$$

On vérifie qu'avec la condition (4.16') les notations (4.16) restent invariantes si on change m en -m+1, en prenant les complexes conjugués. En sommant et en retranchant (4.13) et (4.15) on trouve un système différentiel qui est seulement en r et de rang unité [23]. il s'écrit:

$$r\frac{dX}{dr} = (M + Nr)X, \tag{4.17}$$

en introduisant les notations:

$$\omega' = (-1)^m \omega \; ; \; X = \begin{bmatrix} A_{l-1}^m(r) \\ B_{l-1}^m(r) \\ C_l^m(r) \\ D_l^m(r) \end{bmatrix} ; \tag{4.18}$$

$$M = \begin{bmatrix} l & 0 & 0 & i\alpha \\ 0 & l & i\alpha & 0 \\ 0 & i\alpha & -l & 0 \\ i\alpha & 0 & 0 & -l \end{bmatrix} ; N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i\frac{\omega'}{c} & -\chi \\ 0 & 0 & \chi & i\frac{\omega'}{c} \\ i\frac{\omega'}{c} & \chi & 0 & 0 \\ -\chi & i\frac{\omega'}{c} & 0 & 0 \end{bmatrix} ;$$

Nous allons d'abord diagonaliser N, ce qui s'obtient avec la matrice:

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{\omega'}{\mu c} & i\frac{\chi}{\mu} \\ 0 & 1 & -i\frac{\chi}{\mu} & \frac{\omega'}{\mu c} \\ 1 & 0 & -\frac{\omega'}{\mu c} & -i\frac{\chi}{\mu} \\ 0 & 1 & i\frac{\chi}{\mu} & -\frac{\omega'}{\mu c} \end{bmatrix} \; ; \; \mu = \sqrt{\frac{\omega'^2}{c^2} - \chi^2} \tag{4.19}$$

Le changement de variable:

$$Y = SX \tag{4.20}$$

permet d'écrire l'équation (4.17) sous la forme:

$$r\frac{dY}{dr} = \left\{ i\mu r\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} + l\begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} + \frac{\alpha}{\mu}\begin{bmatrix} \frac{\omega'}{c}s_1 + i\chi s_3 & 0 \\ 0 & -\frac{\omega'}{c}s_1 - i\chi s_3 \end{bmatrix} \right\} Y$$

où μ est défini en (4.19), I est la matrice unité d'ordre 2 et s_1, s_3 les matrices de Pauli. Nous allons encore transformer (4.21) par le changement de fonctions inconnues:

$$Z = \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & s_1 V \end{bmatrix} Y \; ; \; V = \left[\frac{\omega'}{2\mu c}\right]^{1/2} \begin{bmatrix} \left[\frac{\omega'/c}{\mu - i\chi}\right]^{1/2} & \left[\frac{\mu - i\chi}{\omega'/c}\right]^{1/2} \\ \left[\frac{\omega'/c}{\mu + i\chi}\right]^{1/2} & -\left[\frac{\mu + i\chi}{\omega'/c}\right]^{1/2} \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

où V a été choisie telle que

$$V(\frac{\omega'}{c}s_1 + i\chi s_3)V^{-1} = \mu s_3 \tag{4.23}$$

L'équation prend alors la forme:

$$r\frac{dZ}{dr} = \left\{ i\mu r \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} + l \begin{bmatrix} 0 & s_1 \\ s_1 & 0 \end{bmatrix} + i\alpha \begin{bmatrix} s_3 & 0 \\ 0 & s_3 \end{bmatrix} \right\} Z \tag{4.24}$$

et en l'itérant, on trouve:

$$\left[r\frac{d}{dr}\right]^2 Z = \left\{ -\mu^2 r^2 + \mu r\left(i\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} - 2\alpha \begin{bmatrix} s_3 & 0 \\ 0 & -s_3 \end{bmatrix} \right) + l^2 - \alpha^2 \right\} Z \tag{4.25}$$

Toutes les matrices sont diagonales et on est ramené à des équations différentielles indépendantes pour les composantes de Z:

$$\left[r\frac{d}{dr}\right]^2 Z_n = \left[-\mu^2 r^2 + \mu r(i\epsilon - 2\alpha\epsilon') + l^2 - \alpha^2 \right] Z_n \quad (n = 1,2,3,4) \tag{4.26}$$

$$\epsilon = 1,1,-1,-1\ ;\ \epsilon' = 1,-1,-1,1 \quad (\text{pour } n = 1,2,3,4) \tag{4.27}$$

Si nous posons maintenant:

$$r = \frac{i\rho}{2\mu}\ ,\ W_n = \rho^{\frac{1}{2}} Z_n\ , \tag{4.28}$$

l'équation (4.26) se ramène à la forme suivante, en omettant l'indice n:

$$\frac{d^2W}{d\rho^2} + \left[-\frac{1}{4} + \frac{\frac{\epsilon}{2} - i\alpha\epsilon'}{\rho} + \frac{\frac{1}{4} + \alpha^2 - l^2}{\rho^2} \right] W = 0. \tag{4.29}$$

Cést une équation de Whittaker de coefficients [23][24]:

$$k = \frac{\epsilon}{2} - i\alpha\epsilon'\ ,\quad m = \sqrt{l^2 - \alpha^2} \tag{4.30}$$

(bien entendu, k et m n'ont aucun rapport avec des indices précédemment utilisés, mais nous garderons cette notation consacrée pour $W_{k,m}$).

Nous pourrons prendre une fonction de Whittaker:

$$w_{k,m}(\rho) = W_{\frac{\epsilon}{2} - i\alpha\epsilon',\, l^2 - \alpha^2}(-2i\mu r) \tag{4.31}$$

pour calculer les fonctions radiales à condition, tout d'abord, que ces dernières soient de carré intégrable à l'origine, Or on sait [24] qu'au voisinage de l'origine, la solution régulière de (4.29) peut s'écrire, en tenant compte de (4.28) et 4.30):

$$|\ W_{k,m}\ | = 2\mu r^{\frac{1}{2}+m}(1 + O(r)) \tag{4.32}$$

Observons que le coefficient m est le même pour toutes les composantes W_n et donc Z_n dans (4.26). Donc, en remontant les changements de fonctions (4.28), (4.22), (4.20), (4.16), (4.8), nous pouvons affirmer que:

$$\xi^+\xi \approx r^{2(m-1)} \quad (\text{ au voisinage de } r = 0) \tag{4.33}$$

et d'après la valeur (4.30) de m, on voit que $\xi^+\xi$ sera toujours intégrable à l'origine puisque l=0,1,2...

Mais le plus intéressant est le *comportement à l'infini*. D'après une formule classique [23]:

$$W_{k,m}(\rho) = e^{-\frac{1}{2}\rho}\rho^k(1 + O(\rho^{-1})) \quad si \quad |\ Arg(-\rho)\ | < \pi. \tag{4.34}$$

La condition de validité est satisfaite parce que: $\rho = -2i\mu r$ d'après (4.28) et on a donc d'après (4.30):

$$|\ W_{k,m}(\rho)\ | = 2\mu r^{\frac{\epsilon}{2}}(1 + O(r^{-1})) \tag{4.35}$$

avec $\epsilon = \pm 1$ comme dans (4.26)

En remontant, comme précédemment, les changements de fonctions jusqu'à $\xi^+\xi$ on se trouve devant une petite difficulté parce que, contrairement à ce qui se passait pour $r \approx 0$ où l'exposant dans (4.32) était le même pour toutes les composantes W ou Z, il n'en est pas de même ici avec l'exposant $\frac{\epsilon}{2}$ dans (4.35). En utilisant à nouveau (4.28), (4.22), (4.20), (4.16), et (4.8), on voit facilement que $\xi^+\xi$ admet la forme asymptotique:

$$\xi^+\xi = \sum a_{nn'}\, r^{\epsilon_n + \epsilon_{n'} - 3} \quad (\text{pour } r \to \infty) \tag{4.36}$$

où ϵ_n *et* $\epsilon_{n'}$ représentent les valeurs $\epsilon = \pm 1$, qui changent, d'après (4.27), selon la composante de Z dans (4.24). Ceci nous amène aux conclusions suivantes:

5. Conclusions physiques sur le comportement, dans un champ électrique coulombien, d'un état chiral de l'électron de Dirac (électron de Majorana).

Tout d'abord, la forme symptotique (4.36) montre que $\xi^{+}\xi$ ne serait intégrable sur tout l'espace que s'il ne subsistait dans la somme qui figure au second membre de (4.36) aucun nombre $\epsilon_n = 1$. En effet, les différentes valeurs de ϵ_n *et* $\epsilon_{n'}$ donnent des termes en:

r^{-5} (*pour* $\epsilon_n + \epsilon_{n'} = -2$); r^{-3} (*pour* $\epsilon_n + \epsilon_{n'} = 0$); r^{-1} (*pour* $\epsilon_n + \epsilon_{n'} = 2$).

Or seul le premier type de terme donne une intégrale convergente à l'infini et, pour que l'intégrale de $\xi^{+}\xi$ converge, il faut donc bien supprimer les $\epsilon_n = 1$, ce qui revient à annuler identiquement les composantes $Z_1 et Z_2$ dans l'équation (4.24). Mais si on fait cela, on vérifie que l'on a identiquement $Z \equiv 0$ et la fonction d'onde disparait.

Donc $\xi^{+}\xi$ n'est jamais sommable sur tout l'espace et on voit que l' *électron de Majorana ne possède pas d'états liés dans un champ coulombien.* Le spectre sera continu et tous les états seront d'ionisation. Il faut noter que *le signe de* α dans l'équation (4.24) n'intervient pas. Or ce signe est celui du potentiel central dans l'équation (4.3). Donc *l'électron de Majorana aura un comportement diffusant qui sera du même type, qu'il soit dans un champ coulombien positif ou négatif.*

Et il est facile de comprendre pourquoi. En effet, dans l'état ξ (4.8), qui est associé à une valeur propre $l - \frac{1}{2}$ du moment cinétique total, les termes correspondant aux différentes valeurs de m auront, d'après (4.16) des facteurs exponentiels $e^{(-1)^m \omega t}$. Or ω n'est autre que l'énergie et on voit donc que ξ *est une superposition d'états à énergie s positives et négatives: donc d'états "électrons" et d'états "positrons".*

On voit donc que le champ de Majorana n'est pas à proprement parler, une théorie simultanée de l'électron et du positron.

C'est un état hybride de l'électron de Dirac dans lequel celui-ci "ne sait pas" quelle est sa charge électrique. On comprend donc qu'il ne puisse plus avoir d'états liés. Mais ses états diffusifs seront très différents de ceux d'un électron rapide dans son état "normal", puisque les fonctions d'onde ne sont pas les mêmes que celles d'un système keplerien ordinaire dans un état d'ionisation.

Pour nous en rendre compte, nous allons refaire le calcul précédent, à la limite classique. Nous verrons, en effet, que toutes les trajectoires sont hyperboliques, mais que les hyperboles en question *ne sont pas kepleriennes.* Et nous verrons aussi que, la limite classique ignorant la superposition quantique, il y aura deux sortes d'hyperboles qui correspondront respectivement à une diffusion dans un champ attractif et dans un champ répulsif.

6. L'électron de Majorana à l'approximation de l'optique géométrique.

Reprenons l'équation générale (3.1) en ξ avec les définitions (3.3) et, la jauge électromagnétique étant supposée fixée, choisissons pour θ la valeur (4.2) et introduisons dans (3.1) l'expression:

$$\xi = a(t,\vec{r})e^{-\frac{i}{\hbar}S(t,\vec{r})} + b(t,\vec{r})e^{+\frac{i}{\hbar}S(t,\vec{r})}, \tag{6.1}$$

où $a(t,\vec{r}) et b(t,\vec{r})$ sont de nouveaux *spineurs.*

En négligeant les termes qui ont $\hbar$ en facteur, il reste l'équation:

$$\left\{\left[\frac{1}{c}(\frac{\partial S}{\partial t} + eV) - (\vec{\nabla}S - \frac{e}{c}\vec{A}).\vec{s}\right]a + m_0 c s_2 b^*\right\}e^{-\frac{i}{\hbar}S} \tag{6.2}$$

$$-\left\{\left[\frac{1}{c}(\frac{\partial S}{\partial t} - eV) - (\vec{\nabla}S + \frac{e}{c}\vec{A}).\vec{s}\right]b - m_0 c s_2 a^*\right\}e^{+\frac{i}{\hbar}S} = 0$$

Si $\hbar \to 0$, les phases $\pm\frac{S}{\hbar}$ deviennent infiniment rapides et, en multipliant alternativement le système (5.2) par $e^{\frac{iS}{\hbar}} et e^{\frac{-iS}{\hbar}}$, on trouve l'approximation de l'optique géométrique:

$$\left[\frac{1}{c}(\frac{\partial S}{\partial t} + eV) - (\vec{\nabla}S - \frac{e}{c}\vec{A}).\vec{s}\right]a + m_0 c s_2 b^* = 0 \tag{6.3}$$

$$\left[\frac{1}{c}(\frac{\partial S}{\partial t} - eV) - (\vec{\nabla}S + \frac{e}{c}\vec{A}).\vec{s}\right]b - m_0 c s_2 a^* = 0$$

Introduisons maintenant un spineur $\hat{b}$ tel que

$$\hat{b} = s_2 b^*, \tag{6.4}$$

prenons le complexe conjugué de la seconde équation (6.3) et multiplions par s_2. Il vient:

$$\left[\frac{1}{c}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + eV\right) - \left(\vec{\nabla} S - \frac{e}{c}\vec{A}\right).\vec{s}\right] a + m_0 c \hat{b} = 0 \qquad (6.5)$$

$$\left[\frac{1}{c}\left(\frac{\partial S}{\partial t} - eV\right) + \left(\vec{\nabla} S + \frac{e}{c}\vec{A}\right).\vec{s}\right] \hat{b} - m_0 c \, a = 0$$

Multiplions la première équation par la matrice qui multiplie $\hat{b}$ dans la seconde. Nous aurons:

$$\left\{ \left[\frac{1}{c}\left(\frac{\partial S}{\partial t} - eV\right) + \left(\vec{\nabla} S + \frac{e}{c}\vec{A}\right).\vec{s}\right] \right. \qquad (6.6)$$

$$\left. \left[\frac{1}{c}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + eV\right) - \left(\vec{\nabla} S - \frac{e}{c}\vec{A}\right).\vec{s}\right] - m_0^2 c^2 \right\} a = 0$$

Soit encore:

$$\left\{ \frac{1}{c}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + eV\right)\left(\frac{\partial S}{\partial t} - eV\right) - \left(\vec{\nabla} S + \frac{e}{c}\vec{A}\right)\left(\vec{\nabla} S - \frac{e}{c}\vec{A}\right) - m_0^2 c^2 \right. \qquad (6.7)$$

$$\left. + 2\frac{e}{c}\left[V\vec{\nabla} S + \frac{1}{c}\frac{\partial S}{\partial t}\vec{A} + i\vec{\nabla} S \times \vec{A}\right].\vec{s} \right\} a = 0$$

Pour que $a \neq 0$, nous devons annuler le déterminant de la matrice, ce qui nous donne une équation de Hamilton-Jacobi, que nous n'écrirons que pour $\vec{A} = 0$:

$$\left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \left(\vec{\nabla} S\right)^2 - \frac{e^2}{c^2}V^2 - m_0^2 c^2\right]^2 - \frac{4e^2}{c^2}V^2\left(\vec{\nabla} S\right)^2 = 0 \qquad (6.8)$$

Une factorisation nous donne alors *deux équations* qui s'écrivent, dans le cas coulombien (4.1), sous la forme suivante, qui montre bien que le signe des charges en présence ne joue finalement aucun rôle (bien entendu, le $\epsilon = \pm 1$ ne correspond pas au choix du signe de la charge de la particule ou du champ central, mais provient simplement de la factorisation de (6.8)):

$$\frac{1}{c}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \left(|\vec{\nabla} S| - \frac{\epsilon e^2}{c}\frac{1}{r}\right)^2 - m_0^2 c^2 = 0 \quad (\epsilon = \pm 1) \qquad (6.9)$$

On voit que ces deux équations de Hamilton-Jacobi sont différentes de celles que l'on connait habituellement pour un électron dans un champ coulombien de signe quelconque qui s'écrit:

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\epsilon e^2}{r}\right)^2 - (\vec{\nabla} S)^2 - m_0^2 c^2 = 0 \quad (\epsilon = \pm 1) \qquad (6.10)$$

Introduisons maintenant, dans (6.9) la décomposition:

$$S = -Et + W \qquad (6.11)$$

On obtient:

$$\frac{E^2}{c^2} - m_0^2 c^2 = \left[|\vec{\nabla} W| - \frac{\epsilon e^2}{c}\frac{1}{r}\right]^2, \qquad (6.12)$$

ce qui montre déjà que:

$$E \geq m_0 c^2 \qquad (6.13)$$

Autrement dit, il n'y aura *pas d'états liés* et donc *pas de trajectoires fermées*.

De (6.12), on tire maintenant les deux équations:

$$(\vec{\nabla} W)^2 = \frac{1}{c^2}\left(\sqrt{E^2 - m_0^2 c^4} + \frac{\epsilon e^2}{r}\right)^2 \quad (\epsilon = \pm 1) \qquad (6.14)$$

Nous aurons alors, en coordonnées polaires:

$$(\vec{\nabla} W)^2 = \left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \phi}\right)^2 \qquad (6.15)$$

et, en posant:

$$W = J\phi + f(r) \quad (J = Const.), \qquad (6.16)$$

l'équation (6.14) donnera:

$$f(r) = \int \left(A^2 + \frac{2B}{r} + \frac{C}{r^2}\right)^{1/2} dr, \qquad (6.17)$$

avec:

$$A = \frac{1}{c}\sqrt{E^2 - m_0^2 c^4}, \quad B = \frac{A\epsilon e^2}{c}, \quad C = \frac{e^4}{c^2} - J^2. \tag{6.18}$$

Dans (6.17), le discriminant est positif:

$$\Delta' = B^2 - A^2 C = A^2 J^2 \geq 0 \tag{6.19}$$

et les racines sont donc réelles:

$$\frac{1}{r} = \frac{A\left(\frac{\epsilon e^2}{c} \pm J\right)}{J^2 - \frac{e^4}{c^2}} \quad (\epsilon = \pm 1) \tag{6.20}$$

Nous supposerons désormais que $J \neq 0$ et comme nous sommes à la limite d'un problème quantique, nous aurons:

$$J \approx \hbar \rightarrow J \approx 137\frac{e^2}{c} >> \frac{e^2}{c}. \tag{6.21}$$

Après cette approximation, qui ne s'impose pas mais qui est commode pour l'exposé, nous écrirons la racine positive éelle dans (6.20) sous la forme:

$$\frac{1}{r^*} = \frac{A}{J} \rightarrow r^* = \frac{Jc}{\sqrt{E^2 - m_0^2 c^4}} \tag{6.22}$$

La trajectoire sera donnée par (6.16) et (6.17). Elle s'écrira:

$$\frac{\partial W}{\partial J} = \phi_0 \rightarrow \phi - \phi_0 = J\int_{r^*}^{r} \frac{-1}{\left(A^2 + \frac{2B}{r} + \frac{C}{r^2}\right)^{1/2}} \frac{dr}{r^2} \tag{6.23}$$

En prenant $\phi_0 = 0$ et en restant à la même approximation qu'en (6.22), l'équation de la trajectoire devient:

$$\frac{1}{r} = \frac{e^2\sqrt{E^2 - m_0^2 c^4}}{J^2 c^2}\left(\epsilon + \frac{Jc}{e^2}\cos\phi\right) \quad (\epsilon = \pm 1). \tag{6.24}$$

Cést une *hyperbole*, puisqu'en vertu de (6.21), son excentricité est supérieure à l'unité:

$$\frac{Jc}{e^2} > 1. \tag{6.25}$$

Il n'y a donc pas d'états liés, comme on l'a vu d'avance, mais il ne faut pas oublier qu'il y a *deux types de trajectoires possibles*, selon le signe de ϵ, qui correspondent respectivement aux deux équations (6.9) que nous avons tirées de (6.8) par factorisation. En effet:

- Si $\epsilon = +1$, la trajectoire tourne sa *concavité vers le champ central* et le mouvement est du type *attractif*.

- Si $\epsilon = -1$, la trajectoire tourne sa *convexité* vers le champ central et le mouvement est donc répulsif.

Et nous voyons qu'en accord avec le traitement quantique, les deux cas sont possibles *quelles que soient les charges respectives de la particule et du champ*.

Il est intéressant de comparer nos résultats avec le cas habituel d'un électron relativiste dans un potentiel coulombien: nous reprendrons donc l'équation classique (6.10) en y introduisant (6.15) et (6.16) d'où une intégrale qui a la même forme que (6.17) et que nous écrirons:

$$f(r) = \sum \left(A^2 + \frac{2B'}{r} + \frac{C}{r^2}\right)^{1/2} dr \tag{6.26}$$

avec les constantes:

$$A = \frac{1}{c}\sqrt{E^2 - m_0^2 c^4}, \quad B' = \frac{E\epsilon e^2}{c^2}, \quad C = \frac{e^4}{c^2} - J^2. \tag{6.27}$$

Nous nous plaçons ici dans le *cas diffusant* ($E \geq m_0 c^2$) et on voit, en comparant avec (6.18), que le seul coefficient différent est B, où le facteur A qui figurait dans léxpression (6.18) de B est remplacé ici par $\frac{E}{c}$, ce qui veut dire que les deux cas se rejoindront à la limite $E >> m_0 c^2$. Mais il faut souligner que, dans le cas précédent, la condition (6.13): $E \geq m_0 c^2$ était nécessaire, tandis qu'ici, dans le cas classique, ce n'est que l'une des possibilités, puisque nous pourrions avoir aussi $E < m_0 c^2$, ce qui correspondrait à des trajectoires elliptiques (états liés).

En reprenant le calcul précédent avec les valeurs (6.27) des constantes, nous trouverons les trajectoires:

$$\frac{1}{r} = \frac{e^2 E}{J^2 c^2}\left(\epsilon + c\frac{\sqrt{(E^2 - m_0^2 c^4)J^2 + m_0^2 c^2 e^4}}{Ee^2}\cos\phi\right) \tag{6.28}$$

Cette formule, qui n'est valable que pour $E > m_0c^2$, ne diffère de la formule classique que par l'absence du facteur de précession dans l'argument du cosinus, que nous négligeons en vertu de (6.21) et de l'approximation que nous avons faite précédemment (ce qui revenait en fait à remplacer C par $-J^2$). Par contre cette approximation ne serait pas valable sous la racine qui figure dans l'expression de l'excentricité, sauf si $E >> m_0c^2$, *limite à laquelle les expressions (6.24) et (6.28) se rejoignent.*

Mais le cas intéressant est celui où $E - m_0c^2$ est petit. On voit en effet que l'excentricité de l'hyperbole classique dépend de E et que:

$$c\frac{\sqrt{(E^2-m_0^2c^4)J^2+m_0^2c^4}}{Ee^2} \to 1 \quad \text{si } E \to m_0c^2. \tag{6.29}$$

La trajectoire classique se referme donc et devient *parabolique* quand $E \to m_0c^2$.

Au contraire, léxcentricité de l'hyperbole (6.24) ne dépend pas de l'énergie. Donc les angles des asymptotes ne changent pas. En revanche

$$\frac{1}{p} = e^2\frac{\sqrt{E^2-m_0^2c^4}}{J^2c^2} \to 0 \quad \text{si } E \to m_0c^2. \tag{6.30}$$

et le paramètre tend vers l'infini, tandis qu'on voit sur (6.28) que lorsque $E \to m_0c^2$, le paramètre tend vers une valeur finie dans le cas classique.

On voit qu'aux faibles énergies les deux comportements sont différents et devraient pouvoir se reconnaître expérimentalement, à condition d'être capable de préparer un électron dans cets état contraint étrange qui est décrit par le champ de Majorana.

7. Comment observer un électron de Majorana ?

Nous avons vu qu'à l'approximation de l'optique géométrique, dans un champ coulombien, l'électron de Majorana se comporte *soit* comme une particule de charge négative, *soit* comme une particule de charge positive, mais qu'il se distingue d'un électron ou d'un positron puisque son mouvement n'est pas kleperien.

Mais ceci ne concerne encore que les trajectoires, c'est à dire les rayons de l'onde donnés par l'équation de Jacobi. Si nous introduisons dans (6.3) les expressions de l'action S ainsi trouvées, nous pourrons résoudre (6.3) et introduire a et b dans l'expression (6.1) de la fonction d'onde.

Nous verrons alors que, bien que les trajectoires semblent "choisir" leur état de charge (+ ou -), la fonction d'onde reste évidemment un état de superposition de deux ondes avec des *phases opposées*, c'est à dire des ondes qui sont conjuguées de charge. Voyons le d'un peu plus près sur des *ondes planes*.

Au lieu de (6.1) posons donc

$$\xi = a\ e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})} + b\ e^{-i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})} \tag{7.1}$$

où les spineurs a et b sont maintenant constants. Introduisons cette expression dans (3.1) avec V = A = 0 et θ défini par (4.2). Par un calcul analogue à celui du paragraphe 6, mais plus simple, nous trouverons:

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}, \tag{7.2}$$

$$\xi = a\ e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})} - \frac{\hbar}{m_0c}\left(\frac{\omega}{c} - \vec{s}.\vec{k}\right)s_2a^*\ e^{-i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})} \tag{7.3}$$

C'est manifestement la superposition de deux ondes avec des énergies de signes contraires. Mais revenons maintenant à l'équation de Dirac, c'est à dire que nous reprenons le couple d'équations (3.1), (3.2) relié par (1.16), que nous particularisons par (4.2) pour plus de commodité. Donc ce n'est plus le champ de Majorana (3.1) à deux composantes que nous regardons, mais celui de Dirac avec la contrainte (1.14). Autrement dit, c'est l'équation (2.7) avec la valeur (4.2) pour l'angle θ, mais avec A_μ=0. Il nous faut donc calculer l'onde ψ à partir de (7.3) avec:

$$\eta = s_2\xi^*, \quad \psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\xi+\eta \\ \xi-\eta\end{bmatrix}, \tag{7.4}$$

ceci en vertu de (1.8), (1.16) et (4.2).

Nous allons prendre, en outre, Oz pour direction de propagation de l'onde plane et nous écrirons:

$$a = \begin{bmatrix}a_1 \\ a_2\end{bmatrix} \quad \vec{k} = \{0,0,k\}. \tag{7.5}$$

$a_1 eta_2$ sont les composantes du spineur constant dans (7.3). On trouve alors que ψ est de la forme:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 + \psi_2), \tag{7.6}$$

avec:

$$\psi_1 = a_1 \begin{bmatrix} 1 + \frac{\hbar}{m_0 c}(\frac{\omega}{c}+k) \\ 0 \\ 1 - \frac{\hbar}{m_0 c}(\frac{\omega}{c}+k) \\ 0 \end{bmatrix} e^{i(\omega t - kz)} - i a_1^* \begin{bmatrix} 0 \\ 1 + \frac{\hbar}{m_0 c}(\frac{\omega}{c}+k) \\ 0 \\ -[1 - \frac{\hbar}{m_0 c}(\frac{\omega}{c}+k)] \end{bmatrix} e^{-i(\omega t - kz)} \tag{7.7}$$

$$\psi_2 = a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 + \frac{\hbar}{m_0 c}(\frac{\omega}{c}-k) \\ 0 \\ 1 - \frac{\hbar}{m_0 c}(\frac{\omega}{c}-k) \end{bmatrix} e^{i(\omega t - kz)} + i a_2^* \begin{bmatrix} 1 + \frac{\hbar}{m_0 c}(\frac{\omega}{c}-k) \\ 0 \\ -[1 - \frac{\hbar}{m_0 c}(\frac{\omega}{c}-k)] \\ 0 \end{bmatrix} e^{-i(\omega t - kz)} \tag{7.8}$$

On voit que ψ est une superposition arbitraire de deux ondes ψ_1 et ψ_2 (n'oublions pas que a_1 et a_2 sont des constantes quelconques) et que chacune des ondes ψ_1 et ψ_2 est elle-même la superposition de deux ondes qui ne dépendent plus que d'une seule constante (a_1 ou a_2), mais *qui diffèrent à la fois par le signe de l'énergie et de l'hélicité*. Cette hélicité est facile à définir puisque, ayant choisi Oz pour direction de propagation, la projection du spin dans cette direction est:

$$\sigma_3 = \begin{bmatrix} s_3 & 0 \\ 0 & s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{7.9}$$

On voit donc que:

1) ψ_1 est la superposition de deux ondes d'hélicité et de charge de même signe (respectivement + et - pour chacune des deux ondes).

2) ψ_2 est la superposition de deux ondes qui sont chacune d'hélicité et de charge de signe contraire.

On observera que la *phase relative* des deux composantes de $\psi_1$ouψ_2, c'est à dire la phase relative de $a_{1,2}$et $deia^*_{1,2}$ n'a pas de sens physique, puisque nous disposions d'une phase arbitraire θ dans (3.1) ou dans (2.7) et c'est elle qui se retrouve ici.

En particulier, aux *faibles énergies*, on aura:

$$|\, k \,| << \frac{\omega}{c}, \quad \frac{\omega}{c} = \frac{m_0 c}{\hbar} \tag{7.10}$$

Il restera donc en première approximation:

$$\psi_1 = \begin{bmatrix} a_1 e^{i(\omega t - kz)} \\ -i a_1^* e^{-i(\omega t - kz)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \psi_2 = \begin{bmatrix} i\ a_2 e^{-i(\omega t - kz)} \\ a_2^* e^{i(\omega t - kz)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{7.11}$$

On voit donc que si l'on parvenait à "faire vivre" suffisamment longtemps (c'est à dire sans annihilation) deux faisceaux parallèles et de même énergie, ainsi polarisés, d'électrons et de positrons, les couples qui se formeraient devraient avoir le comportement d'un électron de Majorana.

Notamment, un électron dans un tel état devrait, ainsi qu'on l'a vu au paragraphe précédent, se comporter dans un champ coulombien d'une manière très différente de celle d'un électron ou d'un positron ordinaire.

APPENDICE A

Nous allons déterminer les formules (4.6). Tout d'abord, on sait que, par définition de $\Omega_l^m(-)$*et* $\Omega_{l-1}^m(+)$, on a:

$$\mathcal{J}^2 \Omega_l^m(-) = j(j+1)\Omega_l^m(-), \tag{A.1}$$

$$\mathcal{J}^2 \Omega_{l-1}^m(+) = j(j+1)\Omega_{l-1}^m(+), \quad j = l - \frac{1}{2}$$

$$J_z\, \Omega_l^m(-) = u\, \Omega_l^m(-), \quad J_z\, \Omega_{l-1}^m(+) = u\, \Omega_{l-1}^m(+), \quad u = m - \frac{1}{2} \tag{A.2}$$

avec:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}, \quad \vec{L} = -i\ \vec{r} \times \vec{\nabla}, \quad \vec{S} = \frac{1}{2}\vec{s}, \tag{A.3}$$

où $\vec{s} = \{s_1, s_2, s_3\}$ sont les matrices de Pauli.

On vérifie facilement que l'opérateur:

$$\vec{s}.\vec{n} = \frac{1}{r}\vec{s}.\vec{r} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\theta \end{bmatrix} \tag{A.4}$$

commute avec $\vec{J}$:

$$[\vec{J}, \vec{s}.\vec{n}] = 0 \tag{A.5}$$

Donc $\vec{s}.\vec{n}$ transforme un Ω appartenant au sous-espace des valeurs propres j, u de $J^2 et J_z$ en un élément du même sous-espace. On aura, par exemple:

$$\vec{s}.\vec{n}\ \Omega_l^m(+) = A\ \Omega_l^m(+) + B\ \Omega_{l+1}^m(-) \tag{A.6}$$

où les constantes A et B ne dépendent pas de m. Nous les calculerons en choisissant des valeurs particulières de m et des angles polaires:

$$m = l+1, \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \phi = 0. \tag{A.7}$$

D'après (4.4), nous aurons alors:

$$\Omega_l^{l+1}(+) = \begin{bmatrix} Y_l^l(\frac{\pi}{2},0) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Omega_{l+1}^{l+1}(-) = \begin{bmatrix} \left(\frac{l}{2l+3}\right)^{1/2} Y_{l+1}^l(\frac{\pi}{2},0) \\ -\left(\frac{2l+2}{2l+3}\right)^{1/2} Y_{l+1}^{l+1}(\frac{\pi}{2},0) \end{bmatrix} \tag{A.8}$$

Mais d'après (4.5), on a d'autre part:

$$Y_{l+1}^l(\frac{\pi}{2},0), \quad \left(\frac{2l+2}{2l+3}\right)^{1/2} Y_{l+1}^{l+1}(\frac{\pi}{2},0) = -Y_l^l(\frac{\pi}{2},0), \tag{A.9}$$

et d'après (A.4) on a:

$$\vec{s}.\vec{n}(\frac{\pi}{2},0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{A.10}$$

Il suffit d'introduire (A.8), (A.9) et (A.10) dans (A.7) pour trouver:

$$A = 0, \quad B = 1, \tag{A.11}$$

ce qui démontre la première relation (4.6). La seconde est évidente parce que:

$$(\vec{s}.\vec{n})^2 = I, \tag{A.12}$$

et les deux dernières également, à condition de se rappeler qu'en vertu de (4.5), on a:

$$Y_l^{m*}(\theta,\phi) = (-1)^m\ Y_l^{-m} \tag{A.13}$$

APPENDICE B

Pour démontrer (4.12), il suffit de remarquer que, dans (A.3), $\vec{L} et \vec{S}$ commutent, si bien qu'en vertu de (4.4) et (A.1), on a:

$$\vec{J}^2\Omega_l^m(\pm) = j(j+1)\Omega_l^m(\pm), \quad \vec{L}^2\Omega_l^m(\pm) = l(l+1)\Omega_l^m(\pm), \tag{B.1}$$
$$\vec{S}^2\Omega_l^m(\pm) = s(s+1)\Omega_l^m(\pm) = \frac{3}{4}\Omega_l^m(\pm).$$

Or, d'après (A.3), on a:

$$(\vec{L}+\vec{S})^2\Omega_l^m(\pm) = (L^2+S^2+2\vec{L}.\vec{S})\Omega_l^m(\pm) = (L^2+S^2+\vec{L}.\vec{s})\Omega_l^m(\pm) \tag{B.2}$$

et d'après (B.1), on aura donc:

$$j(j+1)\Omega_l^m(\pm) = [l(l+1) + \frac{3}{4} + \vec{L}.\vec{s}]\Omega_l^m(\pm),$$

d'où les relations (4.12).

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. Lochak, Ann. Fond. L. de Br., **8**, 345, 1983; **9**, 1, 1984

[2] G. Lochak, Int. J. Theor. Phys. **24**, 1019, 1985

[3] G. Lochak, Proceedings of the 4-th International Seminar on the Mathematical Theory of Dynamical Systems and Micro-physics, Udine (Italy), to be published, 1985

[4] H. Poincaré, Comptes Rendus, **123**, 530, 1896

[5] P.A.M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A **133**, 60, 1931

[6] N. Cabibbo, G. Ferrari, Nuovo. Cim. **23**, 1147, 1962

[7] R. Mignani, E. Recami, Nuovo Cim. **30A**, 533, 1975

[8] E. Recami, R. Mignani, Phys. Letters, **62B**, 41, 1976

[9] J. Steyaert, Université Catholique de Louvain (Communication personnelle), 1985

[10] E. Majorana, Nuovo Cim. **14**, 171, 1937

[11] H. Jehle, Phys. Rev. **75**, 1609, 1949

[12] C.W. Kilmister, Phys. Rev. **76**, 568, 1949

[13] J. Serpe, Phys. Rev. **76**, 1538, 1949

[14] J. Serpe, Physica, **18**, 295, 1952

[15] J.A. Mc Lennan Jr, Phys. Rev. **106**, 821, 1957

[16] K.M. case, Phys. Rev. **107**, 307, 1957

[17] H.H. v. Borzeszkowski, H.J. Treder, Found. of Phys. **15**, 193, 1985

[18] H. Weyl, Phys. Rev. **77**, 699, 1950

[19] L. de Broglie, L'électron magnétique, Hermann, Paris, 1934

[20] H.A. Kramers, Quantum Mechanics, Dover, N.Y., 1964

[21] D. Bohm, Quantum Theory, Prentice Hall, London, 1960

[22] A.I. Akhiezer, V.B. Berestetski, Quantum Electrodynamics, Interscience, N.Y. 1965

[23] E.L. Ince, Ordinary Differential Equations, Dover

[24] E.T. Whittaker, G.N. Watson, A Course of Modern Analysis, Cambridge University Press, 1958

(manuscrit reçu le 27 Mai 1986)